Chapitre 3 : - Transformée de Fourier des Signaux Non-périodiques

- Définition de la Transformée de Fourier continue et son Inverse
- Exemples
- Propriétés de la transformée de Fourier
- TF des signaux usuels

• Définition de la transformée de Fourier continue ou Intégrale de Fourier

On peut considérer la transformée de Fourier des fonctions non-périodiques comme une extension de la transformation par séries de Fourier des signaux périodiques dont la période est infinie ($T_0 \rightarrow \infty$). L'intervalle de fréquence F_0 tend alors vers zéro et le spectre devient donc une fonction continue d'où l'appellation de ***Transformée de Fourier Continue*** (TFC) et le signe 'somme' de la série de Fourier $\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)$ devient une intégrale, d'où le nom d'***Intégrale de Fourier*** $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\right)$.

En écrivant $s(t)$ sous la forme suivante :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{j2\pi nF_0 t}\,\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(\tau).\,e^{-j2\pi nF_0\tau}\,d\tau\right]$$

Après passage à la limite$T_0 \rightarrow \infty$, il vient :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau).\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau\right] df$$

D'où on peut définir la transformée de Fourier de $s(t)$, notée $S(f)\ ou\ \mathcal{F}\{s(t)\}$, et la transformée de Fourier inverse, notée $\mathcal{F}^{-1}\{S(f)\}$ par:

$$\textit{Transformée de Fourier directe}:\quad \mathcal{F}\{s(t)\} = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).\,e^{-j2\pi ft}\,dt \quad ,$$

$f: fréquence\ (Hz)$

$$ou\ \ X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).\,e^{-jwt}\,dt \quad , \quad avec\ w = 2\pi\ f\ :\ la\ pulsation\ (rad/s)$$

et

$$\textit{Transformée de Fourier Inverse}:\quad \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f).\,e^{j2\pi ft}\,df$$

$$ou\ bien\ en\ fonction\ de\ la\ pulsation\ :\ \mathcal{F}^{-1}\{S(w)\} = s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(w).\,e^{jwt}\,dw$$

$S(f)$ ou $(S(w))$ est en général une fonction complexe qui comprend une partie réelle $\mathcal{Re}\{S(f)\}$ et une partie imaginaire $\mathcal{Im}\{S(f)\}$ $tel\ que$:

$$\boldsymbol{S(f) = \mathcal{Re}\{S(f)\} - j\ \mathcal{Im}\{S(f)\}},$$

$$avec$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Re}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).\cos(2\pi f t)\,dt}$$

$$et$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Im}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).\sin(2\pi f t)\,dt}$$

L'amplitude $|S(f)|$ du spectre est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{|S(f)| = \sqrt{[\mathcal{Re}\{S(f)\}]^2 + [\mathcal{Im}\{S(f)\}]^2}}$$

et la phase est donnée par :

$$\boldsymbol{\varphi(f) = arctg\left(-\frac{\mathcal{Im}\{S(f)\}}{\mathcal{Re}\{S(f)\}}\right)}$$

L'opération de transformation de Fourier directe c'est-à-dire la recherche du spectre d'un signal est appelée Analyse de Fourier, (on cherche à déterminer par exemple la distribution de l'énergie ou la puissance du signal en fonction de la fréquence, ou encore extraire les fréquences utiles du signal et filtrer celles qui sont indésirables pour le choix d'un filtre approprié, etc…).

La transformation de Fourier inverse est dite opération de Synthèse de Fourier qui consiste à reproduire un signal à partir de son spectre, par exemple pour l'écouter si c'est un signal audio ou le visualiser si c'est un signal image ou vidéo.

Conditions d'existence de la transformée de Fourier

Pour qu'une fonction $x(t)$ait une transformée de Fourier il faut et il suffit que :

- $x(t)$ $soit\ bornée$: $|x(t)| \leq M$ où $M\ est\ une\ constante$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < +\infty$: $absolument\ convergente, ait\ une\ valeur\ finie$
- $les\ discontinuités$ de $x(t)$ $ainsi\ que$ $les\ maximums$ et $minimums$ $soient\ en$ $nombre\ fini.$

Mais pour que la transformée de Fourier de $x(t)$ existe et soit réciproque il suffit que $x(t)$ soit de carré sommable :

$\rightarrow$ $cela\ signifie\ que\ le\ signal\ x(t)\ ainsi\ que\ sa\ transformée\ de\ Fourier\ sont\ à\ énergie\ finie.$

$C'est\ le\ cas\ de\ tous\ les\ signaux\ physiques.$

- Exemples de transformées de Fourier continues

Exemple 1 :

On considère le signal exponentiel $x(t) = e^{-at}.u(t)$, $u(t)$ *est le signal échelon unité*

$* \; si \; a < 0 \; alors \; x(t) n'est pas \; absolument \; integrable \; donc \; X(w) \; (ou \; X(f)) \; n'existe \; pas.$

$pour \; a > 0 \;, X(w) \; est \; obtenue \; à \; partir \; de \; la \; définition \; de \; la \; transformée \; de \; Fourier \; par:$

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \, e^{-jwt} \; dt = -\frac{1}{a+jw} \; e^{-(a+jw)\,t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

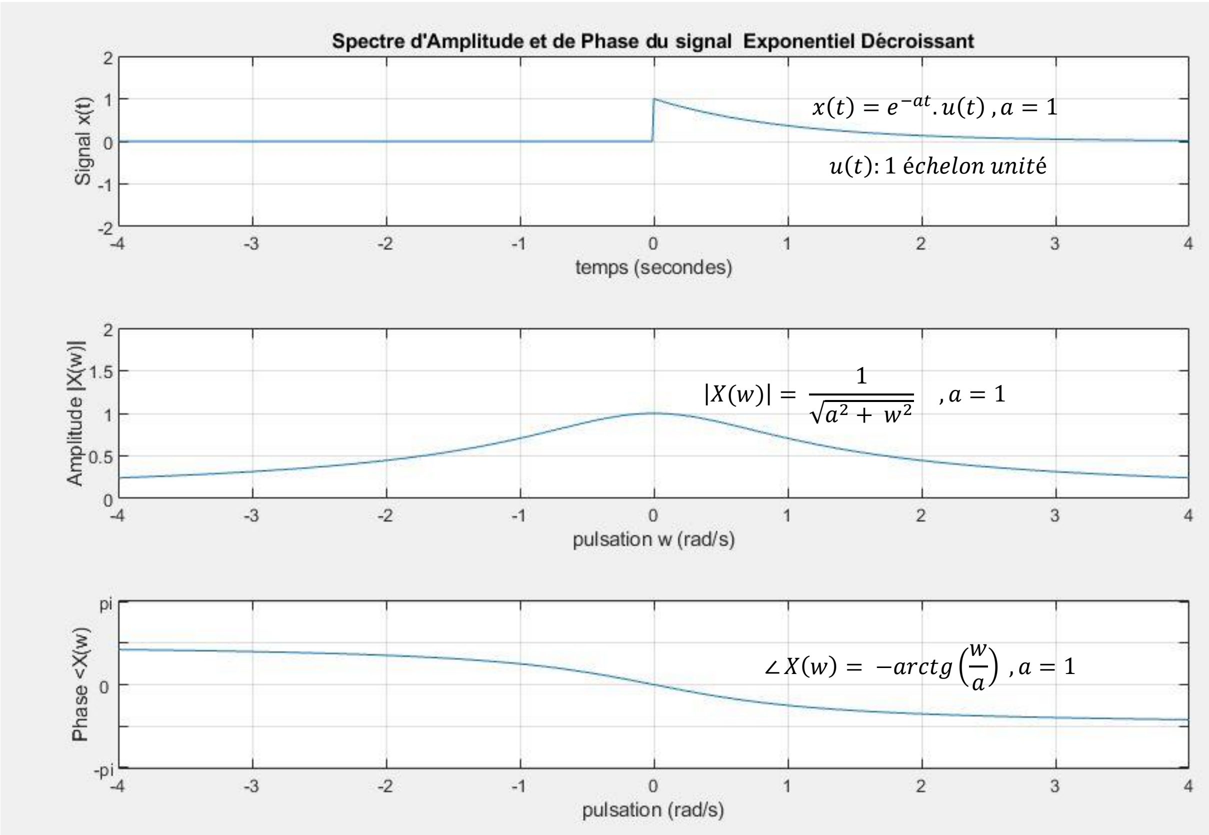
$$ce \; qui \; donne \; : \; X(w) = \frac{1}{a+jw} \;, \; a > 0$$

$$on \; écrit \; X(w) sous \; la \; forme \; d'une \; amplitude \; (appelé \; spectre \; d'amplitude)$$

$$et \; d'une \; phase \; (\; spectre \; de \; phase) en \; fonction \; de \; w:$$

$$X(w) = |X(w)| \, e^{j\,\emptyset\,(X(w))}$$

$$où \quad |X(w)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}} \quad et \; \emptyset\big(X(w)\big) = \angle X(w) = -arctg\left(\frac{w}{a}\right)$$

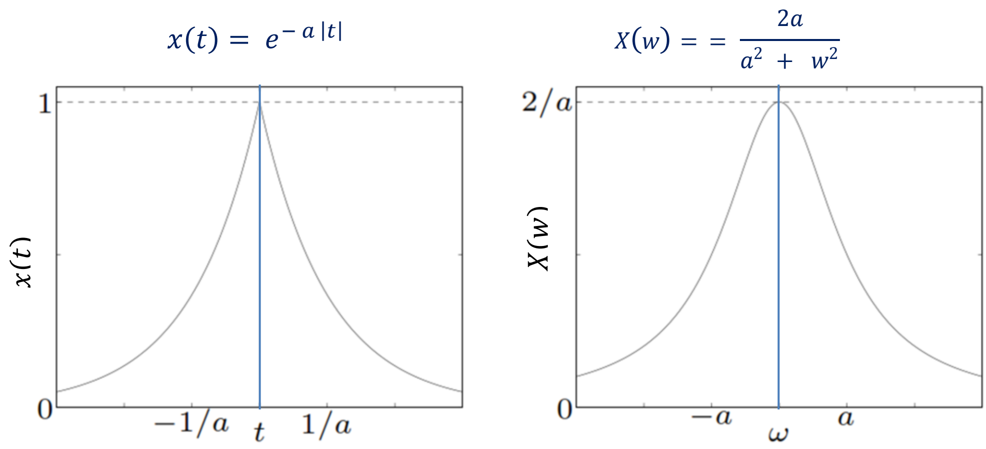


Exemple 2 :

Soit le signal $x(t) = e^{-a|t|}$ où $a > 0$. La transformée de Fourier de ce signal est déterminée en utilisant la définition :

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\, e^{-jwt}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{+at}\, e^{-jwt}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\, e^{-jwt}\, dt$$

$$X(w) = \frac{1}{a - jw} + \frac{1}{a + jw} = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$



- Propriétés de la transformée de Fourier

Soit une fonction $x(t)$ et sa transformée de Fourier correspondante$X(f)$, nous écrivons :

Analyse de Fourier

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f)$$

Synthèse de Fourier

Dans la plupart des cas, les transformées de Fourier ne sont pas calculées directement à partir des relations générales mais plutôt en utilisant les principales propriétés de la transformée de Fourier ci-après :

$$\boldsymbol{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f).\, e^{j2\pi f t}\, df}$$

Analyse de Fourier

Synthèse de Fourier

$$\boldsymbol{S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).\, e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

ou

$$\boldsymbol{s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(w).\, e^{jwt}\, dw}$$

$$\boldsymbol{S(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t).\, e^{-jwt}\, dt}$$

- Propriétés de la TF

✶ **Linéarité :** $\boldsymbol{a\,x(t) + b\,y(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boldsymbol{a\,X(f) + b\,Y(f)}$, $a \; et \; b \; 2 \; constantes$

✶ **Symétrie** : $\boldsymbol{si\;\; x(t)\; est\; réel\; alors\;\; on\; a\;\; X(-w) = X^*(w)}$

En effet, on a :

$$le\ conjugué\ de\ X(w)\ qui\ est\ obtenu\ par: \quad \boldsymbol{X^*(w)} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t).\,e^{-jwt}\,dt}\right]^*$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x^*(t).\left[e^{-jwt}\right]^*\,dt} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x^*(t).\,e^{jwt}\,dt}$$

$$comme,\;\; \boldsymbol{x^*(t) = x(t)}\;\; puisque\; \boldsymbol{x(t)}\; est\; réel\; (\in \mathbb{R})\,, on\; a\; alors:$$

$$\boldsymbol{X^*(w)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)\,e^{jwt}dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)\,e^{-j(-w)t}dt = X(-w)}$$

✶ **Dualité** : en observant par comparaison de la transformée de Fourier et son inverse on remarque une certaine symétrie réciproque que l'on appelle 'Dualité' telle que :

$$\boldsymbol{si\; on\; a \quad x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)\;\; ou\;\; X(w)}$$

$$\boldsymbol{alors\;\; X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)\;\; ou\;\; 2\pi\, x(-w)}$$

✶ **Translation temporelle** (signaux retardés ou avancés) :

$$si\; on\; a \quad \boldsymbol{x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(w)}$$

$$alors \quad \boldsymbol{x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\,wt_0}\,X(w)}$$

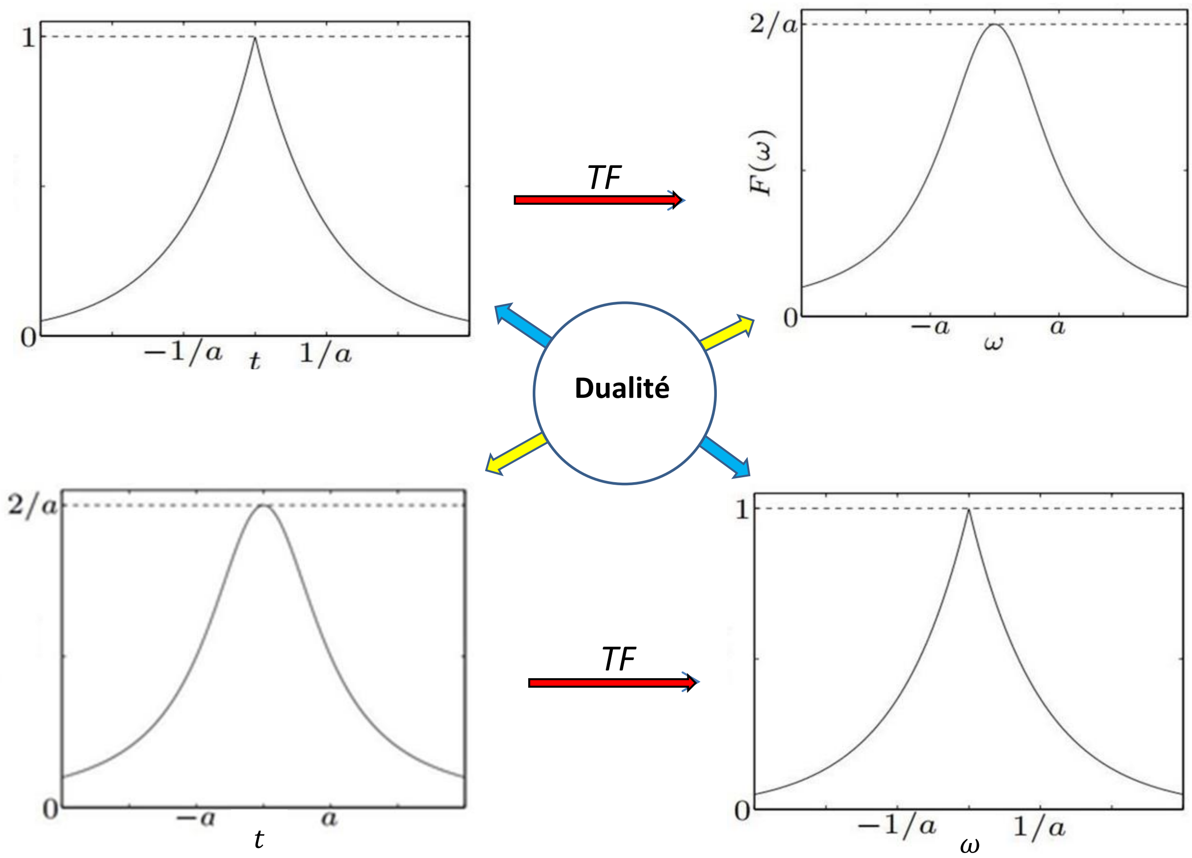
Preuve :

$$on\; a \quad \boldsymbol{\mathcal{F}\{x(t-t_0)\}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(t-t_0).\,e^{-jwt}\,dt} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(\sigma).\,e^{-jw(\sigma+t_0)}\,d\sigma}$$

$$= \boldsymbol{e^{-jwt_0}}\,.\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x(\sigma).\,e^{-jw(\sigma)}\,d\sigma} \;=\; \boldsymbol{e^{-jwt_0}\,.X(w)}$$

Conséquence : un signal translaté dans le temps n'affecte pas l'amplitude de sa transformée de Fourier, le spectre d'amplitude reste inchangé . Seule la phase est affectée, c'est-à-dire le spectre de phase change par l'ajout du déphasage $\varphi_0 = -\,wt_0$.

Schémas de principe de dualité spectrale des signaux



✶ <u>Différentiation et Intégration :</u>

La TF de la dérivée d'un signal est donnée par :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega\, X(\omega).e^{j\omega t}\, d\omega \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega.X(\omega)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n.X(\omega) \quad , n \text{ entier naturel } \neq 0$$

Une différentiation dans le domaine temporel se traduit par une multiplication par $j\omega$ dans le domaine fréquentiel. Ceci est très utile dans la résolution des équations différentielles linéaires.

<u>Intégration d'un signal :</u>

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, dt \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi.X(0).\delta(\omega)$$

Le terme $\pi.X(0).\delta(\omega)$ représente l'effet de la composante continue ou valeur moyenne du signal qui peut en résulter par l'intégration

✶ **Homothétie (Changement d'échelle) :**

$$si\ on\ a \quad \boldsymbol{x(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boldsymbol{X(\omega)} \quad \boldsymbol{alors} \quad \boldsymbol{x(a\,t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{a}|}\ \boldsymbol{X}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{a}}\right),$$

$$a\text{: } le\ facteur\ d'échelle$$

Preuve :

$$on\ a \quad \mathcal{F}\{x(a\,t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at).e^{-j\omega t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau\,, & a > 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau\,, & a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|}\ X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\text{où} \ \ \boldsymbol{\tau = a.t}$$

On remarque qu'une contraction de l'échelle temporelle $(a > 1,\ signal\ comprimé)$ correspond à extension de l'échelle fréquentielle $(b = \frac{1}{a} < 1, spectre\ dilaté)$ et vice versa.

✶ **Translation dans le domaine fréquentiel** (Modulation des signaux temporels)

Un signal $x(t)\ de\ spectre\ X(f)\ (\ ou\ X(\omega)$ multiplié par une exponentielle complexe $e^{j2\pi f_0 t}\ (\ ou\ e^{j\omega_0 t})$ correspond à une translation de $-f_0\ (décalage) du\ spectre\ X(f) de\ x(t)$ dans le domaine fréquentiel.

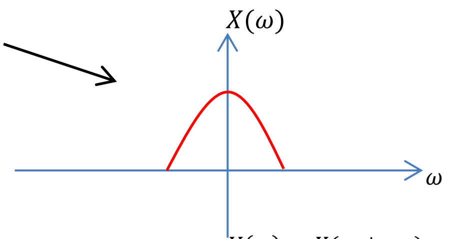
Un signal $x(t)\ de\ spectre\ X(f)\ (\ ou\ X(\omega)$ multiplié par une sinusoïde pure de fréquence $f_0\ (\ ou\ \omega_0)$ correspond à une translation de $\pm\ f_0\ du\ spectre\ X(f) de\ x(t)$ dans le domaine fréquentiel. C'est le phénomène de la modulation d'amplitude des signaux (messages d'information) par des sinusoïdes (les porteuses).

$$si\ on\ a \quad \boldsymbol{x(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boldsymbol{X(\omega)}$$

$$alors \quad \boldsymbol{x(t)e^{j\omega_0 t}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boldsymbol{X(\omega-\omega_0)} \quad \boldsymbol{avec\ \omega_0 \in R}$$

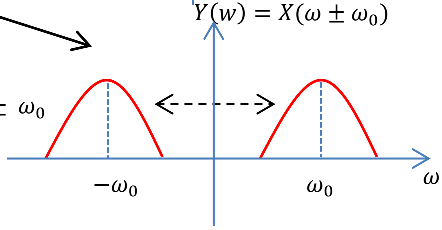
$$ou \quad \boldsymbol{x(t)e^{j2\pi f_0 t}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boldsymbol{X(f-f_0)} \quad \boldsymbol{avec\ f_0 \in R\,,} \qquad \boldsymbol{\omega_0 = 2\pi f_0}$$

Soit un signal $x(t) dont\ le\ spectre\ X(\omega)\ est$:

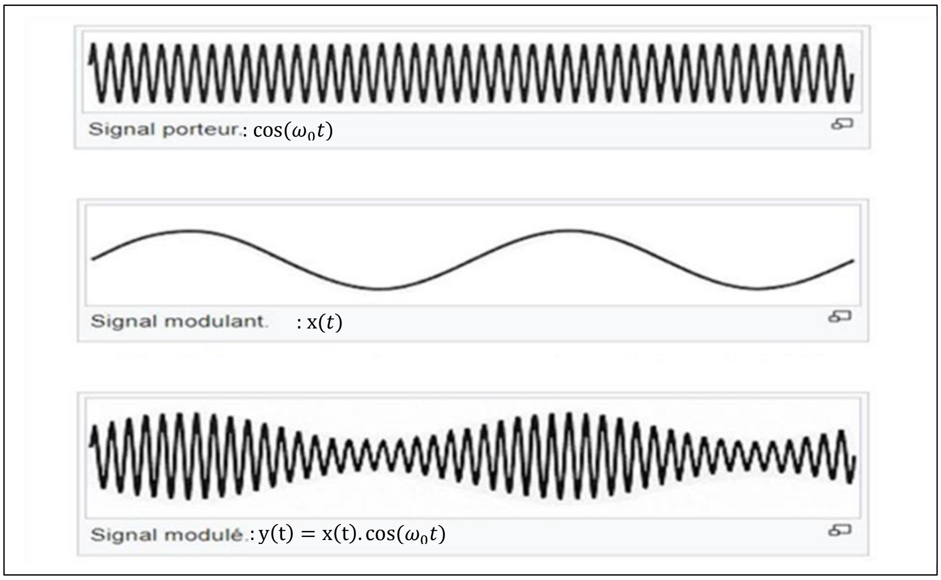


$signal\ y(t) = x(t)\,.\cos(\omega_0 t)\ a\ pour\ spectre\ Y(w) = X(\omega \pm \omega_0)$

Translation du spectre $X(\omega) de\ \pm\ \omega_0$



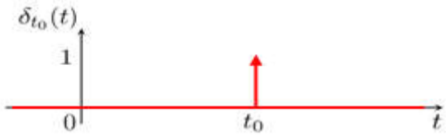
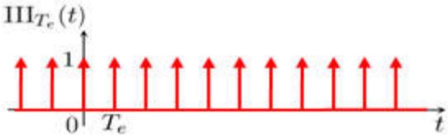
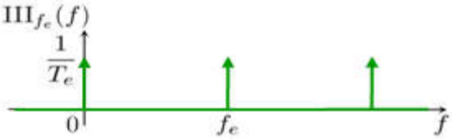
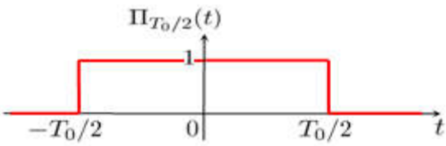
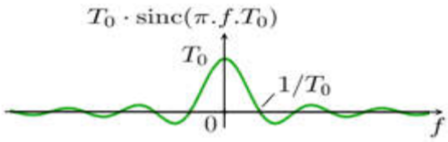
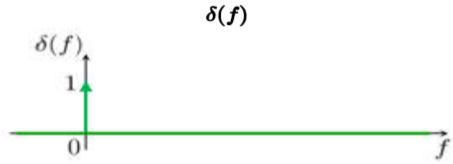
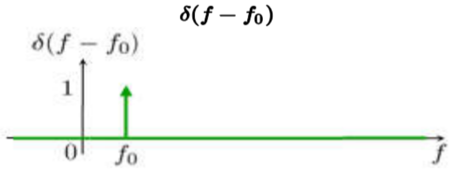
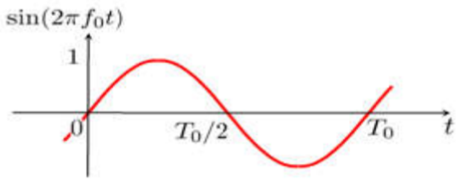
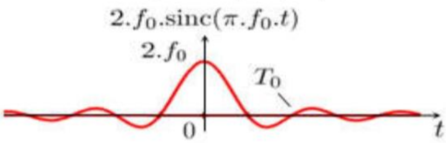
Exemple de modulation de deux signaux



Propriétés de Parité de la transformée de Fourier

Propriété du signal $x(t)$	*Propriété du spectre* $X(f)$ *ou* $X(\omega)$
- *réel quelconque*	- *complexe* ($\mathcal{Re}$. *paire*, $\mathcal{Im}$. *impaire*)
- *réel pair*	- *réel pair*
- *réel impair*	- *imaginaire impair*
- *imaginaire quelconque*	- *complexe* ($\mathcal{Re}$. *impaire*, $\mathcal{Im}$. *paire*)
- *imaginaire pair*	- *imaginaire pair*
- *imaginaire im pair*	- *réel impair*
- *complexe impair*	- *complexe pair*
- *complexe impair*	- *complexe impair*

Transformées de Fourier Usuelles (https://fr.wikiversity.org/wiki/Transform%C3%A9es_de_Fourier_usuelles)

Fonction	Représentation temporelle	Représentation fréquentielle
Pic de Dirac	$\delta(t)$ 	1 
Pic de Dirac décalé de t_0	$\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$ 	$e^{-j.2\pi.f.t_0}$ 
Peigne de Dirac $T_e = \frac{1}{f_e}$	$Ш_{T_e}(t)$ 	$Ш_{f_e}(f)$ 
Fonction porte de largeur T_0	$\Pi_{T_0/2}(t)$ 	$T_0 \cdot \mathrm{sinc}(\pi.f.T_0)$ 
Constante	1 	$\delta(f)$ 
Exponentielle complexe	$e^{j.2\pi.f_0.t}$	$\delta(f - f_0)$ 
Sinus	$\sin(2\pi.f_0.t + \varphi_0)$ 	$\frac{1}{2.j} \cdot (e^{j.\varphi_0} \cdot \delta(f - f_0) - e^{-j.\varphi_0} \cdot \delta(f + f_0))$  *Représentation du spectre d'amplitude
Cosinus	$\cos(2\pi.f_0.t + \varphi_0)$	$\frac{1}{2} \cdot (e^{j.\varphi_0} \cdot \delta(f - f_0) + e^{-j.\varphi_0} \cdot \delta(f + f_0))$
Sinus cardinal	$2 \cdot f_0 \cdot \mathrm{sinc}(2\pi.f_0.t)$ 	$\Pi_{2f_0}(f)$