# TABLE DES MATIÈRES

# 1 Introduction

Dans ce travail, nous allons étudier la notion des équations différentielles stochastiques, à cet effet nous devons d'abord rappeler les notions de base sur le calcul stochastique en dimension finie qui vont nous permettre de les étudier. Nous commençons ainsi par introduire la notion des processus stochastiques et des martingales, ensuite nous définissons le mouvement brownien afin d'introduire la notion de l'intégrale stochastique d'Ito qui nous permet de donner un sens aux équations différentielles stochastiques dont nous donnons les théorèmes de l'existence et l'unicité de la solution.

# 2 Notions de base

## 2.1 Notations et définitions

**Définition 2.1** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable. On appelle mesure sur* $\mathcal{F}$ *toute fonction* $\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$*, non identiquement égale à* $+\infty$ *et* $\sigma-$*additive, i.e., pour toute suite disjointe* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $(A_n \cap A_m = \varnothing$ *pour tout* $n \neq m)$*, on a*

$$\nu(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ est appelé espace mesuré et si $\nu(\Omega) = 1$, $\nu$ est dite mesure de probabilité et $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ est appelé espace probabilisé.

**Définition 2.2** *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* $(E, \Sigma)$ *deux espaces mesurables. Une application* $X : \Omega \longrightarrow E$ *est dite* $(\mathcal{F}, \Sigma)-$ *mesurable si*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \qquad \forall A \in \Sigma.$$

*$f$ est dite aussi variable aléatoire.*

- Si $\Sigma$ est une tribu borélienne, on écrira simplement $X$ est $\mathcal{F}$-mesurable.
- Si $\mathcal{F}$ et $\Sigma$ sont des tribus boréliennes, alors la fonction $X$ est dite simplement borélienne.

**Définition 2.3** *Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \Sigma)$ une variable aléatoire.*

*On appelle mesure image de $\mathbb{P}$ sur $\Sigma$ par rapport à $X$, la mesure $\mathbb{P}_X$ définie par*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{w : X(w) \in B\}), \qquad B \in \Sigma.$$

- Rappelons que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ par rapport à $\mathbb{P}$ est donnée par $\int_\Omega X(w)d\mathbb{P}$, notée $\mathbb{E}(x)$.

**Définition 2.4** *Si $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, l'espérance conditionnelle de $X$ sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$, $\mathcal{G}$-mesurable sur $\Omega$ telle que*

$$\int\limits_B X d\mathbb{P} = \int\limits_B \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P}, \qquad \forall B \in \mathcal{G}.$$

## 2.2 Processus stochastiques

Dans toute la suite, on supposera donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

**Définition 2.5** *On appelle processus stochastique toute famille de variables aléatoires $(\xi(t), t \in I)$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \Sigma)$ où $I = \mathbb{R}_+$.*

– *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \to \xi_\omega(t)$ de $I$ dans $E$ est appelée trajectoire du processus.*

– *Nous disons qu'un processus stochastique est continu si pour presque tout $\omega$, ses trajectoires sont continues, i.e.,*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : t \mapsto \xi_\omega(t),\ t \in I \quad \textit{continue}\} = 1.$$

## 2.3 Martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ un espace probabilisé filtré où la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, i.e.,

$$\forall s, t \in \mathbb{R}^+, \qquad s \leq t \Longrightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

**Définition 2.6** *Un processus stochastique $(\xi(t), t \geq 0)$ $\mathcal{F}_t$-adapté vérifiant $\mathbb{E}(\xi(t)) < \infty$, est dit*

1. $\mathcal{F}_t-$*martingale si*

$$\mathbb{E}(\xi(t) \mid \mathcal{F}_s) = \xi(s), \qquad \forall\ 0 \leq s \leq t.$$

2. $\mathcal{F}_t-$*sous martingale si*

$$\mathbb{E}(\xi(t) \mid \mathcal{F}_s) \geq \xi(s), \qquad \forall\ 0 \leq s \leq t.$$

3. $\mathcal{F}_t-$*sur martingale si*

$$\mathbb{E}(\xi(t) \mid \mathcal{F}_s) \leq \xi(s), \qquad \forall\ 0 \leq s \leq t.$$

- Si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^\xi$, alors le processus $\xi(t)$ est dit simplement une martingale (resp. sous martingale et sur martingale).

## 2.4 Mouvement brownien

Le mouvement brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste Robert Brown en 1828. Ce mouvement "aléatoire", dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules d'eau, entraîne la dispersion ou diffusion du pollen dans l'eau. Le champ d'application du mouvement brownien est beaucoup plus vaste que l'étude des particules microscopiques en suspension et inclut la modélisation du prix des actions, du bruit thermique dans les circuits électriques, du comportement limite des problèmes de files d'attente et des perturbations aléatoires dans un grand nombre de systèmes physiques, biologiques ou économiques.

Bachelier (1900) a obtenu les premiers résultats quantitatifs en s'intéressant aux fluctuations du prix des actions en économie. Einstein (1905) a obtenu la densité de probabilité de transition du mouvement brownien à partir de la théorie moléculaire de la chaleur. Le premier traitement mathématique rigoureux est dû à Wiener $(1923, 1924)$, qui a prouvé l'existence du brownien.

**Définition 2.7** *Un processus stochastique $(W(t), t \geq 0)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est appelé mouvement brownien (ou processus de Wiener) s'il vérifie les propriétés*

(1) *les trajectoires $t \rightsquigarrow W_t(\cdot)$ sont continus $\mathbb{P}$-p.s.,*

(2) $W(0) = 0$,

(3) *Pour tous $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n$, les variable aléatoires $W(t_k) - W(t_{k-1})$, $(0 \leq k \leq n)$ sont indépendantes,*

(4) *Pour tous $0 \leq s \leq t$, on a*

$$\mathbb{E}\left[W(t) - W(s)\right] = (t-s)\mu,$$

$$\mathbb{E}\left[(W(t) - W(s))^2\right] = (t-s)\sigma^2,$$

*où $\mu$ et $\sigma$ sont des constantes réelles positives avec $\sigma \neq 0$.*

- $\mu$ est appelé le drift et $\sigma^2$ la variance.

- Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, le mouvement brownien est dit standard ou normalisé.

Notons que

1. Tout mouvement brownien peut se ramener à un mouvement brownien standard en considérant le processus

$$\frac{W(t) - \mu t}{\sigma}.$$

Ainsi, dans toute la suite, nous ne considérons que le mouvement brownien normalisé.

2. Un processus $W(t) = (W_1(t), \cdots, W_n(t))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dit mouvement brownien si chaque processus $W_i$ est un mouvement brownien et les $\sigma(W_i(t), t \geq 0)$, $i = 1, \cdots, n$ sont indépendantes.

3. Le mouvement browien est un processus de Markov avec la probabilité de transition

$$Q(s, x; t, B) = \int\limits_B \frac{1}{(2\pi(t-s))^{1/2}} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{t-s}\right] dy, \qquad s < t, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

4. Le mouvement brownien est à variation non bornée sur tout intervalle finie.

5. Le mouvement brownien n'est dérivable en aucun point.

6. Les trajectoires du mouvement brownien sont localement Hölder-continues d'ordre $\alpha < 1/2$.

# 3 Intégrale stochastique ( Intégrale d'Ito )

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire qui sert de modèle pour des phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été gêné par la non différentiabilité du mouvement brownien. Du coup, on a commencé par construire une intégrale par rapport au mouvement brownien, pour ensuite définir la notion d'équation différentielle stochastique. Ainsi, il faut donner un sens à l'intégrale

$$I(t) = \int_0^t f(s)dW(s),$$

où $(W(t), t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, $t \in [0, T]$ et $f\ (t)$ est une fonction stochastique.

Nous allons rappeler la définition de l'intégrale stochastique introduite par Itô en introduisant les définitions suivantes.

**Définition 3.1** *Une classe de fonction $f : [\alpha, \beta] \times \Omega \to \mathbb{R}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ est dite nonanticipative relativement à $\mathcal{F}_t$, $t \in [\alpha, \beta]$, si*

*$(i)$ $f\ (t)$ est un processus séparable,*

*$(ii)$ $f\ (t)$ est un processus progressivement mesurable,i.e., $(t, \omega) \to f(t, \omega)$ est mesurable,*

*$(iii)$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $f(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

**Définition 3.2** *Un processus $f(t), t \in [\alpha, \beta]$ est dit processus élémentaire (étagé) s'il existe une partition $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = \beta$ dans $[\alpha, \beta]$ telle que*

$$f(t) = f(t_i) \qquad si \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \qquad i = 0, \cdots, r-1.$$

Notons par

$$L_W^p[\alpha, \beta] = \left\{ \begin{array}{l} f \text{ nonanticipatives} : \mathbb{P}\left[\int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt < \infty\right] = 1, \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \\ \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\underset{\alpha \leq t \leq \beta}{ess\sup} |f(t)| < \infty\right) = 1 \qquad \text{si} \qquad p = \infty \end{array} \right\}. \tag{1}$$

et

$$M_W^p[\alpha,\beta]=\left\{\begin{array}{ll} f\in L_W^p[\alpha,\beta]:\mathbb{E}\left[\int_\alpha^\beta|f(t)|^p\,dt\right]<\infty, & \text{si}1\leq p<\infty \\ \text{et}\quad \mathbb{E}\left(\underset{\alpha\leq t\leq\beta}{ess\sup}|f(t)|\right)<\infty & \text{si}\quad p=\infty. \end{array}\right\}. \tag{2}$$

On commence d'abord par définir l'intégrale pour toute fonction élémentaire $f\in L_W^2$.

**Définition 3.3** *La variable aléatoire*

$$\sum_{k=1}^{n-1}f(t_k)(W(t_k)-W(t_{k-1})),$$

*que l'on note*

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]}f(t)\,dW(t), \tag{3}$$

*est appelée intégrale stochastique d'Ito de la fonction étagée* $f\in L_W^2[\alpha,\beta]$, *où* $(W(t),t\in[\alpha,\beta])$ *est un mouvement brownien.*

**Lemme 3.1** *Soit* $f\in L_W^2[\alpha,\beta]$.

1) *Il existe une suite de fonctions étagées* $f_n\in L_W^2[\alpha,\beta]$ *telle que*

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]}|f_n(t)-f(t)|^2\,dt\xrightarrow{\mathbb{P}}0\qquad si\quad n\longrightarrow\infty.$$

**Lemme 3.2** *Pour toute fonction élémentaire* $f\in L_W^2[\alpha,\beta]$ *et pour tous* $\varepsilon>0$ *et* $N>0$, *on a*

$$\mathbb{P}\{|\int\limits_{[\alpha,\beta]}f(t)dW(t)|^2>\varepsilon\}\leq\mathbb{P}\{\int\limits_{[\alpha,\beta]}f^2(t)dt>N\}+\frac{N}{\varepsilon^2}.$$

Les lemmes 1.3.1 et 1.3.2 nous permettent de définir l'intégrale d'Ito pour tout $f \in L_W^2[\alpha, \beta]$.

**Définition 3.4** *L'intégrale stochastique de $f \in L_W^2[\alpha, \beta]$ est définie comme la limite en probabilité de*

$$\int_{[\alpha,\beta]} f_n(t)\, dW(t),$$

*où $f_n$ est une suite de fonctions étagées $\in L_W^2[\alpha, \beta]$, i.e.,*

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(t) dW(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} f_n(t_k)(W_{t_k} - W(t_{k-1})), \qquad \mathbb{P}-p.s..$$

On montre que l'intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes :

1. *Linéarité* :

Soient $f_1, f_2 \in L_W^2[\alpha, \beta]$ et $\lambda_1, \lambda_2$ deux nombres réels quelconques, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in L_W^2[\alpha, \beta]$ et on a

$$\int_{[\alpha,\beta]} (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))\, dW(t) = \lambda_1 \int_{[\alpha,\beta]} f_1(t)\, dW(t) + \lambda_2 \int_{[\alpha,\beta]} f_2(t)\, dW(t).$$

2. *Isométrie* :

Soit $f \in M_W^2[\alpha, \beta]$, alors

$$\mathbb{E}\left|\int_{[\alpha,\beta]} f(t)\, dW(t)\right|^2 = \mathbb{E}\int_{[\alpha,\beta]} f^2(t)\, dt.$$

3. Soit $f \in M_W^2[\alpha, \beta]$, alors

$$\mathbb{E}\int_{[\alpha,\beta]} f(t)\, dW(t) = 0.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

**Proposition 3.1** *Soit* $f \in M_W^2[\alpha, \beta]$*, alors on a*

$$\mathbb{E}\left[\int_{[\alpha,\beta]} f(t)dW(t)|\mathcal{F}_\alpha\right] = 0, \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

*et*

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_{[\alpha,\beta]} f(t)dW(t)\right|^2 |\mathcal{F}_\alpha\right] = \int_{[\alpha,\beta]} \mathbb{E}\left[f^2(t)\,|\mathcal{F}_\alpha\right] dt \qquad \mathbb{P} - p.s..$$

Pour toute fonction $f \in L_W^2[0,T]$, l'expression

$$I(t) = \int_{[0,t]} f(s)\,dW(s)\,, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

est appelée intégrale indéfinie de $f$ et l'on montre que c'est une martingale.

## 3.1 Formule d'Ito

La formule d'Itô nous permet d'introduire la notion de la différentielle stochastique. Il est un outil particulièrement important dans l'étude des processus stochastiques.

**Définition 3.5** *Soit* $(\xi(t)\,, t \in [0,T])$ *un processus stochastique réel tel que, pour tous* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$*, on a*

$$\xi(t_1) - \xi(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t)\,dW(t),$$

*où* $a \in L_W^1[0,T]$ *et* $b \in L_W^2[0,T]$*. Alors, on dit que* $\xi(t)$ *a une différentielle stochas-*

*tique $d\xi$, donnée par*

$$d\xi\left(t\right) = a\left(t\right)dt + b\left(t\right)dW\left(t\right).$$

Notons que $T$ étant quelconque dans $\mathbb{R}$, dans le cas où $T = +\infty$, on écrira $[0, +\infty[$.

**Théorème 3.1** *(Formule d'Ito) Soient $\xi\left(t\right)$ un processus admettant une différentielle stochastique*

$$d\xi\left(t\right) = a\left(t\right)dt + b\left(t\right)dW\left(t\right)$$

*et $f(t,x)$ est une fonction continue sur $[0,\infty[\times\mathbb{R}$ admettant les dérivées $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ continues. Alors, le processus $F(t) = f(t,\xi(t))$ admet une différentielle stochastique donnée par*

$$\begin{aligned} df(t,\xi(t)) &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,\xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))a(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\xi(t))b^2(t)\right]dt \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))b(t)dW(t) \end{aligned} \tag{4}$$

Notons que si $W(t)$ est différentiable, le terme

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\xi(t))b^2(t)$$

n'apparait pas.

Ce résultat se généralise dans $\mathbb{R}^m$.

**Théorème 3.2** *Soient les processus $\xi_1\left(t\right), \cdots, \xi_m\left(t\right)$ admettant tous des différentielles stochastiques données par*

$$d\xi_i\left(t\right) = a_i\left(t\right)dt + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)dW_j\left(t\right), \qquad i = 1, \cdots, m,$$

*où $a = (a_1, \cdots a_m) \in L^1_W[0,T]$, $b = {b_{ij}}_{i=1,\cdots m, j=1,\cdots n} \in L^2_W[0,T]$ et $W(t)$ est un mouvement brownien en dimension $n$.*

*Si* $u(t,x_1,\cdots,x_m)$ *est une fonction continue dans* $[0,\infty[\times\mathbb{R}^m$ *admettant aussi des dérivées continues* $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},\ i,j=1,\cdots,m$ *; alors le processus* $\eta(t) = u(t,\xi_1(t),\cdots,\xi_m(t))$ *admet aussi une différentielle stochastique, donnée par*

$$\begin{aligned} d\eta(t) &= \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi(t)) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,\xi(t))a_i(t)\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(t,\xi(t))b_{ik}(t)\,b_{jk}(t)\right]dt \\ &+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,\xi(t))\,b_{ik}(t))dW_k(t). \end{aligned} \tag{5}$$

# 4 Equations différentielles stochastiques

Rappelons qu'il y a plusieurs phénomènes dans différents domaines (sciences, mécanique, physique,...) modélisés mathématiquement par des équations différentielles ordinaires

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = a(t,\xi(t)) + v(t), \tag{6}$$

où $v(t)$ est l'effet de perturbation.

Le cas où l'effet de perturbation est irrégulier, i.e., les phénomènes sont soumis à des excitations stochastiques

$$v(t) = b(t,\xi(t))\frac{dW(t)}{dt},$$

où $(W(t), t\in[0,T])$ est un mouvement brownien. Alors l'équation (6) devient

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = a(t,\xi(t)) + b(t,\xi(t))\frac{dW(t)}{dt}, \qquad t\in[0,T], \tag{7}$$

équation différentielle ordinaire perturbée par une perturbation aléatoire

$$b(t,\xi(t))\frac{dW(t)}{dt},$$

où $\dfrac{dW(t)}{dt}$ est une dérivée formelle par rapport au temps du mouvement brownien.

Puisque $\dfrac{dW(t)}{dt}$ n'a pas de sens, l'équation (7) s'écrit sous la forme

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\, dt + b(t, \xi(t))\, dW(t), \qquad t \in [0, T],$$

au sens de la définition 1.3.6.

## 4.1 Existence et unicité de la solution

Soient $a : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $b : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ et supposons que les $a_i$, $b_{i,j}$, $i, j = 1, \cdots, n$ sont mesurables en $(t, x)$ avec $a \in L^1_W[0, \infty[$ et $b \in L^2_W[0, \infty[$, où $W$ est un mouvement brownien en dimension $n$ défini sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Si $\xi(t)$ est un processus stochastique tel que

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\, dt + b(t, \xi(t))\, dW(t), \qquad t \in [0, \infty[ \tag{8}$$

$$\xi(0) = \xi_0, \qquad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \tag{9}$$

alors on dit que $\xi(t)$ vérifie le système d'équations différentielles stochastiques

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s, \xi(s))\, ds + \int_0^t b(s, \xi(s))\, dW(s), \quad t \in [0, \infty[. \tag{10}$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution, on a les résultats suivants.

**Théorème 4.1** *[**?**] Supposons que*

1) $a(t, x)$ *et* $b(t, x)$ *sont mesurables dans* $[0, T] \times \mathbb{R}^n$,

2) $|a(t, x) - a(t, y)| \leq k_1 |x - y|$, $|b(t, x) - b(t, y)| \leq k_1 |x - y|$,

3) $|a(t, x)| \leq k_2(1 + |x|)$, $|b(t, x)| \leq k_2(1 + |x|)$, *( $k_1$ et $k_2$ deux constantes quelconques).*

*Si $\xi_0$ est un vecteur aléatoire en dimension $n$ indépendant de $\sigma(W(t), 0 \leq t \leq T)$ tel que $\mathbb{E}\left|\xi_0\right|^2 < \infty$, alors il existe une solution unique du système* (8)-(9) *dans* $M_W^2[0,T]$.

Notons que l'unicité est comprise au sens des trajectoires, i.e, si $\xi_1(t)$ et $\xi_1(t)$ sont deux solutions, alors

$$\mathbb{P}\left(\xi_1(t) = \xi_2(t), \quad t \in [0,T]\right) = 1.$$

**Théorème 4.2** *Si, en plus des hypothèses du théorème* 1.4.1*, les fonctions $a$ et $b$ sont continues dans* $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ *alors, la solution de l'équation* (8) *est un processus de diffusion de drift $a(\cdot,\cdot)$ et de matrice de diffusion $\sigma(t,x) = b(t,x)b^t(t,x)$, $(\sigma_{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^n b_{ik}(t,x)b_{jk}(t,x))$.*

**Solutions faibles**

Dans la littérature, il existe différentes définitions de la notion des solutions faibles des EDS. Ici, nous allons donner celle qui nous semble la plus générale.

**Définition 4.1** *Un processus $(\xi(t), t \in [0,\infty[)$, $\mathcal{F}_t-$adapté défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est appelé une solution faible de* (8) *si*

1) $\mathbb{P}\left[\int_0^t \left(\left|a\left(s,\xi\left(s\right)\right)\right| + \left|b\left(s,\xi\left(s\right)\right)\right|^2\right) ds < \infty\right] = 1,$

2) *Il existe $(W(t), t \geq 0)$, un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien en dimension $n$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que* (10) *a lieu, $\mathbb{P}-$p.s..*

*($\exists$ un système usuel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, W(t), t \geq 0)$).*

**Remarque 4.1** 1) *Notons qu'ici, contrairement à la solution forte (ou solution des trajectoires), ni l'espace probabilisé filtré, ni le mouvement brownien ne sont donnés au départ.*

2) *L'unicité de la solution faible est comprise au sens que si* $\xi^1(t)$ *et* $\xi^2(t)$ *sont deux solutions faibles par rapport aux systèmes usuels* $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \mathcal{F}_t^1, \mathbb{P}^1, W^1(t), t \geq 0)$ *et* $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}_t^2, \mathbb{P}^1, W^2(t), t \geq 0)$ *tels que*

$$\mathbb{P}^1_{\xi^1(0)} = \mathbb{P}^2_{\xi^2(0)}, \qquad sur \quad (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)),$$

*alors*

$$\mathbb{P}^1_{\xi^1} = \mathbb{P}^2_{\xi^2}, \qquad sur \quad (\Omega_0, \mathcal{M}),$$

*où* $\Omega_0 = \{\omega_0 : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}^n\}$ *et* $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\Omega_0)$.

# 5 Processus stochastique stationnaire et périodique

Dans cette partie, nous allons rappeler les définitions des processus stochastiques stationnaires et périodiques et donner certains résultats de Has'minskii qui nous seront utiles pour l'étude de notre problème.

**Définition 5.1** $(a)$ *Un processus stochastique* $\xi(t) = \xi(t, w)$, $(-\infty < t < +\infty)$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^l$ *est dit stationnaire si, pour chaque suite de nombre fini* $t_1, \cdots, t_n$, *la distribution des variables aléatoires* $\xi(t_1 + h), \cdots, \xi(t_n + h)$ *est indépendante de* $h$.

$(b)$ *Si on remplace* $h$ *par un multiple de nombre fixé* $\theta$, $h = k\theta$, $(k = \pm 1, \pm 2, ...)$, *alors on a la définition du processus stochastique périodique de période* $\theta$.

## 5.1 Condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution stationnaire et périodique

Soit $(\xi(t), t \in [0, +\infty[)$ un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^l$ défini dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $U_R = \{x \in \mathbb{R}^l \ \mid \ |x| \leq R\}$ où $R \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la définition, une condition nécessaire pour que $\xi(t)$ soit un processus de Markov stationnaire est : pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$, les probabilités de $\{\xi(t) \in A\}$ et $\{\xi(t) \in A,\, \xi(t+h) \in B\}$ sont indépendantes de $t$.

Ainsi, en exprimant ces probabilités en terme d'une fonction de transition $P$, on remarque que la fonction de transition du processus de Markov stationnaire est homogène et, pour tout $h > 0$, la distribution initiale $\mathbf{P}_0(A) = \mathbb{P}(\xi_0 \in A)$ vérifie

$$\mathbf{P}_0(A) = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{P}_0(dx) P(x, h, A). \tag{11}$$

Notons que ces deux conditions sont aussi suffisantes pour qu'un processus de Markov soit stationnaire.

Maintenant, nous allons énoncer les résultat qui nous donnent les conditions nécessaires et suffisantes sur les fonctions de transition pour l'obtention soit d'un processus de Markov stationnaire soit d'un processus de Markov périodique.

**Théorème 5.1** *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un processus de Markov stationnaire de fonction de transition $P(x, t, A)$ de Feller et stochastiquement continue est que, pour $x \in \mathbb{R}^l$*

$$\lim_{R \to \infty} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(x, t, \overline{U}_R) dt = 0, \tag{12}$$

*où $\overline{U}_R = \{|x| > R\}$.*

Preuve.

**Nécessité**

Soit $\mathbf{P}_0$ la distribution initiale. En intègrant (11) par rapport à $t$ de 0 à $T$ et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\mathbf{P}_0(\overline{U}_R) = \int \mathbf{P}_0(dx)\frac{1}{T}\int_0^T P(x,t,\overline{U}_R)dt. \tag{13}$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que la condition (12) n'est pas vérifiée, i.e.,

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T P(x,t,\overline{U}_R)dt = q(x) > 0, \tag{14}$$

or, comme on a

$$0 = \lim_{R\to\infty}\mathbf{P}_0(\overline{U}_R) \geq \int \mathbf{P}_0(dx)q(x) > 0, \tag{15}$$

d'où la contradiction.

**Suffisance**

D'après la condition (12), pour $x_0$ donné, il existe une suite $T_n \to \infty$ telle que

$$\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} P(x_0,t,U_R)dt \to 0, \qquad \text{uniformément en } \ n, \qquad \text{quand} \quad R\to\infty. \tag{16}$$

Maintenant, considérons la suite des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$ définie par

$$\mathbf{P}_n(A) = \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} P(x_0,t,A)dt. \tag{17}$$

D'après (16), on remarque que $\mathbf{P}_n(A)$ est une suite faiblement compacte. Soit donc $\mathbf{P}_{n_k}$ une sous suite faiblement convergente vers une certaine distribution $\mathbf{P}_0$. Nous allons montrer que la mesure $\mathbf{P}_0$ satisfait (11).

En effet, soit $f(x) \in C(\mathbb{R}^l)$. Comme $\mathbf{P}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{P}_0$, la propriété de Feller et Fubini-

Tonelli nous donnent

$$\int \mathbf{P}_0(dx) \int P(x,t,dy)f(y)$$
$$= \lim_{n_k \rightharpoonup \infty} \frac{1}{T_{n_k}} \int_0^{T_{n_k}} ds \int P(x_0,s,dx) \int P(x,t,dy)f(y). \quad (18)$$

En appliquant maintenant la relation de Chapman-Kolmogorov, on obtient

$$\int \mathbf{P}_0(dx) \int P(x,t,dy)f(y) = \lim_{n_k \rightharpoonup \infty} \frac{1}{T_{n_k}} \int_0^{T_{n_k}} ds \int P(x_0, s+t, dy)f(y). \quad (19)$$

Posons

$$u = s + t,$$

par un simple calcul, (19) devient

$$\int \mathbf{P}_0(dx) \int P(x,t,dy)f(y) = \lim_{n_k \rightharpoonup \infty} \frac{1}{T_{n_k}} \left[ \int_0^{T_{n_k}} du \int P(x_0,u,dy)f(y) \right.$$
$$\left. + \int_{T_{n_k}}^{T_{n_{k+t}}} du \int P(x_0,u,dy)f(y) - \int_0^t du \int P(x_0,u,dy)f(y) \right] (20)$$

Comme le deuxième et le troisième terme du membre de droite de l'égalité (**??**) sont nuls, on obtient

$$\int \mathbf{P}_0(dx) \int P(x,t,dy)f(y) = \int \mathbf{P}_0(dy)f(y), \qquad \forall f,$$

qui s'écrit

$$\int \mathbf{P}_0(dx)T_t f(x) = \int \mathbf{P}_0(dx)f(x).$$

D'où (11).

□

**Théorème 5.2** *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un processus de Markov $\theta-$périodique de fonction de transition $P(s,x,t,A)$ $\theta-$périodique est que, pour $x_0, s_0$ donnés*

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(s_0,x_0,s_0+k\xi,\overline{U}_R)=0. \tag{21}$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème précédent ; la seule différence réside dans la définition de $\mathbf{P}_n(A)$, donnée ici par

$$\mathbf{P}_n(A)=\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}P(s_0,x_0,s_0+k_i\theta,A),$$

où $k_n$ est une suite croissante de nombres entiers telle que la suite de mesures $\mathbf{P}_n(A)$ soit faiblement compact.

**Remarque 5.1** *La condition* (21) *du théorème* 1.5.3 *peut être remplacée par la condition suivante*

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T P(s,x,s+u,\overline{U}_R)du=0, \tag{22}$$

*à condition que la fonction de transition $P(s,x,t,A)$ satisfait l'hypothèse*

$$\alpha(R)=\sup_{x\in U_{\beta_R},0<s,t<\theta}P(s,x,s+t,\overline{U}_R)\to 0, \qquad R\to+\infty, \tag{23}$$

*pour toute fonction $\beta_R\to+\infty$, quand $R\to+\infty$.*

Maintenant, on va énoncer et démontrer les résultats de Has'minskii qui permettent de démontrer aussi bien l'existence d'une solution stationnaire que l'existence d'une solution périodique.

## 5.2 Théorèmes de Has'minskii

Soit le système d'équations stochastique

$$X_i(t) = x + \int_{t_0}^{t} b_i(s, X(s))ds + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \sigma_{ij}(s, (X(s))dW_j(s), \qquad i = 1 \cdots, m, \tag{24}$$

où $b : [0, \infty[\times \mathbb{R}^m \times \to \mathbb{R}^m$, $\sigma : [0, \infty[\times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sont boréliennes et $W$ un processus de Wiener défini dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

**Théorème 5.3** *Considérons le système d'équations stochastique* (24) *où les coefficients sont indépendants de $t$, i.e.,*

$$X_i(t) = x + \int_{t_0}^{t} b_i(X(s))ds + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \sigma_{ij}((X(s))dW_j(s), \qquad i = 1 \cdots, m. \tag{25}$$

*Supposons que*

$$\begin{cases} |b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq B|x - y|, & x, y \in U_R \\ |b(x)| + |\sigma(x)| \leq B(1 + |x|), & x \in U_R \end{cases} \tag{26}$$

*où $B$ est une constante.*

*S'il existe une fonction $V(x) \in C^2$, $x \in \mathbb{R}^m$ telle que*

$$V(x) \geq 0, \tag{27}$$

$$\sup_{|x|>R} LV(x) = -A_R \to \infty, \qquad R \to +\infty, \tag{28}$$

*où*

$$L = \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{29}$$

*de plus, si pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, on suppose que le processus $X^x(t)$ est régulier (défini pour tout $t \geq 0$), alors il existe une solution pour l'équation* (25) *qui est un processus stationnaire de Markov.*

**Théorème 5.4** *Supposons que les coéfficients de l'équation* (24) *sont $\theta$-périodiques en $t$ et vérifient*

$$\begin{cases} |b(s,x) - b(s,y)| + |\sigma(s,x) - \sigma(s,y)| \leq B|x-y|, & \textit{dans} \;\; I \times U_R \\ |b(s,x)| + |\sigma(s,x)| \leq B(1+|x|), & \textit{dans} \;\; I \times U_R, \end{cases} \tag{30}$$

*où $B$ est une constante.*

*De plus, supposons qu'il existe une fonction $V(t,x) \in C^2$ définie dans $I \times \mathbb{R}^m$, $\theta-$périodique en $t$ vérifiant* (28) *et la condition*

$$\inf_{|x|>R} V(t,x) \to \infty, \qquad R \to \infty. \tag{31}$$

*Alors, il existe une solution de l'équation* (24) *qui est un processus de Markov $\theta-$périodique.*

Pour la démonstration du théorème 1.5.4, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 5.1** *Soient $X(u)$ un processus satisfaisant l'équation* (24) *sur $[s,T]$, $V \in C^2$, $U$ un voisinage borné de $x \in R^l$, $\tau_U = \inf\{u : X(u) \notin U\}$ et*

$$\tau_U(t) = \min(\tau_U, t). \tag{32}$$

*Supposons que*

$$\mathbb{P}\{X(s) \in U\} = 1, \tag{33}$$

*alors on a*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{V(\tau_U(t)), X(\tau_U(t)) - V(s, X(s))\} \\ = & \ \mathbb{E} \int_s^{\tau_U(t)} LV(u, X(u))du. \end{aligned} \tag{34}$$

Preuve du théorème 1.5.4

Soient $X^x(t)$ une solution régulière de l'équation (24) et $V(x)$ une fonction vérifiant les conditions (27) et (28).

D'après le lemme précédent, on a

$$\mathbb{E}V(X^x(\tau_n(t))) - V(x) = \mathbb{E} \int_s^{\tau_n(t)} LV(X^x(u))du, \tag{35}$$

où $\tau_n = \inf\{u : X(u) \notin U_n\}$ avec $U_n = \{x : |x| < n\}$.

La condition (28) nous donne

$$LV(X^x(u)) \leq -\chi_{\{}|X^x(u)| > R\}(w)A_R + \sup_{x\in\mathbb{R}^l} LV(x). \tag{36}$$

Intégrons de 0 à $\tau_n(t)$ et appliquons l'espérance mathématique et l'inégalité (36), on obtient

$$\begin{aligned} A_R\mathbb{E} \int_0^{\tau_n(t)} \chi_{|X^x(u)|>R}(w)du \ \ \leq & \ -\mathbb{E} \int_0^{\tau_n(t)} LV(X^x(u))du \\ & +\mathbb{E} \sup_{x\in\mathbb{R}^l} \int_0^{\tau_n(t)} LV(x)du, \end{aligned} \tag{37}$$

ainsi, on trouve deux constantes $c_1$ et $c_2$ telles que

$$A_R \mathbb{E} \int_0^{\tau_n(t)} \chi_{|X^x(u)|>R}(w) du \le c_1 t + c_2. \tag{38}$$

Puisque $X^x(t)$ est défini pour tout $t \ge 0$, on a $\tau_n \underset{n\to\infty}{\to} t$ et donc par passage à la limite de (38), on obtient

$$\frac{1}{t} \int_0^t P(x, u, \overline{U}_R) du < \frac{c_3}{A_R}. \tag{39}$$

D'où l'existence d'un processus de Markov stationnaire pour l'équation (25), d'après le théorème 1.5.2 et en tenant compte de (28). □

Preuve du théorème 1.5.5

La démonstration s'appuie sur la remarque 1.5.1. Ainsi, les arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du théorème 1.5.4 nous permettent d'obtenir

$$\frac{1}{T} \int_0^T P(s, x, s+u, \overline{U}_R) du < \frac{C_3}{A_R},$$

d'où (22).

Il nous reste donc à démontrer (23). Pour cela, on suppose que la fonction $V$, en plus des conditions (28) et (31), vérifie aussi la condition (27). Ainsi, il s'ensuit d'après les hypothèses du théorème que

$$L(V(t, x) - kt) \le 0, \tag{40}$$

où $k$ est une constante suffisamment grande.

En utilisant (40), la régularité de la solution du processus et le lemme 1.5.1, on obtient

$$\mathbb{E}_{s,x}V(t, X(t)) \leq k(t-s) + V(s,x),$$

ce qui, d'après l'inégalité de Cebycev, nous donne

$$P(s,x,t,\overline{U}_R) \leq \frac{k(t-s) + V(s,x)}{\inf_{|x>R|} V(t,x)}.$$

On remarque que la condition (23) sera satisfaite si la fonction $\beta_R$ est choisie telle que

$$\frac{\sup_{|x|<\beta_R} V}{\inf_{|x|>R} V} \to 0, \qquad R \to \infty.$$

Ceci est possible d'après la condition (31).

□