Année Universitaire 2019-2020

Master I (assurance non vie)

Correction Série TD n=3

<u>Rappel de Cours</u>

1)

Proba(non ruine après un an) = $P(R > -K)$ avec R = Résultat et K = richesse disponible

= Proba($nP+n\rho P-\sum X_i > -K$) ou P représente la prime pure, ρ le taux de chargement de sécurité et X_i les sinistres individuels

= Proba($\sum X_i - nP < K+n\rho P$)

= Proba($(\sum X_i - nP)/\sigma_{\sum Xi} < (K+n\rho P)/\sigma_{\sum Xi}$) et ici $\sigma_{\sum Xi} = \sqrt{n}.\sigma_X$ = car les risques sont indépendants. En remplaçant cette expression, puis en divisant les parties gauche et droite de l'inégalité par $\sqrt{n}$, on obtient :

= Proba($(\text{moyenne}(X) - P)/\sigma_X < (K+n\rho P)/\sqrt{n}\sigma_X$)

La partie gauche converge vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (théorème central limite). La partie droite correspond à la définition du coefficient β .

= $\Pi(\beta)$ *ou Π est la fonction de répartition de la loi de Gauss (ou loi normale).*
2)

$\beta = (K+n\rho P)/\sigma_{\sum Xi}$ *= (Fonds propres + E(résultat annuel)) /* $\sigma_{\text{résultat annuel}}$

Note *:1* KDa=1000 Da

Exercice 1

1) Quel est la valeur du coefficient de sécurité β lorsque K = 200 000 euros, ρ = 5% et n = 3000 ?

Application numérique :

β = *(200 000 + 3000.5%.500) / ($\sqrt{3000}$.2000) =2,51*

$\Pi(\beta)$ *= 0,994 ou encore une probabilité de ruine de 0,6% ce qui est trop élevé.*

2) On veut avoir un coefficient de sécurité $\beta > 4$.

Un coefficient de sécurité $\beta > 4$ correspond à une probabilité de ruine inférieure à 1/10000 ($\Pi(4)$ = 0,0032%).

Un cherche donc $\beta = (K+n\rho P)/\sqrt{n}\,\sigma_X \geq 4$.

a. Quel doit être la marge K pour ρ = 5% et n = 3000 ?

$K \geq 4.\sqrt{n}\sigma_X - n\rho P$ *= 4.racine(3000).500 – 3000.5%.500 = 363 178.*

b. Quel doit être le coefficient de sécurité ρ pour K = 200 000 KDa et n = 3000 ?

$\rho \geq (4.\sqrt{n}\sigma_X - K) / nP$ *= (4. ($\sqrt{3000}$.500 – 200 000)/(3000.500) = 15,9%.*

c. Quel devrait être le nombre de risques à gérer n pour K = 200 000 euros et ρ = 5% ?

$n.P.\rho - 4.\sqrt{n}\sigma_X + K \geq 0$.

Soit une inéquation du second degré en $\sqrt{n}$.
Le déterminant $(4.\sigma_X)^2 - 4.P.\rho.K$ = 44 000 000 est positif : deux solutions.

$(4.\sigma_X \pm \sqrt{determinant})/(2.\ P.\rho)$

$\sqrt{n} \leq 27$*, soit* $n \leq 747$ *(c'est pratiquement l'inactivité)*

$\sqrt{n} \geq 293$*, soit* $n \geq 85\,653$ *(c'est un objectif sans doute impossible)*

<u>Interprétation des résultats :</u>
- aucune des trois solutions n'est vraiment réaliste. La véritable solution à ce genre de problèmes réside dans la souscription d'une réassurance (diminuer beaucoup le risque en perdant un peu d'espérance de bénéfice).

- la partie difficile de cette modélisation réside dans l'estimation de σ_X. Une part importante du cours sera consacrée à ce problème.

Exercice 2

1) Donner l'expression du coefficient de sécurité β_1 lorsque $K_1 = 20\%.U_1$. Application numérique pour $U_1 = 1000$, $\rho_1 = 15\%$ et $T_1 = 100$?

$\beta_1 = (K_1+\rho_1 U_1)/T_1 = 35\%.U_1/T_1 = 3,5$

$\Pi(\beta_1)$ = *0,9998 ou encore une probabilité de ruine de 0,023%.*

2) On a :

$\beta_2 = (K_2+\rho_2 U_2)/T_2 = 30\%.U_2/T_2 = 2,586$

$\Pi(\beta_2)$ = *0,9951 ou encore une probabilité de ruine de 0,485%.*

Les résultats vont s'ajouter après fusion et on considère qu'on peut allouer à la garantie des opérations globales K_1+K_2. Quel est le coefficient de sécurité correspondant ?

$\beta_3 = (K_1+K_2+\rho_1 U_1+\rho_2 U_2)/\sqrt{(T_1^2+T_2^2)} = 4,338$

$\Pi(\beta_3)$ = *0,999993 ou encore une probabilité de ruine de 0,0007%.*

3) D'après le cours, on a :

$$K = \beta.\sigma_{\text{résultat annuel}} - E(\text{résultat annuel})$$
$$K = 4.\sqrt{(T_1^2+T_2^2)} - \rho_1 U_1 - \rho_2 U_2 = 305,2$$

On peut donc « libérer » 200 + 150 – 305,2 = 44,8 tout en conservant un ensemble plus sûr que la plus sûre des deux sociétés initiales.

Pr.Zeghdoudi Halim