Modélisation

Introduction à la Mécanique des Milieux Continus (MMC)

Lahcène CHORFI
Dept. de Maths, Université B.M. d' Annaba

Avril 2020

Table des matières

Chapitre 1

Cinématique

1.1 Le milieu continu, modélisation

Définition 1 *Un milieu est continu (MC) dans une région de l'espace s'il occupe entièrement cette région sans discontinuité spaciale ou temporelle pour ses propriétés.*

A l'écelle macroscopique, il modélise les milieux matériels (solide, liquide, gaz). Par contre il ne tradui pas la structure réelle de la matière constituée à l'écelle microscopique par un grand nombre de particules distinctes (atomes, molécules). Par exemple $1\mu m^3$ d'air contient 2.7×10^7 molécules, le parcours moyen d'une molécule est de 10^{-4} mm (agitation moléculaire).
Ici on adopte l'approce macroscopique. On ne prend pas en compte le caractre microscopique discontinu de la matire, c.a.d on ne prend pas en compte le mouvement des molécules.
Un élément de volume est constitué d'un très rand nombre de molécules.
Dans un MC, les propriétés physiques varient d'une façon continue d'un point à un autre.
Un système mécanique est représenté par un volume $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ constitué de particules.
Une particule est un point matériel caractérisé par sa position $x = \overrightarrow{OM}$.
La continuité signifie veut dire que lors de l'évolution du système les particules initialement voisines demeurent voisines.

Applications de la MMC. Ce paragrape est tiré d'un cours destiné aux ingénieurs [5].

La mécanique des milieux continus (en abrégée M.M.C), est une branche de la mécanique qui se propose d'étudier les mouvements, les déformations et les champs de contraintes au sein de milieux continus. C'est un vaste domaine qui a pour but l'étude des lois de mouvement des corps déformables (solides, liquides, gaz). Elle est caractérisée par l'interaction des lois de déformation avec celles de la thermodynamique. L'étude concerne des corps qui remplissent l'espace d'une façon continue, ininterrompue. La distance entre deux points de ces corps ne change pas au cours du mouvement. Les problèmes essentiels de la mécanique des milieux continus sont :

- 1. L'étude des mouvements des solides déformables.
- 2. L'étude des mouvements des corps flottants et immergés.
- 3. L'étude des mouvements non stationnaires des gaz.

1.2 Déformation d'un milieu continu

1.2.1 Le mouvement et sa représentation

Référentiel: c'est un repère (orthonormé) fixe $\mathcal{R} = \{0; e_1,e_2,e_3\}$
Vecteur position: $x = \overrightarrow{OM} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 := x_ie_i$
Ω_0 configuration de référence (initiale, à $t = t_0$)
$\Omega = \Omega_t$ configuration actuelle (après déformation ou à l'instant t)
$M_0 \in \Omega_0$ repéré par $X = \overrightarrow{OM_0} = (X_1,X_2,X_3)$
$M \in \Omega$ repéré par $x = \overrightarrow{OM} = (x_1,x_2,x_3)$

$$x(t) = \phi(X,t) \Leftrightarrow x_i = \phi_i(X,t), \quad i = 1,2,3.$$

ϕ défini le mouvement par rapport au repère $\mathcal{R} = \{O; e_1,e_2,e_3\}$. Pour assurer la continuité du milieu, on suppose que $\phi : \Omega_0 \to \Omega_t$ est continue et bjective. Plus précisemment, on suppose que $\phi(t)$ est un C^1 difféomorpisme, on note $\psi = \phi^{-1}$.
$u(X,t) = \phi(X,t) - X$ le vecteur déplacement.

Description Lagranienne

Elle consiste à identifier les particules par leurs positions dans une configuration initiale et à les suivre dans leur mouvement

- X et t: variables de Lagrange

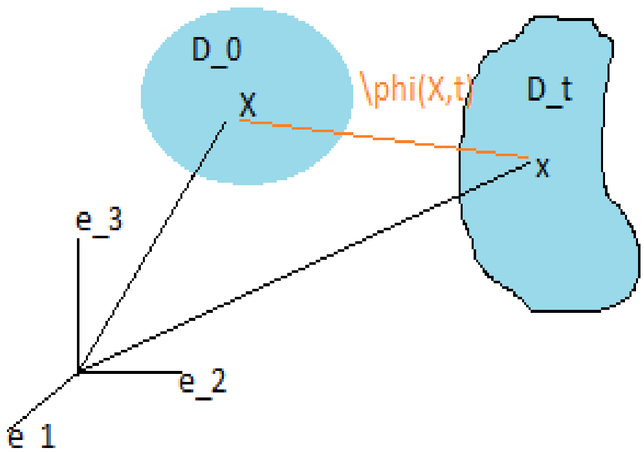

Fig. 1.1 – *Configuration de référence et actuelle*

- Position: $x = \phi(X,t)$
- Vitesse: $V = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X,t)$
- Accélération $\gamma = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(X,t)$
- Grandeur $g = G(X,t)$

Description Eulerienne

Elle consiste à observer les propriétés des particules qui passent successivement en un poit donné x. Le mouvement est éfini par la donnée de la vitesse $V = V(x,t)$ à chaque instant t avec la confiuration actuelle comme référence.

- x et t: variables d'Euler
- Position: x fixé
- Vitesse: $V(x,t)$
- Grandeur $g = G(x,t)$

La description eulerienne s'obtient à partir de la description lagrangienne

$$\begin{cases} V^{(L)}(X,t) = V^{E}(\phi(X,t),t) & \Leftrightarrow V^{(E)}(x,t) = V^{L}(\psi(x,t),t) \\ \\ G(X,t) = g(\phi(X,t),t) & \Leftrightarrow g(x,t) = G(\psi(x,t),t) \end{cases}$$

Inversement la description eulerienne permet de retrouver la description lagranienne en résolvant le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V(x,t) \\ \\ x(0) = X \end{cases}$$

La solution $x = \phi(X,t)$ est la trajectoire de la particule.

Exemple.
Soit le mouvement décrit par les equations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_1}{1+tX_1} \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Calculer les composantes du vecteur de vitesse en termes des variables lagrangiennes puis euleriennes.

– 1. Variables de Lagrange.

$$\begin{cases} V_1 = \frac{dx_1}{dt} = & \frac{-X_1^2}{(1+tX_1)^2} \\ V_2 = & 0 \\ V_3 = & 0 \end{cases}$$

– 2. Variables d'Euler.

$$v(x,t) = V(X,t) = \{v_1 = -x_1^2,\, v_2 = 0,\, v_3 = 0\}$$

1.2.2 Tenseur des deformations

Définition 2 *Le tenseur gradient décrit la transformation locale au voisinage d'une particule donnee. Afin de rendre compte des déformations, c'est à dire des changements de forme autour de cette particule, on s'interesse à l'evolution du produit scalaire de deux vecteurs matériels pris respectivement dans les deux configurations* Ω_0 *et* $\Omega(t)$ *.*

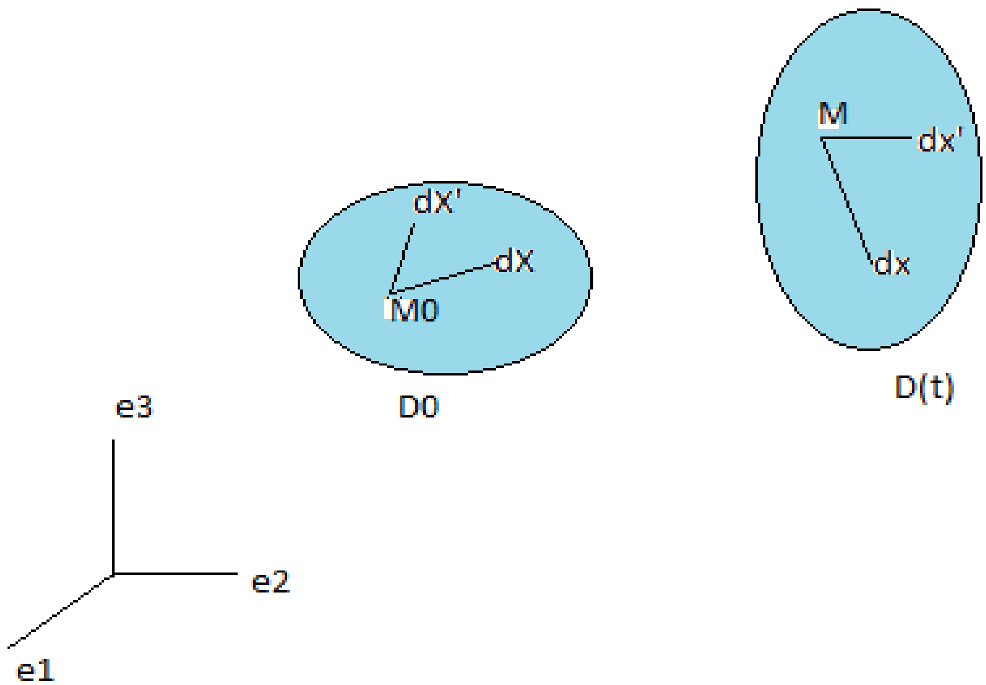

FIG. 1.2 – *Notion de déformation*

Considérons trois particules voisines X , $X + dX$, $X + dX'$. Apres deformations, elles occupent dans $\Omega(t)$ les positions respectives x , $x + dx$, $x + dx'$. En differenciant $x = \phi(X,t)$, on obtient:

$$dx(t) = F(X,t)dX \Leftrightarrow dx_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j} dX_j$$

$F(X,t) = (\frac{\partial \phi_i}{\partial X_j})$ est la matrice Jacobienne de $\phi(X,t)$ ou le gradient de la déformation $F = \nabla_X \phi$. $F(X,t)$ est nommé aussi tenseur de déformation.

1.2.3 Tenseur des dilatations (de Cauchy)

Notations matricielle.

– Un vecteur $V = V_i e_i$ s'écrit $V = col(V1,V_2,V_3)$, $V^T = (V_1,V_2,V_3)$

– Produit scalaire de deux vecteurs: $U \ . \ V = \sum_{i=1}^{3} U_i V_i$

– Une Matrice $A = (a_{i,j})$, $A^T = (a^*_{i,j})$ avec $a^*_{i,j} = a_{j,i}$

Dans ce paragraphe on suppose que $F = F(X)$ ne dépend pas de t.

$$dx \ . \ dx' = F(X)dX \ . \ F(X)dX' = C(X)dX \ . \ dX' = C(X; dX, dX')$$

avec $C(X) = F(X)^T F(X)$ tenseur de dilatation.
$C(X)$ es une matice symétrique définie positive, la forme quadratique $C(X,U,V)$ défini un produit scalaire qui indique comment sont déformés les longueurs et les angles. On a

$$\frac{\|dx\|}{\|dX\|} = \frac{C(X; dX, dX)^{1/2}}{\|dX\|}$$

$\dfrac{\|dx\|}{\|dX\|} = \Lambda(X, dX)$ dilatation relative des longueurs.

- Glissement des vecteurs orthogonaux (variation des angles).
Angle de glisssement $\gamma(X, dX, dX')$

$$dx \ . \ dx' = \|dx\| \|dx'\| \sin\gamma \Longrightarrow \sin\gamma = \frac{C(X; dX, dX')}{C(X; dX, dX)^{1/2} C(X; dX', dX')^{1/2}}$$

Si $dX = \lambda e_i$ et $dX = \mu e_j$ sont orthgonaux, alors

– $\Lambda(X, dX) = \sqrt{C}_{ii}$

– $\sin\gamma_{i,j} = \dfrac{C_{ij}}{\sqrt{C}_{ii}\sqrt{C}_{jj}}$, où $C(X) = (C_{ij}(X))$

Donc les éléments diagonaux de $C(X)$ déterminent les dilatations relatives dans les directions e_i
- les éléments non diagonaux nous donnent les angles de glissement dans le plan $[e_i, e_j]$

Changement de volume

Soit un paralépipède élémentaire défini par les vecteurs (dX, dX', dX'') attachés en $X \in \Omega_0$. Son image par la transformation ϕ est un paralépipède

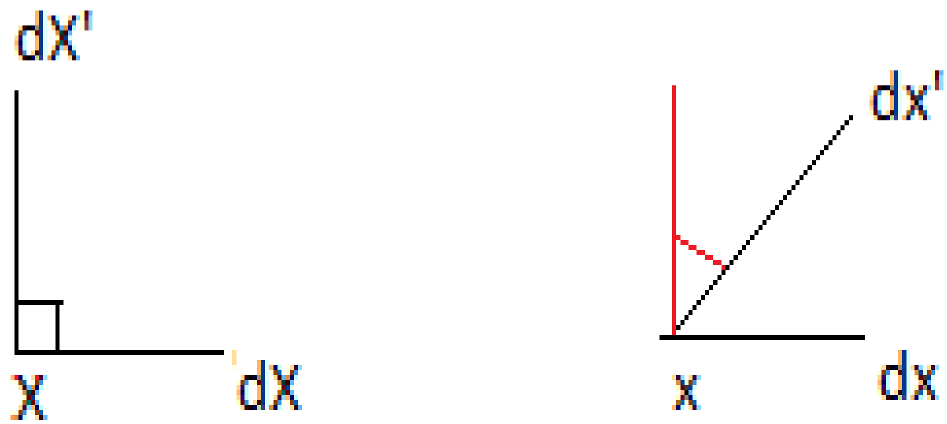

Fig. 1.3 – *Angle de cisaillement*

de cotés (dx,dx',dx''). On note δV_0, δV les volumes respectifs

$$\begin{aligned}
\delta V_0 = det(dX,dX',dX'') &= dX \ . \ (dX' \wedge dX''), \quad (produit\ mixte) \\
\delta V = det(dx,dx',dx'') &= det(F(X)dX,F(X)dX',F(X)dX'') \\
&= detF(X)det(dX,dX',dX'') \\
&= \quad J(X)\delta V_0 \quad (J = Jacobien\ de\ \phi)
\end{aligned}$$

Dilatation volumique relative: $\dfrac{\delta V_0}{\delta V} = J(X)$

Intégrale de volume

Conservation de masse: Soit $D_0 \subset \Omega_0$ un domaine arbitraire. La masse M de D_0 ne change pas après déformation (principe de conservation de masse). Notons par $\rho^P(X)$ la densité du milieux de référence (dite particulaire) et

$\rho^E(x)$ la densité en un point x de Ω (variable Euler) . Alors

$$\begin{aligned}\int_{D_0} \rho^P(X)dX &= \int_D \rho^E(x)dx && (m(D_0) = m(D)) \\ &= \int_{D_0} \rho^E(\phi(X))J(X)dX && \text{(théorème de Changement de variale)}\end{aligned}$$

Comme D_0 est arbitraire, ce qui montre que $\rho^E(x) = \dfrac{\rho^P(X)}{J(X)}$.

1.2.4 Tenseur de déformation de Green-Lagrange

On a

$$\|dx\|^2 - \|dX\|^2 = 2L(X)dX\ .\ dX$$

avec $L(X) = \frac{1}{2}(C(X) - I)$ appelé tenseur de Green-Lagrange.
$L(X)$ mesure la déformation du milieu.
Rappelons que $\Lambda(X,dX) = \dfrac{\|dx\|}{\|dX\|}$ désigne la dilatation relative
Si $\Lambda(X,dX) = 1 + \Delta(X,dX)$, $\Delta(X,dX)$ appelé allongement relatif, d'où

$$\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2 = \frac{dX^T L(X) dX}{\|dX\|^2}$$

Si $|\Delta| \ll 1$ on néglige Δ^2 devant $|\Delta|$, d'où

$$\Delta(X,dX) \simeq \frac{dX^T L(X) dX}{\|dX\|^2}$$

Le tenseur $L(X)$ noté $\varepsilon(X)$ et nommé " tenseur des petites déformations".
Ce tenseur sera étudié dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Diaonalisation du tenseur de dilataion $C = F^T F$

$C(X)$ est symétrique défini positif, donc il admet une base propre $\{u_1,u_2,u_3\}$, les valeurs propres sont strictement positifs

$$Cu_j = \lambda_j^2 u_j \quad j = 1,2,3$$

- u_j directions principales,
- λ_j coefficient de dilatation suivant les directions u_j. C'est à dire que: si dX est colinéaire à u_j alors $\Lambda(X,dX) = \lambda_j$
- L'angle de cisaillement $\gamma_{ij} = 0$ si $dX = \|dX\|e_i$ et $dX' = \|dX'\|e_j$, $i \neq j$.

Transport de volume

Supposons que W_0 est un cube dont les côtés sont dirigés par les vecteurs de la base $\{u_1,u_2,u_3\}$. Alors

$$vol(W) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 dX^3 = J(X)vol(W_0)$$

Si W_0 est une petite sphère centrée en M_0, alors W est une ellipsoïde centrée en $M = \phi(M_0)$ d'axes u_j et de demi-axes $\lambda_j dX$, $j = 1,2,3$. On a supposé que la transformation est directe, i.e $J(X) > 0$.

Décomposition locale de la déformation F

On a la décompostion

$$F(X) = V(X)R(X)$$

où
- $R(X)$ est une rotation (isométrie qui conserve les angles, matrice orthogonale ou unitaire)
- $V(X)$ dilatation des longueurs (matrice symétrique, on suppose que les valeurs propres sont positives)

1.3 Cinématique

Dans cette section on étudie le mouvement d'un MC considéré comme une suite continue de déformations entre une configuration de référence Ω_0 et des configurations déformées $\Omega(t)$.

Notations.

– $x = \phi(X,t)$: équation du mouvement (trajectoire d'une particule $M(t)$, $M_0 = \phi(X,0)$ position intiale)
– $F(X,t) = \nabla\phi$
– $J(X,t) = det(F(X,t))$ Jacobien de ϕ par rapport à X.
– $C(X,t) = F^T F$ Tenseur de Cauchy
– Représentation Eulerienne et Lagranienne d'un champ B: $B(X,t) = b(x,t)$

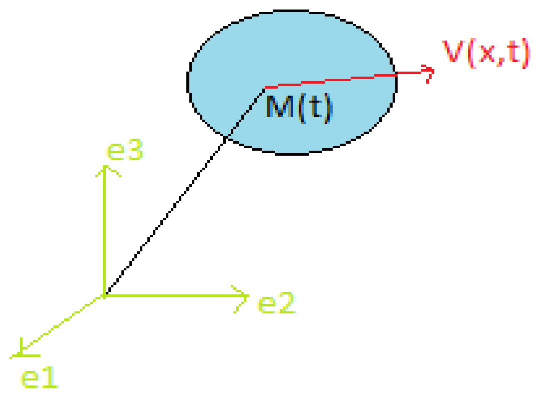

FIG. 1.4 – *Description Eulerienne du mouvement*

Loi de conservation de masse

La masse volumique du milieu est definie par :

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

Avec :
- ρ: masse volumique
- dv: volume élémentaire
- dm : masse élémentaire de la particule
- $\rho(x,t)$: masse volumique du volume de la configuration Ω_t
- $\rho_0(X)$: masse volumique du volume de la configuration Ω_0 (densité particulaire)

De la loi de conservation de masse on déduit la relation

$$\rho_0(X) = \rho(x,t)J(X,t)$$

1.3.1 Dérivée particulaire d'un champ $b(x,t)$

De la relation $B(X,t) = b(\phi(X,t),t)$ on a

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \text{grad } b\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \text{grad } b := (\frac{\partial b}{\partial x_1},\frac{\partial b}{\partial x_2},\frac{\partial b}{\partial x_3})^T$$

$\dfrac{db}{dt}$ s'appelle dérivé particulaire, qu'on peut écrire

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + V\text{grad } b$$

$V\text{grad } b$ est la dérivée suivant le vecteur vitesse $V(x,t)$.
Si $B(x,t) = (B_1,B_2,B_3)$ est un champ de vecteurs alors

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + V^T\text{grad } B$$

avec

$$\text{grad } B = (\text{grad } B_1, \text{ grad } B_2, \text{ grad } B_3),$$
$$V^T\text{grad } B = (V\text{grad } B_1, \ V\text{grad } B_2, \ V\text{grad } B_3)^T$$

1.3.2 Gradient de vitesse

$$V(x,t) = (V_1(x,t),V_2(x,t),V_3(x,t))$$

, avec

$$V_i(x,t) = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(X,t)$$

champs des vitesses en fonction de la variable d'Euler x.

Gradient de vitesse $K(x,t) = (K_{ij}(x,t))$; $K_{ij}(x,t) = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$

Vecteur transporté par le mouvement

- $\delta x = F(X,t)\delta X$
- $\dfrac{d}{dt}(\delta x(t)) = \dfrac{d}{dt}(F(X,t)\delta X) = \dfrac{d}{dt}(\nabla\phi(X,t)\delta X = \nabla(\dfrac{\partial \phi}{\partial t})\delta X = \nabla V(X,t)\delta X$

mais la règle de dérivation d'une fonction composée $V^L(X,t) = V(\phi(X,t),t)$ entraîne

$$\nabla V(X,t) = \text{grad } V(x,t)\nabla\phi(X,t) = K(x,t)F(X,t)$$

donc

$$\frac{d}{dt}(\delta x(t)) = K(x,t)\delta x$$

Décomposition du tenseur gradient de vitesse

On décompose la matrice K en deux parties, symétrique et anti-symétrique:

$$K(x,t) = D(x,t) + \Omega(x,t)$$

où

$$D = \frac{1}{2}(K + K^T); \quad \Omega = \frac{1}{2}(K - K^T)$$

– $D = (D_{ij}),\ D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i})$ (tenseur de taux de déformation)

– $\Omega = (\Omega_{ij}),\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i})$ (tenseur de taux de rotation)

Vecteur rotation (tourillon)

$$\omega(x,t) = \frac{1}{2}\mathrm{rot}V(x,t)$$

avec la définition

$$\mathrm{rot}V = \nabla \times V = (\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2})e_1 + (\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3})e_2 + (\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1})e_3$$

On a aussi

$$\Omega(x,t)\delta x = \omega(x,t) \times \delta x$$

si $\delta V = V(x + \delta x) - V(x)$ alors

$$\delta V = D\delta x + \omega \times \delta x$$

Transport du produit scalaire

Les équations

$$\frac{d}{dt}(\delta x(t)) = K(x,t)\delta x, \quad \frac{d}{dt}(\delta x'(t)) = K(x,t)\delta x'$$

entraînent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta x\ .\ \delta x') &= \delta x'\ .\ \tfrac{d}{dt}(\delta x) + \delta x\ .\ \tfrac{d}{dt}(\delta x') \\ &= \delta x'\ .\ K(x,t)(\delta x) + \delta x\ .\ K(x,t)(\delta x') \\ &= < (K(x,t) + K^T(x,t))\delta x\ ,\ \delta x' > \\ &= 2 < D(x,t)\delta x\ ,\ \delta x' >\end{aligned}$$

En particulier on obtient le taux d'allongement

$$\frac{1}{\|\delta x\|}\frac{d}{dt}(\|\delta x(t)\|) = \frac{\delta x^T D(x,t)\delta x}{\|\delta x\|^2}$$

et le taux de glissement de deux vecteurs ortogonaux

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t))|_{t=t_*} = 2\frac{\delta x^T D(x,t_*)\delta x}{\|\delta x\|\|\delta x'\|}$$

$\gamma(t)$ est le complémentaire de l'angle $\theta(t) = \mathrm{angle}(\delta x(t),\delta x'(t))$ on suppose que $\theta(t^*) = \mathrm{angle}(\delta x(t_*),\delta x'(t_*)) = \frac{\pi}{2}$ et $\gamma(t)$ est petit pout $t \sim t_*$. On a utilisé la formule

$$\delta x \ . \ \delta x' = \|\delta x\|\|\delta x'\| \sin\gamma(t) \quad \textit{et l'approximation} \ \cos\gamma(t) = 1 \ \textit{si} \ t \sim t_*$$

Cas particuliers: si $\delta x = \lambda e_i$, $\delta x' = \lambda e_j$, $i \neq j$ alors

– $\frac{1}{\|\delta x\|}\frac{d}{dt}(\|\delta x(t)\|) = D_{ii}$, taux d'allongement dans la direction e_i

– $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\gamma(t)) = D_{ij}$, taux de glissement dans le plan$[e_i, e_j]$

Transport de volume

Soit un volume élementaire en mouvement
$\delta\mathcal{V} = \delta x \ . \ (\delta x' \times \delta x'')$ avec $\delta\mathcal{V}_0 = \delta X \ . \ (\delta X' \times \delta X'')$.

Théorème 1

$$\frac{1}{\delta\mathcal{V}}\frac{d}{dt}(\delta\mathcal{V}) = \mathrm{Div}\ V(x,t)$$

Preuve. On sait que $\dfrac{\delta\mathcal{V}}{\delta\mathcal{V}_0} = J(X,t)$, donc

$$\frac{d}{dt}(\delta\mathcal{V}) = \frac{\partial J}{\partial t}(X,t)\delta\mathcal{V}_0$$

Cela revient à montrer que

$$\frac{\partial J}{\partial t}(X,t) = \mathrm{Div}\ V(x,t)J(X,t)$$

En effet
$$J(X,t) = \frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(X_1,X_2,X_3)} = \nabla\phi_1 \ . \ (\nabla\phi_2 \times \nabla\phi_3)$$
ce qui entraîne
$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial t}(X,t) &= \nabla V_1 \ . \ (\nabla\phi_2 \times \nabla\phi_3) + \nabla\phi_1 \ . \ (\nabla V_2 \times \nabla\phi_3) + \nabla\phi_1 \ . \ (\nabla\phi_2 \times \nabla V_3) \\
&= \frac{D(V_1,x_2,x_3)}{D(X_1,X_2,X_3)} + \frac{D(x_1,V_2,x_3)}{D(X_1,X_2,X_3)} + \frac{D(x_1,x_2,V_3)}{D(X_1,X_2,X_3)} \\
&= J(X,t)\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + J(X,t)\frac{\partial V_2}{\partial x_2} + J(X,t)\frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \text{Div } V(x,t)J(X,t)
\end{aligned}$$
La deuxième égalité découle de la remarque suivante:
si $b(x,t) = (b_1,b_2,b_3)$ est un champ vectoriel alors la relation
$$B(X,t) = b(\phi(X,t),t)$$
implique
$$\nabla B(X,t) = \text{Grad } b(x,t) \circ \nabla\phi(X))$$
Par exemple si $b(x) = (V_1(x),x_2,x_3)$ alors
$$\frac{D(B_1,B_2,B_3)}{D(X_1,X_2,X_3)} = \det(\nabla\phi(X))\det(\text{Grad } b(x,t)) = J(X,t)\frac{\partial V_1}{\partial x_1}$$

1.3.3 Théorème de transport

Soit $c(x,t)$ un champ scalaire et $D(t) = \phi(D_0)$ un domaine variable. Considérons l'intérgrale de volume
$$C(D(t),t) = \iiint_{D(t)} c(x,t)dx$$
Exemple: Masse de $D(t)$ de densité $\rho(x,t)$:
$$m(D(t)) = \iiint_{D(t)} \rho(x,t)dx$$
On veut dériver cette intégrale par rapport au temps t. Si le domaine $D = D_0$ ne dépend pas de t, on peut dériver sous le signe somme.

Par le changement de variable $x = \phi(X)$, on se ramène au domaine de référence D_0

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{d}{dt}\iiint_{D(t)} c(x,t)dx \\
&= \frac{d}{dt}\iiint_{D_0} c^L(X,t)J(X,t)dX \\
&= \iiint_{D_0} \frac{\partial}{\partial t}[c^L(X,t)J(X,t)]dX \\
&= \iiint_{D_0} [\frac{\partial c^L}{\partial t}(X,t)J(X,t) + c^L(X,t)\frac{\partial J}{\partial t}(X,t)]dX \\
&= \iiint_{D_0} [\frac{\partial c^L}{\partial t}(X,t) + c^L(X,t)\text{Div } V]J(X,t)dX \\
&= \iiint_{D(t)} [\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + V(x,t)\text{Grad } c(x,t) + c(x,t)\text{Div } V(x,t)]dx \\
&= \iiint_{D(t)} [\frac{dc}{dt}(x,t) + c(x,t)\text{Div } (V(x,t))]dx
\end{aligned}$$

Une deuxième formule: comme

$$\text{Div } (cV) = V\text{Grad } c + c\text{Div } V$$

alors

$$\frac{dC}{dt} = \iiint_{D(t)} [\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + \text{Div } (c(x,t)V(x,t))]dx$$

Une troisième formule: on utilise la formule de Gauss, si $F(x) = (F1,F_2,F_3)$ est un champ vectoriel (de classe C^1) alors

$$\iiint_D \text{Div } F dx = \iint_{\partial D} F\ .\ nds$$

pour avoir

$$\frac{dC}{dt} = \iiint_{D(t)} \frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + \iint_{\partial D(t)} cV\ .\ nds$$

Généralisation

Intégrale d'un champ de vecteurs $F(x,t) = (F_1,F_2,F_3)$

$$\mathrm{F}(t) = \iiint_{D(t)} F(x,t)dx \Leftrightarrow \mathrm{F_i(t)} = \iiint_{\mathrm{D(t)}} \mathrm{F_i(x,t)dx}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{F_i(t)} &= \iiint_{D(t)} [\frac{\partial F_i}{\partial t}(x,t) + \mathrm{Div}\ (V(x,t)F_i(x,t))]dx \\ &= \iiint_{D(t)} [\frac{\partial F_i}{\partial t}(x,t) + V\mathrm{Grad}\ F_i + F_i\mathrm{Div}\ V(x,t)]dx \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs F et V, on note $F \otimes V = (F_iV_j)$ le tenseur d'ordre 2 (produit contracté). Pour un tenseur d'ordre 2 $A = (A_{ij}(x) = (A_1,A_2,A_3)^T$ (une matrice (3×3)), $Div\ A$ est un tenseur d'ordre 1 $F(x) = (F_1,F_2,F_3)$(vecteur) défini par $F_i = Div\ A_i$.
Avec cette convention on écrit d'une manière vectorielle

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} = \iiint_{D(t)} [\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \mathrm{Div}\ (F \otimes V)]dx$$

ou encore

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} = \iiint_{D(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)dx + \iint_{\partial D(t)} (F \otimes V)\ .\ nds$$

de même

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} = \iiint_{D(t)} [\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + V\mathrm{Grad}\ F + F\mathrm{Div}\ V]dx$$

Bibliographie

[1] 0. Thual, Introd. MMC Déformables (Polytech, 1977)

[2] J. Salençon, MMC, Ed. Ecole Polytech, Paris (2007)

[3] F. Goley et S. Bonelli, MMC (ISITV, 2011)

[4] MMC, Arts et Métiers, Paris-Tech (2013)

[5] S. DEGHBOUDJ, Mécaniques des Milieux continus Cours et Applications, Université Larbi Tébessi de Tébessa, Département de Génie Mécanique
https://www.researchgate.net/publication/311909114