TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Théorème de Radon-Nikodym

1 Décomposition de Hahn et de Jordan des mesures signées

Définition 1.1 *Sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, avec $A \subset P(X)$ une σ-algèbre, une mesure signée est une fonction :*

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

avec $\mu(\emptyset) = 0$, qui satisfait l'additivité dénombrable disjointe :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_i\right) = \sum_{m\geq 1} \mu(A_i)$$

quelle que soit la suite $(A_i)_{n=1}^{\infty}$ avec $A_i \in \mathcal{A}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $1 \leq i \neq j$

Lemme 1.1 *Étant donné une mesure signée μ sur $(X, \mathcal{A})$, pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ avec $A \subset B$, on a :*

$$\mu(B) < \infty \Rightarrow \begin{cases} \mu(A) < \infty \\ \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \end{cases}$$

Preuve. Sinon, si on avait $\mu(A) = \infty$, l'additivité :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

impliquant $\mu(B) = \infty$ aussi, contradiction.

Ensuite, puisque $-\infty < -\mu(A)$, on peut effectivement soustraire, l'arithmétique étant cohérente. ■

Lemme 1.2 *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure signée μ. Si $(A)_{i=1}^{\infty}$ est une suite d'ensembles $A_i \in \mathcal{A}$ disjoints $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors :*

$$-\infty < \mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) < +\infty \Longrightarrow \sum_{i\geq 1} |\mu(A_i)| < \infty$$

Preuve. En effet , en introduisant :

$$A_i^- := \begin{cases} A_i & \text{si } \mu(A_i) < 0, \\ \emptyset & \text{si } \mu(A_i) \geq 0, \end{cases} \qquad \text{ainsi que} \qquad A_i^+ := \begin{cases} \emptyset & \text{si } \mu(A_i) < 0, \\ A_i & \text{si } \mu(A_i) \geq 0, \end{cases}$$

nous avons par $\sigma-$additivité deux séries à termes de signes constants ≤ 0 et ≥ 0 :

$$\mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i^-\right) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i^-) \qquad \text{et} \qquad \mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i^+\right) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i^+) \ .$$

Abrégeons aussi :

$$A^- := \bigcup_{i\geq 1} A_i^- \ , \qquad A^+ := \bigcup_{i\geq 1} A_i^+ \ , \qquad A := \bigcup_{i\geq 1} A_i \ .$$

Comme $-\infty < \mu(A^-)$,la premiére série à termes ≤ 0 converge absolument.

L'hypothése $\mu(A) < \infty$, l'inclusion $A^+ \subset A$, et le Lemme (1.1) donnent alors :

$$(-\infty <) \quad \mu(A^+) < \infty \ ,$$

et donc $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i^+) < \infty$ converge aussi. Enfin :

$$\sum_{i\geq 1} |\mu(A_i)| = \sum_{i\geq 1} \left|-\mu(A_i^-)\right| + \sum_{i\geq 1} \left|\mu(A_i^+)\right| < \infty \ \blacksquare$$

Puisque les arguments sont essenstiellement les mêmes que pour les (vraies) mesures (à valeurs ≥ 0), énonçons sans démonstration le résultat suivant :

Proposition 1.1 *Dans un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ muni d'une mesure signée μ, soit une suite $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ d''ensembles mesurables $A_n \in \mathcal{A}$.*

(1) Si $A_n \subset A_{n+1}$ est croissante, alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

(2) Si $A_n \supset A_{n+1}$ est décroissante et si $\mu(A_n) < \infty$, alors :

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Maintenant si $\mu_1$et μ_2 sont deux vraies mesures sur $(X, \mathcal{A})$, disons finies pour simplifier, i.e $\mu_1(X) < \infty$ et $\mu_2(X) < \infty$, alors la différence : $\mu := \mu_2 - \mu_1$ est une mesure signée.

L'objectif des paragraphes qui suivent est d'établir que toute mesure signée s'écrit de maniére unique comme différence de deux telles mesures, maximales en certain sens.

Tout d'abord, il s'agit de localiser les lieux où μ est ≤ 0, et ceux où elle est ≥ 0.

Définition 1.2 *Un sous-ensemble $N \subset X$ avec $N \subset \mathcal{A}$ est dit négatif pour μ si :*

$$\forall N' \subset N \quad \textit{avec} \ \ N' \in \mathcal{A}, \qquad \mu(N') \leq 0$$

Un sous-ensemble $O \subset X$ avec $O \subset \mathcal{A}$ est dit nul pour μ si :

$$\forall O' \subset O \quad \textit{avec} \ \ O' \in \mathcal{A}, \qquad \mu(O') = 0$$

Un sous-ensemble $P \subset X$ avec $P \subset \mathcal{A}$ est dit positif pour μ si :

$$\forall P' \subset P \quad \textit{avec} \ \ P' \in \mathcal{A}, \qquad \mu(P') \geq 0$$

L'objet du théorème suivant est de capturer de tels ensembles N, O, P, en évitant de mélanger le négatif avec le positif, sans vraiment porter attention sur les nuls.

Théorème 1.1 *Si μ est une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ alors il existe deux sous-ensembles $N \subset X$ et $P \subset X$ avec $N \in \mathcal{A}$ et $P \in \mathcal{A}$ et avec : $N \cup P = X$ et $N \cap P = \emptyset$ tels que N est négatif pour μ , et P est positif pour μ .*

Cette décomposition est essentiellement unique, au sens où pour toute autre telle paire (N', P'), les deux différences symétriques : $N \Delta N' = (N \setminus N') \cup (N' \setminus N)$ et $P \Delta P' = (P \setminus P') \cup (P' \setminus P)$ sont des ensembles nuls pour μ.

Théorème 1.2 (de décomposition de Jordan) *Étant donné une décomposition de Hahn $X = N \cup P$ pour une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ les deux mesures $\mu_- := -\mu\,|_N$ et $\mu_+ := -\mu\,|_P$ satisfont : $\mu = \mu_+ - \mu_-$ et elles ne dépendent pas de la décomposition de Hahn.*

De plus, toute autre paire (v_-, v_+) de mesure ≥ 0 avec $\mu = v_+ - v_-$ telle qu"il existe $E \subset X, E \in \mathcal{A}$, avec : $v_-\,(E) = 0$ et $v_+(X \setminus E) = 0$ coincide avec $\big(\mu_-, \mu_+\big)$

Sans cette condition d'existence de E, il est clair qu'aucune unicité ne peut avoir lieu penser par exemple à $\mu = (\mu_+ + v) - (\mu_- + v)$ où est une mesure quelconque.

Ainsi ,la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ est unique en un certain sens , et on l'appelle la décomposition de Jordan de μ.

2 Intégrale par rapport à une mesure signée

Théorème 2.1 *Pour toute fonction mesurable $f = f_+ - f_-$ sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, où $\mu \geq 0$ est une vraie mesure , telle que $f_- \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, l'application :*

$$\begin{aligned} v_f \quad &: \quad \mathcal{A} \to \left]-\infty, \infty\right] \\ A \quad &\mapsto \quad \int_A f d\mu \end{aligned}$$

est une mesure signée sue $(X, \mathcal{A})$.

Observons que l'hypothèse $\int_X |f_-| \, d\mu = \int_X f_- d\mu < \infty$ garanit que $-\infty < f(A)$ pour tout $A \subset X$ avec $A \subset \mathcal{A}$.

3 Continuité absolue et singularités mutuelles des mesures

Définition 3.1 *Deux mesures signées μ et v sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ sont dites mutuellement singulières s'il existe E, $F \in A$ avec $\emptyset = E \cap F$ tels que, pour tout $A \in \mathcal{A}$: $\quad \mu(A) = \mu(A \cap E)$ et $v(A) = v(A \cap F)$*

Ce qui sera noté : $\mu \perp v$

Ainsi, μ et v sont supportées sur deux ensembles disjoints. Observons que l''on peut remplacer F par $X/E \supset F$, ou E par $X/F \supset E$, sans rien changer à cette définition

Par contraste, on a une deuxième définition

Définition 3.2 *Une mesure signée v est dite absolument continue par rapport à une mesure positive μ si, pour tout $A \in \mathcal{A}$:*

$$v(A) = 0 \Longleftarrow \mu(A) = 0$$

ce qui sera noté :

$$v << \mu$$

Lemme 3.1 *Si une mesure positive μ et une mesure signée v satisfont simultanément $v \perp \mu$ et $v << \mu$ alors $v = 0$*

Preuve. Comme $\mu \perp v$, il existe $E \in A$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \cap E) \ \text{ donc } \ \mu(A \cap E^c) = 0 \\ v(A) &= v(A \cap E^c) \ \text{ donc } \ v(A \cap E^c) = 0 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} v(A) &= v(A \cap E) + v(A \cap E^c) \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

puisque l'hypothèse $v << \mu$ offre :

$$0 = v(A \cap E^c) \Longleftarrow \mu(A \cap E^c) = 0$$

■

La définition d'absolue continuité $v << \mu$ demande seulement que tout ensemble nul pour μ soit aussi nul pour v, et semble n'avoir rien à voir avec la notion classique de continuité. Toutefois, la terminologie est justifiée par un :

Lemme 3.2 *Sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A})$, soit une mesure positive μ, et soit une mesure signée ν telle que $|\nu|(X) < \infty$. Alors :*

$$\nu << \mu \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \ (\forall A \in A \ \mu(A) \leq \delta \implies |\nu(A)| \leq \varepsilon)$$

4 Theoreme de Lebesgue-Radon-Nikodym

Théorème 4.1 (Lebesgue,Radon,Nikodym) *Sur un espace mesurable* $(X, \mathcal{A})$ *muni d'une mesure positive* σ*-finie* $\mu \geq 0$, *soit* ν *une autre mesure, éventuellement signée, avec* $|\nu|$ *aussi* σ*-finie. Alors il existe deux uniques mesures, signées* ν_a *et* ν_s *sur* $(X, \mathcal{A})$ *telles que :*

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \qquad \nu_{a<<}\mu, \qquad \nu_s \perp \mu$$

De plus , il existe une unique fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *integrable au sens étendu, telle que :*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in A$$

Enfin, lorsque $\nu \geq 0$ *est une (vraie) mesure,* $\nu_a \geq 0$ *et* $\nu_s \geq 0$ *sont des mesures, et* $f \geq 0$.

Deuxième partie

Théorème de Girsanov

Ce résultat est fondamental dans la théorie générale de l'analyse de stochastique. Il est trés important dans plusieurs applications et en particulier en économie.

5 Formule de Black Scholes

Ce theoreme exprime la maniere de passer de la probabilité historique décrivant la probabilité qu'un actif sous-jacent prenne dans le futur une valeur donnée à la probabilité risque neutre.

Ainsi il est trés utile pour évaluer la valeur d'un drift du sous-jacent.

Par exemple :

Considérons l'E.D.S $d\xi(t) = dW(t) + b(\xi(t))dt$ en dimension 1 dans le systeme usuel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W(t))$.

On montre que si $b(x)$ est lipschitzienne alors la solution de l'E.D.S est un processus de Markov de diffusion avec la probabilité de transition donnée par :

$$p(s,x,t,A) = \int\limits_A \frac{\Phi(s,x,t,y)}{\sqrt{2n(t-s)}} \exp(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)})dy$$

où

$$\Phi(s,x,t,y) = E\exp\{\int\limits_s^t b(\bar{\xi}_{s,x}(x)dW(x) - \frac{1}{2}\int\limits_s^t b^2(\bar{\xi}_{s,x}(x)dx\}$$

et

$$\bar{\xi}_{s,x}(t) = x + W(t) - W(s)$$

qui est un mouvement Brownien admet la probabilité de transition

$$\tilde{P}(s,x,t,A) = \int\limits_A \frac{1}{\sqrt{2n(t-s)}} \exp(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)})dy.$$

6 Rappelons le résultat de Radon-Nikodym

Théorème 6.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé, une probabilité* Q *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est absolument continue par rapport à* P *i.e,* $\forall A \in \mathcal{F}$

$$Q(A) = \int\limits_A Z(w)dP(w)$$

Z est appelée la densité de φ par rapport à P et est notée $\dfrac{dQ}{dP}$

Inversement, soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé, si l'on a une variable aléatoire positive ou nulle* Z *peut on déduire que :*

$$E(z) = \int\limits_\Omega Z(W)dP(W) = 1$$

i.e., que :

$$P_z(A) = \int\limits_A Z(w)dP(w)$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Plus précisement soit :

$$Z = \exp\left\{ \int\limits_0^T f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^T |f(s)|^2 \, ds \right\}$$

Remarquons que pour que Z soit bien définie, il faut que $f \in L^2_W[0,T]$ et donc $\in L^2_W[0,T] \quad (L^2_W \subset L^1_W)$.

La réponse a cette question est donnée par le résultat suivant.

Théorème 6.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, W(t), P)$ *un systeme usuel.*

Soit $f \in L^2_W[0,T]$ *et supposons que :*

$$E\left[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds)\right] < +\infty \quad (\textit{condition de Novikov})$$

Alors la mesure Q *sur* $\mathcal{F}$ *définie par :*

$$dQ(w) = \exp\left\{\int_0^T f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |f(s)|^2 ds\right\} dP(w)$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$*,i.e*

$$Q(\Omega) = E\left[\exp\left\{\int_0^T f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |f(s)|^2 ds\right\}\right] = 1$$

et de plus on a :

$$E\left[\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |f(s)|^2 ds\right\} \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] = 1 \quad P\text{-}p.s \ \textit{pour tous} \ 0 \le t_1 \le t_2 \le T.$$

Corollaire 6.1 *Pour tout* $f \in L^2_W[0,T]$ *on a :*

$$E\left[\exp\left\{\int_0^T f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |f(s)|^2 ds\right\}\right] \le 1$$

et

$$E\left[\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |f(s)|^2 ds\right\} \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] \le 1 \qquad P-p.s \ \textit{pour tous} \ 0 \le t_1 \le t_2 \le T.$$

7 Transformation du mouvement brownien

Soit le système usuel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, W(t), P)_{t\in[0,T]}$

Rappelons que :

$$\sigma\left(W(s), 0 \leq s \leq t\right) \subset \mathcal{F}_t \quad et \quad \sigma\left(W(s+t) - W(t), 0 \leq s \leq T-t\right)$$

est indépendante de $\mathcal{F}_t$, $\forall t \in [0,T]$, (W : mouvement brownien en dim n)

Théorème 7.1 (Cameron-Martin-Girsanov) *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, W(t), P)_{t\in[0,T]}$ un système usuel et Φ une fonction dans $L^2_W\left[0,T\right]$.*

Définissons :

$$\zeta_s^t\left(\Phi\right) = \int_s^t \Phi\left(u\right) dW\left(u\right) - \frac{1}{2}\int_s^t \left|\Phi\left(u\right)\right|^2 du, \tag{1}$$

$$\tilde{W}\left(t\right) = W\left(t\right) - \int_0^t \Phi\left(s\right) ds, \tag{2}$$

$$d\tilde{P}\left(w\right) = \exp\left[\zeta_0^T\left(\Phi\right)\right] dP\left(w\right). \tag{3}$$

Si

$$\tilde{P}\left(\Omega\right) = 1. \tag{4}$$

Alors $\tilde{W}\left(t\right)$, $0 \leq t \leq T$ est un mouvement bownien dans l'espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}\right)$, i.e, $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{W}(t), \tilde{P}\right)$ est un système usuel.

La démonstration du théorème repose sur les cinq lemmes suivants :

Lemme 7.1 *Si $\Phi \in {L^2}_W\left[0,T\right]$ et $\left|\Phi\left(t\right)\right| \leq c$ $P-p.s$, alors pour tout $\alpha > 1$*

$$E\left\{\exp\left[\alpha\zeta_s^t\left(\Phi\right)\right]\right\} \leq \exp\left[\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\left(t-s\right)c^2\right]. \tag{5}$$

Preuve. D'après le **corollaire1**, on a $E\exp\left[\zeta_s^t\left|\alpha\Phi\right|\right]\leq 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} E\exp\left[\alpha\zeta_s^t\left(\Phi\right)\right] &= E\exp\left[\zeta_s^t\left|\alpha\Phi\right|\right]\exp\left[\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\int_s^t\left|\Phi\left(u\right)\right|^2du\right] \\ &\leq E\exp\left[\zeta_s^t\left|\alpha\Phi\right|\right]\exp\left[\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\left(t-s\right)c^2\right] \\ &\leq \exp\left[\frac{\alpha^2-\alpha}{2}\left(t-s\right)c^2\right] \end{aligned}$$

■

Lemme 7.2 *Soit* $\Phi\in L^2{}_W\left[0,T\right]$. *Alors pour toute variable aléatoire* $\mathcal{F}_t-$*mesurable positive ou nulle* η, *on a :*

$$\tilde{E}\eta\leq E\left\{\eta\exp\left[\zeta_s^t\left(\Phi\right)\right]\right\},\quad 0\leq t\leq T. \tag{6}$$

De plus si Φ *est t.q (4) est vérifiée, alors :*

$$E\exp\left[\zeta_s^t\left(\Phi\right)\right]=1, \tag{7}$$

$$E\left\{\exp\left[\zeta_s^t\left(\Phi\right)\right]\mid\mathcal{F}_s\right\}=1, \tag{8}$$

$P-p.s$ *et* $0\leq s<t\leq T$,

$$\tilde{E}\eta=E\left\{\eta\exp\left[\zeta_0^t\left(\Phi\right)\right]\right\} \tag{9}$$

$\forall\eta$ *variable aléatoire* $\mathcal{F}_t-$*mesurable t.q* $\tilde{E}\eta<+\infty$

Preuve.

$$\begin{aligned} \tilde{E}\eta &= E\eta\exp(\zeta_0^T(\Phi))=EE\left\{\eta\exp(\zeta_0^T(\Phi)\mid\mathcal{F}_t\right\} \\ &= E\eta\exp[\zeta_0^T(\Phi)]E\left\{\exp(\zeta_t^T(\Phi))\mid\mathcal{F}_t\right\} \\ &\leq E\eta\exp[\zeta_0^T(\Phi)] \end{aligned}$$

■

Supposons maintenant que l'on ait l'égalité (4). D'aprés **le corollaire** 1, on a :

$$\begin{aligned} 1 &= E\exp\left[\zeta_0^T(\Phi)\right] = E\exp\left[\zeta_0^s(\Phi)\right] E\left\{\exp\zeta_s^t(\Phi)\ E\left[\exp(\zeta_t^T(\Phi)) \mid \mathcal{F}_t\right] \mid \mathcal{F}_s\right\} \\ &\leq E\exp\left[\zeta_0^s(\Phi)\right] E\left\{\exp\left[\zeta_s^t(\Phi)\right] \mid \mathcal{F}_s\right\} \end{aligned}$$

Notons par B_m $(m \geq 0)$ l'ensemble t.q

$$B_m = \left\{w : E\left\{\exp\left[\zeta_t^s(\Phi)\right] \mid \mathcal{F}_s\right\} \leq 1 - \frac{1}{m}\right\}$$

Comme, d'après **le corollaire** 1,

$$E\left\{\exp\left[\zeta_s^t(\Phi)\right] \mid \mathcal{F}_s\right\} \leq 1 \quad P\text{-p.s}$$

on obtient

$$1 \leq \int\limits_{\Omega\setminus B_m} \exp\left[\zeta_0^s(\Phi)\right] dP + (1 - \frac{1}{m}) \int\limits_{B_m} \exp\left[\zeta_0^s(\Phi)\right] dP$$

Mais, comme

$$\int\limits_{\Omega} \exp\left[\zeta_0^s(\Phi)\right] dP \leq 1 \text{ et } \exp\zeta_0^s(\Phi) \geq 0 \qquad P - p.s,$$

on obtient $P(B_m) = 0$ puisque l'on a

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int\limits_{\Omega} \exp\left[\zeta_0^s(\Phi)\right] dP - \frac{1}{m} \int\limits_{B_m} \exp\left[\zeta_0^s(\Phi)\right] dP \\ &\leq 1 - \frac{1}{m} \int\limits_{B_m} \exp\left[\zeta_0^s(\Phi)\right] dP. \end{aligned}$$

Donc

$$\int\limits_{B_m} \exp\left[\zeta_0^s(\Phi)\right] dP \Longrightarrow P(B_m) = 0 \quad (\text{car} \exp \zeta_0^s(\Phi) > 0)$$

Maintenant, comme m est arbitraire, l'assertion (1,8) est vérifiée.

Ainsi (1,7) se déduit directement de (1,8) , pour (1,9) on a :

$$\begin{aligned} \tilde{E}\eta &= E\eta \exp\left[\zeta_0^t(\Phi)\right] E\left\{\exp\left[\zeta_0^T(\Phi)\right] \mid \mathcal{F}_t\right\} \\ &= E\eta \exp\left[\zeta_0^t(\Phi)\right]. \end{aligned}$$

Lemme 7.3 *Soit* $\Phi \in L_W^2\,[0,T]$ *et* η *une variable aléatoire* $F_t -$*mesurable t.q* $\tilde{E}\eta < +\infty$. *Alors*

$$\tilde{E}[\eta \mid \mathcal{F}_S] = E\left\{\eta \exp\left[\zeta_s^t(\Phi)\right] \mid \mathcal{F}_s\right\}$$

Preuve. *Posons* $\gamma_1 = \exp[\zeta_0^s(\Phi)]$, $\gamma_2 = \exp[\zeta_s^t(\Phi)]$. *Soit* f *toute variable aléatoire* $\mathcal{F}_s -$ *mesurable. Alors :*

$\tilde{E}(f\eta) = \tilde{E}[f\tilde{E}(\eta \mid \mathcal{F}_s)]$. *Aussi nous avons :* $\tilde{E}(f\eta) = E[f\eta\gamma_1\gamma_2] = E[f\gamma_1 E(\eta\gamma_2 \mid \mathcal{F}_s)]$

Comme $\forall\gamma$ $\mathcal{F}_s -$ *mesurable on a*

$$E\gamma = E[\gamma E(\gamma_2 \mid \mathcal{F}_s)] \overset{d'ap\acute{e}s\ \textbf{le lemme 2}}{=} E[E(\gamma\gamma_2\mathcal{F}_s)] = E\gamma\gamma_2$$

Et donc on a

$$\tilde{E}(f\eta) = E[f\gamma_1\gamma_2 E\left\{\eta\gamma_2 \mid \mathcal{F}_S\right\}] = \tilde{E}[fE\left\{\eta\gamma_2 \mid \mathcal{F}_S\right\}]$$

D'où

$$\tilde{E}[f\tilde{E}(\eta \mid \mathcal{F}_s)] = \tilde{E}[fE\left\{\eta\gamma_2 \mid \mathcal{F}_S\right\}]$$ *et comme ceci est vrai* $\forall f$ $\mathcal{F}_s -$ *mesurable*

on a

$$\breve{E}(\eta \mid \mathcal{F}_s) = E\left\{\eta\gamma_2 \mid \mathcal{F}_S\right\} \quad \blacksquare$$

Lemme 7.4 *Soit* $\Phi \in L_W^2[0,T]$ *et* $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ *une suite bornée* $\in L_W^2[0,T]$ *t.q :* $\zeta_s^t(\Phi_n) \overset{n\longrightarrow\infty}{\Longrightarrow}$

$\zeta_s^t(\Phi)\ P - p.s$

Alors

$$\int\limits_{\Omega} \left(\exp \zeta_s^t(\Phi_n) - \exp \zeta_s^t(\Phi)\right) dP \longrightarrow 0 \ si\ n \longrightarrow \infty$$

Preuve. D'apés **le théorème** 1 (condition de Novicov vérifiée pour Φ_n) on a $\int_\Omega \exp \zeta_s^t(\Phi_n) dP = 1$

Notons

$$\Omega_{n,\varepsilon} = \left\{ W : \left| \exp \int\limits_s^t (\Phi_n) - \exp \int\limits_s^t (\Phi) \right| < \varepsilon \right\}$$

On a :

$$\int\limits_{\Omega_{n,\varepsilon}} \exp \zeta_s^t(\Phi_n) dP > 1 - 2\varepsilon$$

il s'ensuit alors

$$\int\limits_{\Omega \backslash \Omega_{n,\varepsilon}} \exp \zeta_s^t(\Phi_n) dP \leq 2\varepsilon$$

et

$$\int\limits_{\Omega \backslash \Omega_{n,\varepsilon}} \exp \zeta_s^t(\Phi) dP \leq \varepsilon$$

On en déduit le résultat. ■

8 Démonstration du théorème

Puisque $\tilde{W}(t)$ est un processus continu, il suffit de montrer que, $\forall\ 0 \leq s \leq t \leq 1$, on a :

i. $\tilde{E}(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(1) \mid \mathcal{F}_s) = 0 \quad \tilde{P} - p.s$

ii. $\tilde{E}[((\tilde{W}_h(t) - \tilde{W}_h(1))^2 \mid \mathcal{F}_s] \mid \mathcal{F}.s \quad \tilde{P} - p.s$

A). On commence par les vérifiès, lorsque : $\Phi(t)$ est borné $\in L_W^2[0,1]$

$$\bigstar\begin{cases} \int_{t_0}^{t} f(s)dW(s)\int_{t_0}^{t} g(s)dW(s) = \int_{t_0}^{t} f(s)g(s)ds + \int_{t_0}^{t}\left\{\int_{t_0}^{s} g(u)dW(u)\right\} f(s)dW(s) + \int_{t_0}^{t}\left\{\int_{t_0}^{s} f(u \\ \int_{t_0}^{t} f(s)dW(s)\int_{t_0}^{t} h(s)ds = \int_{t_0}^{t}\left\{\int_{t_0}^{s} h(u)du\right\} f(s)dW(s) + \int_{t_0}^{t}\left\{\int_{t_0}^{s} f(u)dW(u)\right\} \end{cases}$$

pour $f, g \in L_W^2[t_0, t]$ et $h \in L_W^1[t_{0,}t]$

En appliquant la formule d'Itô à $u(x) = \exp(x)$ et le processue $\underbrace{\int_{t1}^{t} f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_{t1}^{t} |f(s)|^2\, ds}_{\zeta_{t_1}^t(\Phi)}$

i.e

$$\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |f(s)|^2\, ds\right\} - 1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\exp\left\{\int_{t_1}^{t} f(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t} |f(s)|^2\, ds\right\} f(t)dW(u)\right]$$

On a :

$$\exp \zeta_{t_1}^{t_2}(\Phi) = 1 = \int_{t_1}^{t_2} \exp(\zeta_{t_1}^{t_2}(\Phi))\Phi(u)dW(u)$$

Ainsi, d'aprés **le lemme** 7, on a :

$$\tilde{E}[\tilde{W}(t) - \tilde{W}(s) \mid \mathcal{F}_s] = E\left\{[W(t) - W(s)]\exp(\zeta_s^t(\Phi)) \mid \mathcal{F}_s\right\}$$

et en utilisant ($\bigstar$)

$$= E\left\{[W(t) - W(s)](1 + \int_{s}^{t} \exp(\zeta_s^u(\Phi))\Phi(u)dW(u)) \mid \mathcal{F}_s\right\}$$

et le fait que : $E[\int_{s}^{t} h(u)dW(u) \mid \mathcal{F}_s] = 0$ si $E\int_{s}^{t} |h(u)|^2 du < \infty$ (i.e $h \in M_W^2[s, t]$)

En posant

$$h(u) = \int_s^u \exp(\zeta_s^v(\Phi))\Phi(v)dW(v)$$

On montre que $h(.) \in M_W^2[s,t]$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\tilde{E}[\tilde{W}(t) - \tilde{W}(s) \quad | \quad \mathcal{F}_s] &= E(W(t) - W(s) \mid \mathcal{F}_s) + E\left\{((W(t) - W(s))\int_s^t \exp(\zeta_s^u(\Phi))\Phi(u)dW(s) \mid \mathcal{F}_s\right\} \\
&= 0 + \underbrace{E\left\{W(t) - W(s) \mid \mathcal{F}_s\right\}}_{=0} \underbrace{E\left\{\int_s^t \exp|\zeta_s^u(\Phi)\Phi(u)dW(u) \mid \mathcal{F}_s\right\}}_{=0} \\
&= 0, \text{ d'où (i).}
\end{aligned}$$

On fait de même pour (ii).

<u>B) Soit $\Phi \ \in L_W^2[0,T]$</u> :

Considerons $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ suite $\in L_W^2[0,T]$ bornée tq :

$$\int_0^T |\Phi_n(t) - \Phi(t)|^2 \, dt \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad P - p.s$$

Définissons $\tilde{W}_n(t)$ par :

$$\tilde{W}_n(t) = W(t) - \int_s^t \Phi_n(u)du$$

Notons que l'on a $\tilde{W}_n(t) \longrightarrow W(t)$ P-p.s, où $(\tilde{W}_n(t))_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien dans $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}_n)$ d'où

$$\tilde{E}\left\{\exp[i\lambda(\tilde{w}_n(t) - \tilde{W}_n(s)] \mid \mathcal{F}_s\right\} = \exp(-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)) \qquad P - p.s$$

$$(E\left\{\exp[i\lambda(\tilde{W}_n(t)-\tilde{W}_n(s)]\exp(\zeta_s^t(\Phi_n))\mid\mathcal{F}_s\right\}) \qquad (\blacksquare)$$

Rappelons que : Si $\alpha_n \to \alpha$ P-p.s, avec $|\alpha_n| \leq k$ (k const) et $E|\beta_n - \beta| \longrightarrow 0$. Alors $E|\alpha_n\beta_n - \alpha\beta| = 0$.

En effet

$$\begin{aligned} E|\alpha_n\beta_n-\alpha\beta| &\leq E|\alpha_n||\beta_n-\beta|+E|\alpha_n-\alpha||\beta| \\ &\leq c\;E|\beta_n-\beta|+E|\alpha_n-\alpha||\beta| \\ &\leq \underset{\text{par hypothèse}}{(\longrightarrow 0)} + \underset{\text{th C.D.L}}{(\longrightarrow 0)} \end{aligned}$$

Prenons $\alpha_n = \exp[-i\lambda(\tilde{W}_n(t)-\tilde{W}_n(s)]$, $\beta_n = \exp\left(\zeta_s^t(\Phi_n)\right)$

Ainsi, faisons prendre $n\to\infty$ dans ($\blacksquare$), on obtient

$$\tilde{E}\left\{\exp[i\lambda(\tilde{W}(t)-\tilde{W}(s)]\exp\left[\zeta_s^t(\Phi)\mid\mathcal{F}_s\right]\right\} = \exp\left[-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)\right]$$

Ceci implique que $(\tilde{W}(t))_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien dans $(\Omega,\mathcal{F},\tilde{P})$ verifiant

$$\begin{aligned} &\tilde{E}[\tilde{W}(t)-\tilde{W}(s) \mid \mathcal{F}_s]=0 \\ &\tilde{E}[(\tilde{W}(t)-\tilde{W}(s))^2 \mid \mathcal{F}_s]=t-s \qquad\qquad 0\leq s<t\leq T \end{aligned}$$

9 Formule de Girsanov

Soit un système usuelle $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P,u(t))_{t\in[0,T]}$ tel que :

$$\sigma\left(W(u),\ u\leq t\right)\subset\mathcal{F}_t \qquad 0\leq t\leq T \qquad \text{(i)}$$

$\forall 0\leq s\leq t\leq T$,

$$\begin{aligned} E\left[W(t)-W(s)\mid\mathcal{F}_s\right] &= 0 \qquad \text{(ii)} \\ E\left[(W(t)-W(s))^2\mid\mathcal{F}_s\right] &= t-1 \end{aligned}$$

Soit $\Phi(t)$ comme dans le théorème de C.M.G , nous avons obtenu un système usuel $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{P}, \tilde{W}(t)\right)_{t\in[0,T]}$ où : $P << \tilde{P}$.

Ainsi

$$f \in L^2_W [0,T] \Longrightarrow f \in L^2_{\tilde{W}} [0,T]$$

et on a

$$\int_0^t f(s)dW(s) = \int_0^t f(s)d\tilde{W}(s) + \int_0^t f(s)d\Phi(s) \qquad P.p.s \text{ (ou bien } \tilde{P}.p.s)$$

Théorème 9.1 *Soit $X(t)$, $t \in [0,T]$ un processus stochastique (d'Ito) dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W(t))$ défini par :*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s) \qquad 0 \leq t \leq T$$

où $b \in L^1_W [0,T]$ et $\sigma \in L^2_W [0,T]$

Soit $\Phi \in L^2_W [0,T]$ et posons

$$\begin{aligned}
\zeta_s^t(\Phi) &= \int_s^t \Phi(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_s^t |\Phi(u)|^2 du, \\
\tilde{W}(t) &= W(t) - \int_0^t \Phi(s)ds, \\
d\tilde{P}(\omega) &= \exp\left[\zeta_0^T(\Phi)\right] dP(\omega)
\end{aligned}$$

Supposons que $\tilde{P}(\Omega) = 1$.

Alors $X(t), t \in [0,T]$ est un processus stochastique (d'Ito) dans le système usuel $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{P}, \tilde{W}(t)\right)$ tel que :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \tilde{b}(s)ds + \int_0^t \sigma(s)d\tilde{W}(s)$$

où

$$\tilde{b}(t) = b(t) + \sigma(t)\Phi(t)$$

La démonstration est immédiate d'après le théorème 4.

Soit C_T^0 l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu M_T : tribu engendrée par des ensembles $[x(t) \in A]$ où $0 \leq t \leq T$ et $A \leq B$. $A \in B$: tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.

On sait qu'un p.s $\xi(t)$, $t \in [0,T]$ dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ induit une mesure de probabilité P_ξ sur (C_T^0, M_T) définie comme suit :

$$P_\xi(B) = P\{\omega, \xi(\omega,.) \in B\}, \qquad B \in M_T$$

en particulier, on a :

$$P_\xi\{x(.) : x(t_1) \in A_1, ..., x(t_k) \in A_k\} = P\{\omega : \xi(t_1, w) \in A_1, ..., \xi(t_k, \omega) \in A_k\}$$

$0 \leq t_1 \leq ..... \leq t_k \leq T$, $A_i \in B$,$\forall i \in B$, $\forall i = 1, ..., k$

Supposons que Q est une autre probalité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ donnée par :

$$dQ(\omega) = \rho(\omega) dP(\omega)$$

ainsi on a :

$$\int_\Omega \rho(\omega) dP(\omega) = 1$$

et définissons

$$Q_\xi(B) = Q\{\omega, \xi(\omega,.) \in B\} \text{ , } B \in M_T.$$

On montre alors que :

$$Q_\xi(B) = \int_B \rho(\omega) dP(\xi(\omega,.)) \qquad , \forall B \in M_T$$

i.e.

$$\frac{dQ_\xi}{dP_\xi}(\xi(\omega,.)) = Q(\omega)$$

et on a

$$Q_\xi << P_\xi$$

10 Application :

1- Soient deux E.D.S :

$$d\xi(t) = b(t,\xi(t))dt + \sigma(t,\xi(t))dW(t) \tag{1}$$

et

$$d\tilde{\xi}(t) = \tilde{b}(t,\tilde{\xi}(t))dt + \sigma(t,\tilde{\xi}(t))dW(t) \tag{2}$$

dans l'espace usuel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W(t))$.

Supposons que les conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution sont vérifiées, i.e : $b(t,x)$, $\tilde{b}(t,x)$, $\sigma(t,x)$ sont mesurable dans $[0,T]\times\mathbb{R}$ et vérifient la condition de croissance, i.e :

$|b(t,x)|$, $\left|\tilde{b}(t,x)\right|$ et $|\sigma(t,x)|$ sont inférieurs ou égales à $k\,|1+|x||$, k =cste, et de plus la condition de Lipschitz :

$$\begin{aligned} |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| &\leq k_1\,|x-y|\,, \\ \left|b(t,x)-\tilde{b}(t,y)\right| &\leq k_1\,|x-y| \;\;,\quad k_1 = \text{cste} \qquad x,y\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \Psi\,(t,x) &= \sigma^{-1}(t,x)\left[\tilde{b}(t,x)-b(t,x)\right] \\ \Phi(t) &= \Psi(t,\xi(t)) \end{aligned}$$

Considérons la solution $\xi(t)$ de (1).

Supposons que :

$$E\left(\exp\left[\mu\Phi(t)\right]^2\right) \leq C, \quad 0 \leq t \leq T, \;\; \mu > 0 \text{ et } C > 0$$

D'aprés le théorème 10 (Formule de Girsanov), on obtient :

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \tilde{b}(s,\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(s,\xi(s))d\tilde{W}(s) \tag{3}$$

dans le système usuel $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{P}, \tilde{W}(t)\right)$, où

$$d\tilde{P}(w) = \exp\left[\int_0^T \Phi\left(u\right) dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \left|\Phi\left(u\right)\right|^2 du\right] dP(w)$$

et

$$\tilde{W}(t) = W(t) - \int_0^t \Phi(u)du.$$

Ainsi, on remarque que :

$\xi(t)$ solution de (3) dans $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{P}, \tilde{W}(t)\right)$ et $\tilde{\xi}(t)$ solution de (2) dans $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \tilde{P}, \tilde{W}(t)\right)$ ont la meme loi.

Autrement dit, si on pose $\tilde{\xi}\ (0) = \xi(0) = x$, alors

$\tilde{P}_\xi = P_{\tilde{\xi}}$ dans (C_T^0, M_T), .i.e,

$$\tilde{P}\left\{W : \xi(w_i) \in B\right\} = P_{\tilde{\xi}}\left\{W : \tilde{\xi}\ (w,.) \in B\right\}, B \in M_T$$

Ainsi nous obtenons le résultat suivant :

Soient $\xi(t)$ solution de (1) et $\tilde{\xi}(t)$ sol de (2) toutes deux dans le même espace usuel $(\Omega, \mathcal{F}, P, W_n)$ avec $\xi(0) = \tilde{\xi}(0) = x$. *P.p.s.*

Notons $P_\xi(B) = P\left\{W : \xi(w_i) \in B\right\}$ et $P_{\tilde{\xi}}(B) = P\left\{W : \tilde{\xi}(w_i) \in B\right\}$, $B \in M_T$

les mesures images de P par rapport à $\xi(t)$ et $\tilde{\xi}(t)$ respectivement dans (C_T^0, M_T).

Si la fonction $\Phi(t) = \Psi(t, \xi(t))$ où $\Psi(t,x) = \sigma^{-1}(t,x)[\tilde{b}(t,x) - b(t,x)]$

verifie la condition de Novikov, alors on a :

$$\frac{dP_{\tilde{\xi}}}{dP_{\xi}}(\xi(w,s)) = \exp\left[\int_0^T \Phi(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^T |\Phi(u)|^2 du\right].$$

Exemple

Black et Scholes, application de Itô et Girsanov au pricing

On considère le marché financier de taux instantanée sans risque $r \geq 0$ et comprenant un actif risqué S définie par :

$$S_t = se^{(a-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$$

ou $s, \sigma \succ 0$ et W_t un mouvement brownien

On se place sous les hypothèses du théorème du Girsanov pour avoir la solution de ce problème

1- On considère un portefeuille pour lequel on note ϕ_t la quantité d'actif S détenue en t

Tout d'abord, on a pour tout instant t, $Y_t - \phi_t S_t$ investis sans risque et $\phi(t)$ investie sur S_t alors la dynamique de la richesse est donnée par

$$dY_t = (Y_t - \phi_t S_t)rdt + \phi(t)dS_t \tag{1}$$

Comme Y_t est à trajectoire continue , la dynamique de la richesse actualisée est donnée en intégrant l'équation (1) et en appliquant le processus d'Itô avec $f(t,x) = xe^{-rt}$ on obtient :

$$d\tilde{Y_t} = \phi(t)d\tilde{S}_t \tag{2}$$

où,

$$\tilde{S}_t = se^{(a-r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$$

et on veut trouver une mesure Q sous la quelle il existe un mouvement brownien

B_t et $\lambda \in \mathbb{R}$ tq :

$$\tilde{S}_t = se^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$$

sachant que si B_t est un mouvement brownien pour tout $\lambda, s \in \mathbb{R}$, $se^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$ est une martingale

En appliquant le théorème de Girsanov pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $(W_t - \mu t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien sous la mesure

$$dQ = e^{\mu W_T - \frac{\mu^2}{2}T}$$

d'ou $\mu = \frac{r-a}{\sigma}$

donc $dQ = e^{\frac{r-a}{\sigma}W_T - \frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}T} dP$ est la mesure voulu

A cause des résultats précédantes $dQ = e^{\frac{r-a}{\sigma}W_T - \frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}T} dP$ et $\tilde{W} := W_t + \frac{a-r}{\sigma}t$, $\tilde{W}$ est un mouvement brownien

ce qui nous donne aussi que le marché est viable

On a aussi $W_t - \mu t = \tilde{W}_t$ d'ou, $\tilde{S}_t = se^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$ et en utilisant le processus d'Ttô pour la fonction

$f(t, \tilde{x}) = se^{\sigma \tilde{x} - \frac{\sigma^2}{2}t}$ on obtient

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t \tag{3}$$

2- On considère maintenant un actif payant $G = g(S_t)$ au temps T , avec g fontion continue .On admettra qu'il existe une fontion $f(t,x)$ de classe C^2 sur $[0,T]\mathbb{R}$ tq : $f(T,x) = e^{-rT}g(e^{rt}x)$ et qui soit solution de l'EDP :

$$\partial_t f + x^2 \frac{\sigma^2}{2} \partial_{x,x} f = 0 \tag{4}$$

On cherche a trouver un processus $\phi(t)$ tq :$\exists$ Y$_t$ satisfaisant $Y_T = G$ et

$$dY_t = (Y_t - \phi_t S_t)rdt + \phi(t)dS_t \tag{5}$$

Ceci équivalent à l'équation 2, en posant $\tilde{Y}_t = e^{-rt}Y_t$, alors $\exists$ un processus $\tilde{Y}_t$ tq :$\tilde{Y}_t = Ge^{-rt}$ et

$$d\tilde{Y}_t = \phi(t)d\tilde{S}_t \tag{6}$$

en posant $\tilde{Y}_t = f(t, \tilde{S}_t)$, une fonction $f(t,x)$ de classe C^2 tq : $f(T, \tilde{S}_T) = Ge^{-rt}$ et $df(t, \tilde{S}_t)$ soit proportionnel à $d\tilde{S}_t$ la première condition est équivalente à $f(T, e^{-rt}S_T) = g(S_T)e^{-rt}$,i.e $f(T,x) = e^{-rT}g(e^{rT}x)$

$$\partial_t f + x^2 \frac{\sigma^2}{2}\partial_{x,x} f = 0$$

de plus dans ce cas $df(t, \tilde{S}_t) = \partial_x f(t, \tilde{S}_t)d\tilde{S}_t$ alors la stratégie de couverture est donnée par :

$$\phi(t) = \partial_x f(t, \tilde{S}_t) \tag{7}$$

On note toujours Y_t la valeur en t , du portefeuille répliquant G .On sait que le processus $\tilde{Y}_t$ qui en t vaut la valeur actualisée en 0 du portefeuille à l'instant t , vaut

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_0 + \int_0^t \phi(t)d\tilde{S}_t \tag{8}$$

ou $\phi(t)$ désigne la quantité de l'actif S détenue à l'intant t

Or on a $d\tilde{W}_t = \frac{d\tilde{S}_t}{\sigma \tilde{S}_t}$, donc

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_0 + \int_0^t \phi(t)\sigma\tilde{S}_t d\tilde{W}_t \tag{9}$$

On en déduit que $\tilde{Y}_t$ est une martingale sous Q . Ainsi ,Y_t la valeur en t de l'option payant G en T , est donnée par

$$Y_t = e^{rt}\tilde{Y}_t = e^{rt}E_Q(\tilde{Y}_T/F_t) = e^{rt}E_Q(g(S_T)e^{-rT}/F_t)$$

La formule de Bayes permet d'exprimer Y_t avec l'éspèrance sous P.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Friedman, Stochastic Differential Equations and Applicaton, Academic Press, Inc, New-York, 1975

[2] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985