

Chapitre I : Etats d'équilibre limite

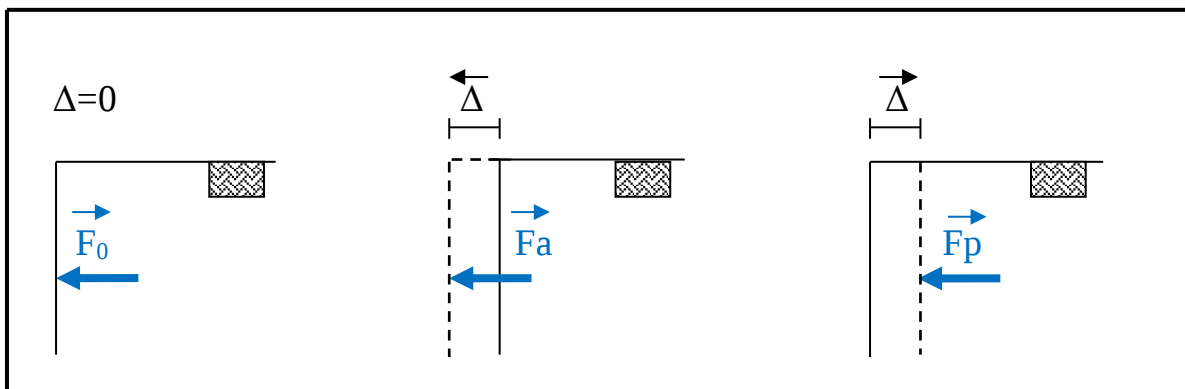
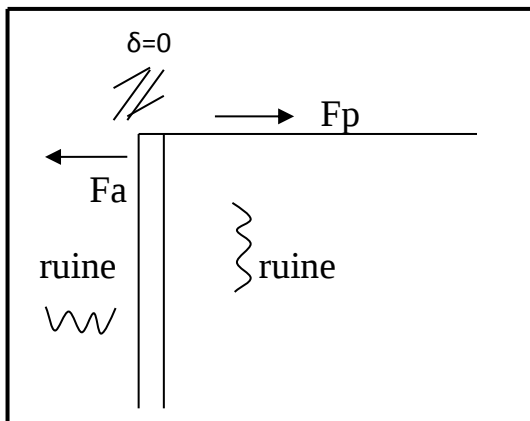
I/Relation pression latérale, déformation latérale :

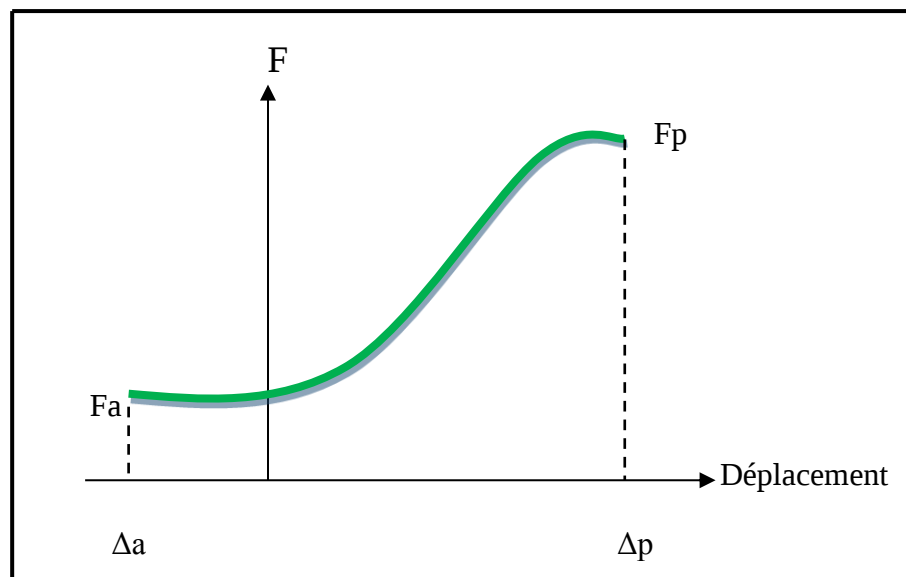
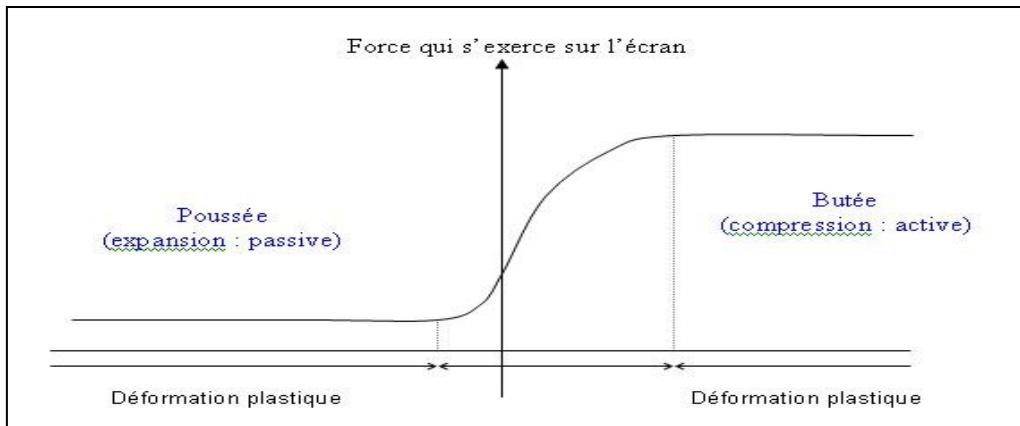
Soit un massif de terres appuie sur un écran rigide et lisse, le massif est en équilibre par l'action de l'écran et la réaction des terres sont égales.

-Si l'écran ne subit aucun déplacement $\delta=0$ donc on parle de la **pression des terres au repos**

-Si l'écran peut se déplacé $\delta \neq 0$ **vers l'extérieur**, la pression du massif va diminuer jusqu'à une valeur F_a après cette valeur le massif subit une rupture horizontale. F_a est appelé **poussé ou pression des terres active**.

-Si l'écran peut se déplacé **vers l'intérieur** $\delta \neq 0$, la pression du massif va augmenter jusqu'à une valeur F_p , après cette valeur le massif subit une rupture verticale. F_p est appelé **butée ou pression des terres passive**.



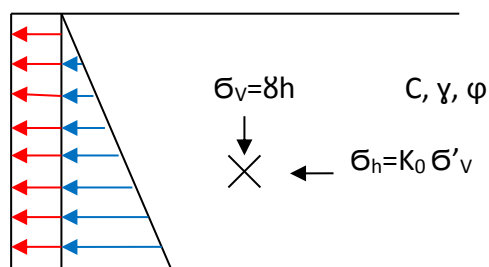


Relation entre la pression latérale et le déplacement latéral

II/Etats d'équilibre :

- Equilibre limite inferieur appelé équilibre active ou de poussé.
- Equilibre limite supérieur appelé équilibre passive ou de butée.
- Equilibre élastique c'est l'état de sol sans déformation latérale.

Le calcul de la poussée et la butée est liée au type d'équilibre qui correspond a une certain distribution des contraintes.



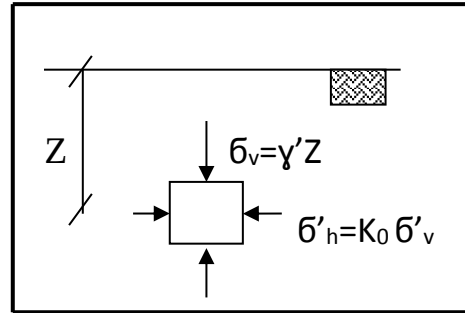
a/sol pulvérulent :

- Equilibre élastique :

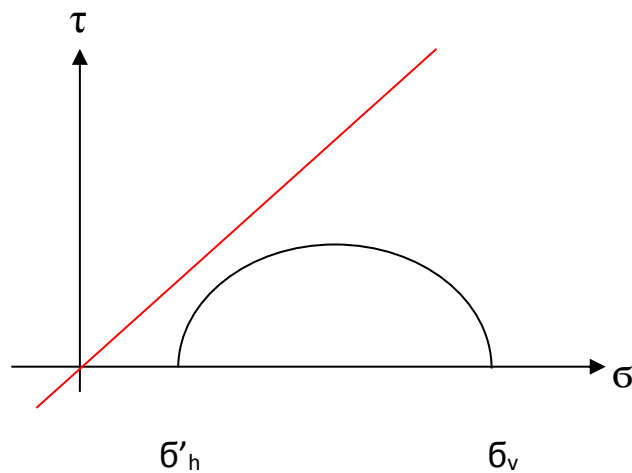
K_0 : coefficient au repos

$$K_0 = 1 - \sin \varphi$$

$$\sigma'_h = K_0 \gamma' h$$



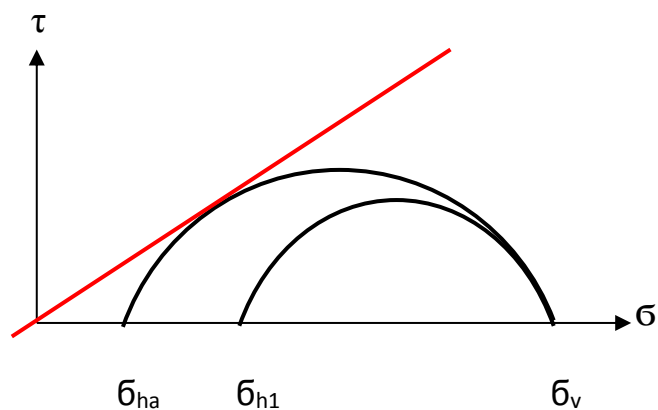
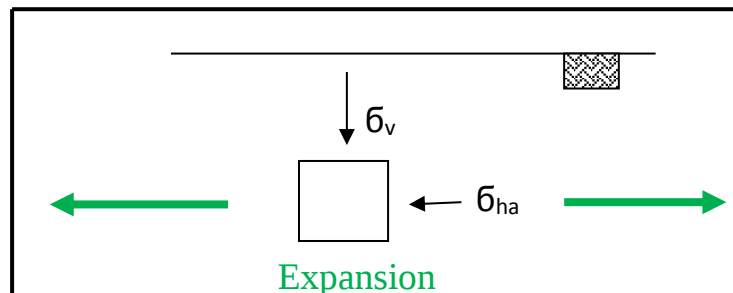
K_0 : pour les contraintes effectives seulement.



- Equilibre actif :

σ_{ha} : diminue

σ_v : constante



Nous sommes en présence d'une poussée.

La contrainte verticale reste constante et la contrainte horizontale va diminué jusqu'à σ_{ha} .

A la rupture : $\sigma_1 = \sigma_v$ et $\sigma_3 = \sigma_{ha}$

Le plan de rupture fait un angle $\theta = 45 - \varphi/2$

$$\sigma_{ha} = \sigma_v \tan^2 (45 - \varphi/2)$$

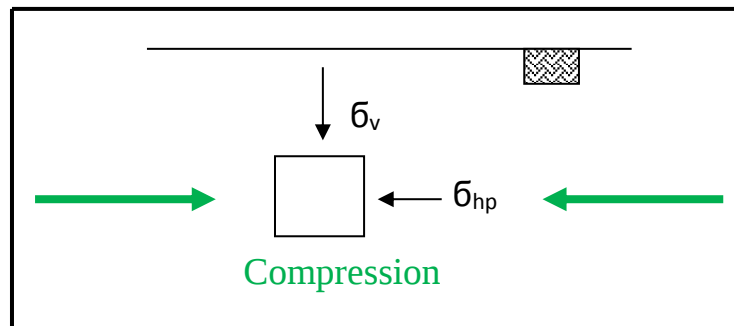
$$Ka = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Ka : coefficient de poussée active

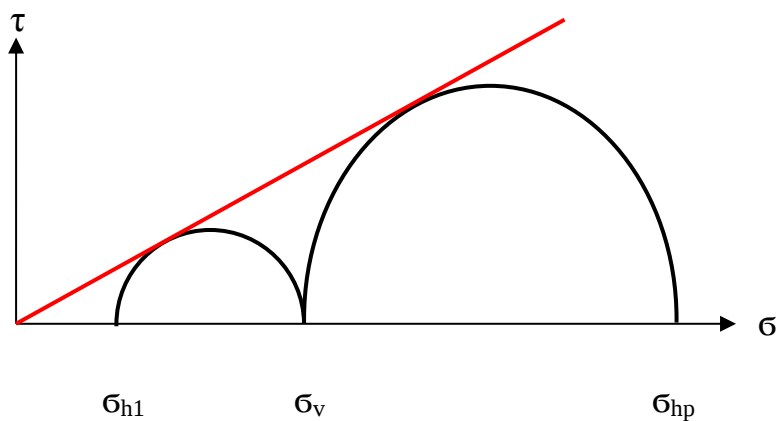
- Equilibre passive :

σ_{hp} : diminue

σ_v : constante



Nous sommes en présence d'une butée.



La contrainte horizontale va augmenté jusqu'à σ_{hp} .

Les plans de rupture font avec le plan principale majeur qui est le plan verticale un angle de : $\theta = 45 + \frac{\phi}{2}$

$$\sigma_{hp} = \sigma_v \tan^2 (45 + \frac{\phi}{2})$$

$$Kp = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \frac{1}{Ka}$$

b/Sol cohérent :

Pour les sols cohérents on va considérer deux types de comportement :

- 1) A long terme : Les contraintes en terme de contraintes effectives et les paramètres de résistances sont C' ϕ'
- 2) A court terme : Les contraintes en termes de contraintes totale et les paramètres de résistance sont C_u ϕ_u

• Equilibre élastique :

1) A long terme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_v = \gamma Z \\ \sigma'_h = K_0 \sigma'_v = K_0 \gamma' Z \end{array} \right.$$

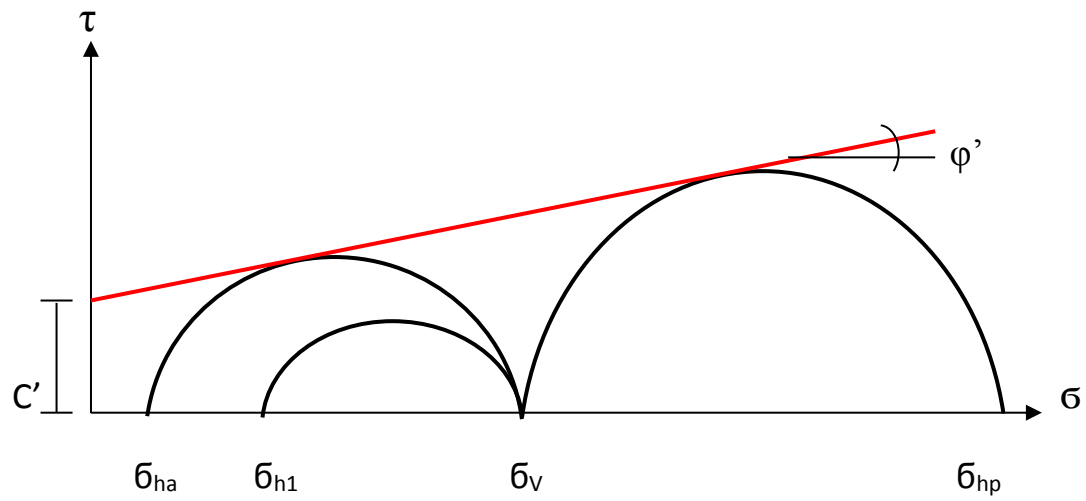
2) A court terme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_v = \gamma Z \\ \gamma' = \gamma - \gamma_w \\ \sigma_h = K_0 \gamma' Z + U \end{array} \right.$$

• Equilibre de poussée et de butée :

1) A long terme :

$$\begin{array}{ll} \sigma'_{ha} = Ka \sigma'_v - 2C' \sqrt{Ka} & \text{Etat actif} \\ \sigma'_{hp} = Kp \sigma'_v + 2C' \sqrt{Kp} & \text{Etat passif} \end{array}$$

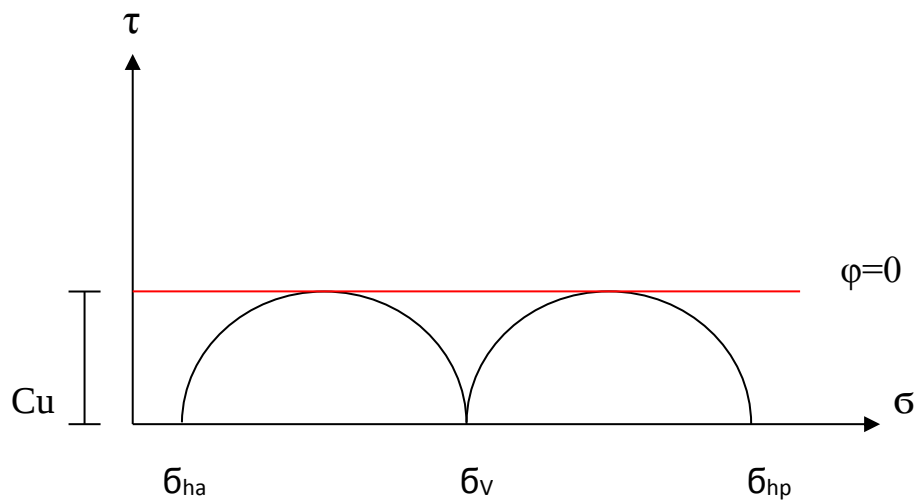


2) A court terme :

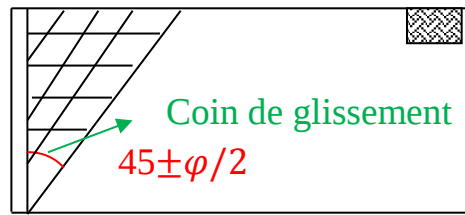
$$\sigma_v = \gamma Z$$

$$K_a = 1 \rightarrow \sigma_{ha} = \sigma_v - 2C_u \quad \text{Etat actif}$$

$$K_p = 1 \rightarrow \sigma_{hp} = \sigma_v + 2C_u \quad \text{Etat passif}$$



III Calcul de la poussée et de la butée :



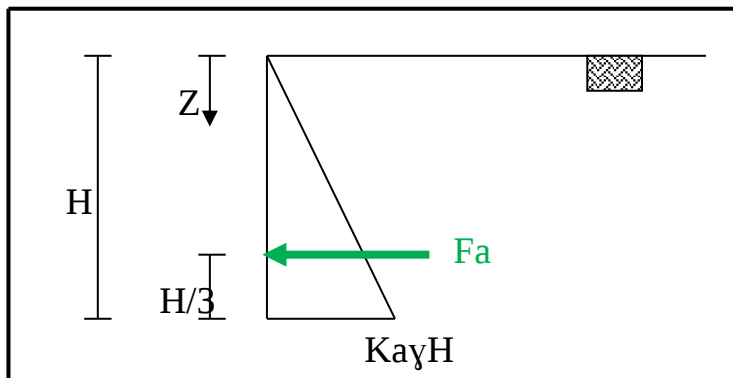
1/Méthode de Rankine :

La méthode de Rankine repose sur les hypothèses suivantes :

- Le coin de glissement en entier est à l'état d'équilibre limite.
- On ne tient pas compte le frottement entre le sol et l'écran.

Sols pulvérulent :

- Massif non chargée :



$$\sigma_{ha} = K_a \gamma Z \quad (\text{poussée})$$

$$\sigma_{hp} = K_p \gamma Z \quad (\text{butée})$$

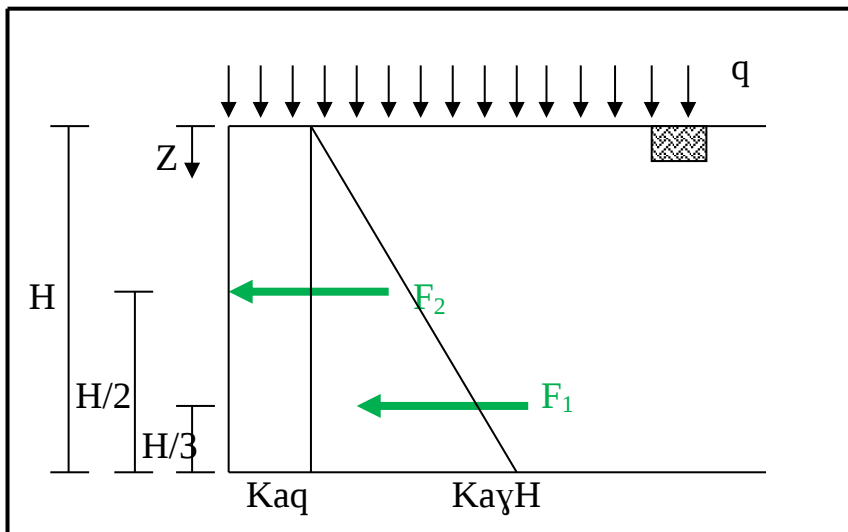
➤ La force de poussée et de butée :

$$F_a = \int \sigma_{ha} dZ \rightarrow F_a = \frac{1}{2} K_a \gamma H^2$$

$$F_p = \frac{1}{2} K_p \gamma H^2$$

Le point d'application de F_a et F_p est située à $H/3$ à la base du mur.

- Massif chargée :



$$\sigma_v = q + \gamma Z$$

$$\sigma_{ha} = K_a \sigma_v$$

$$\sigma_{hp} = K_p \sigma_v$$

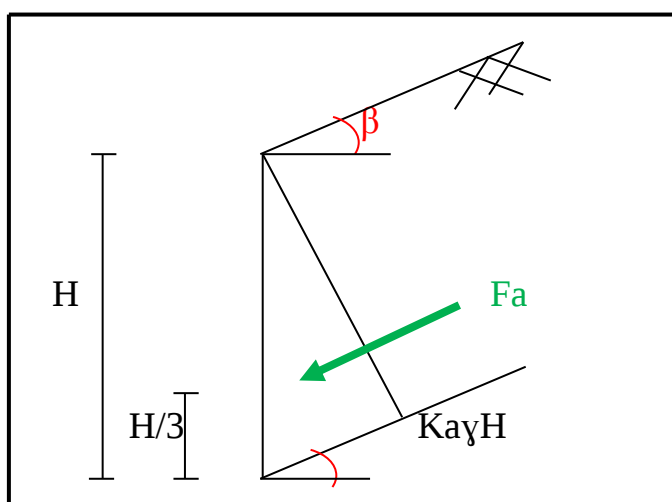
➤ La force de poussée et butée :

$$F_a = \int \sigma_{ha} dZ \rightarrow \underbrace{F_a = 1/2 K_a \gamma H^2}_{F1} + \underbrace{K_a q H}_{F2}$$

$$F_p = 1/2 K_p \gamma H^2 + K_p q H$$

Le point d'application de F_a (ou F_p) c'est la somme des moments par rapport à la base.

- Massif incliné :



$$K_a = \cos\beta \frac{\cos\beta - \sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\varphi}}{\cos\beta + \sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\varphi}}$$

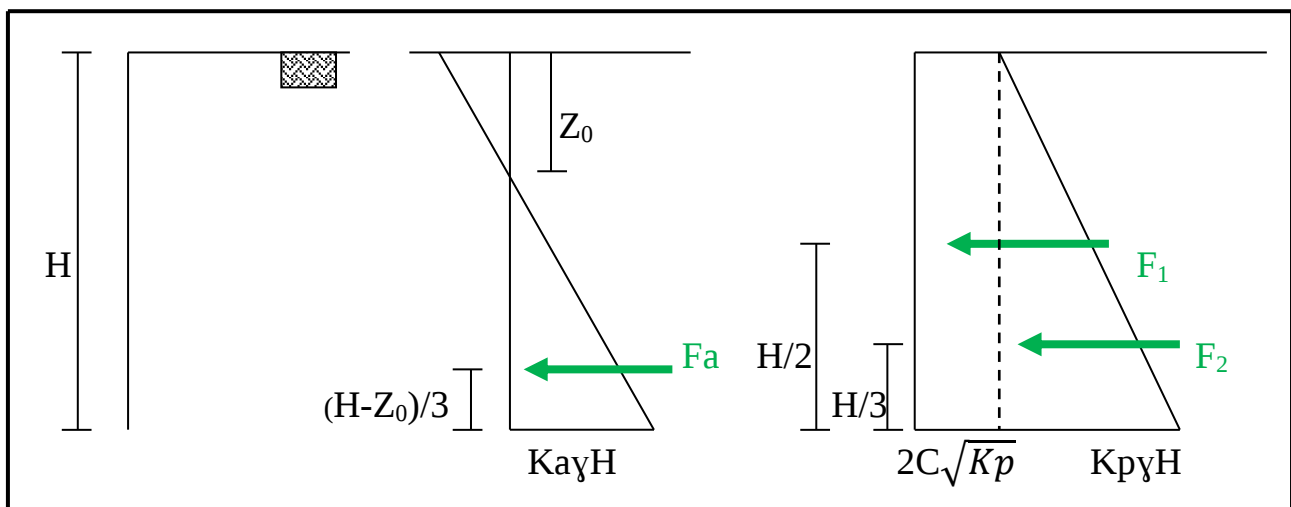
$$K_p = \cos\beta \frac{\cos\beta + \sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\varphi}}{\cos\beta - \sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\varphi}}$$

$$F_a = 1/2 K_a \gamma H^2$$

$$F_p = 1/2 K_p \gamma H^2$$

Sols coherent:

$$\sigma_{ha} = K_a \gamma Z - 2C\sqrt{K_a}$$



$$\sigma_{ha} = 0 \rightarrow Z_0 = \frac{2C\sqrt{K_a}}{K_a \gamma} \rightarrow F_a = \int_{Z_0}^H \sigma_{ha} dZ$$

$$F_a = 1/2 K_a \gamma (H^2 - Z_0^2) - 2C\sqrt{K_a} (H - Z_0)$$

Le sol est en traction jusqu'à Z0 (on la néglige) donc :

$$A \ 1/3(H - Z_0) \rightarrow F_a = 1/2 K_a \gamma (H^2 - Z_0^2)$$

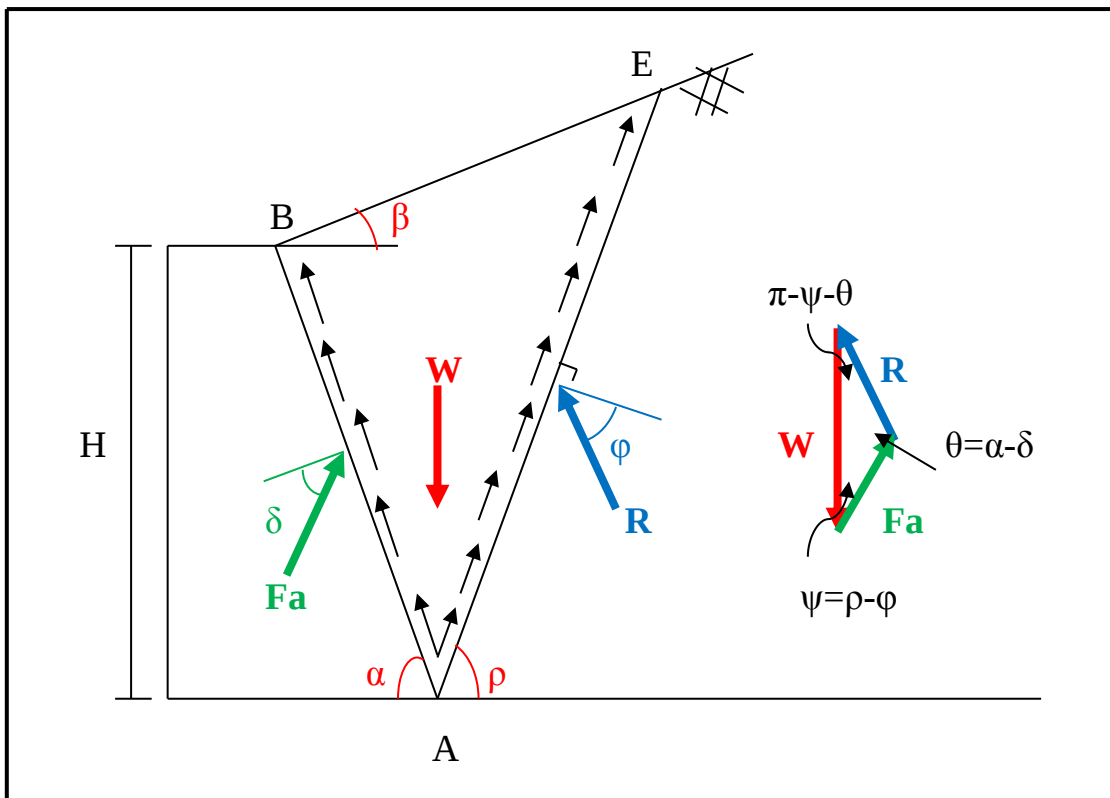
$$F_p = \int_0^H \sigma_{hp} dZ \rightarrow F_p = 1/2 K_p \gamma H^2 + 2C\sqrt{K_p}$$

$$(F_p = F_1 + F_2) \quad F_1 \text{ à } 1/2H ; \quad F_2 \text{ à } 1/3H$$

2/Méthode Coulomb:

Cette méthode est basé sur :

- Le coin de glissement est en équilibre globale.
- Le frottement entre le mur et le sol est près en comte.



Le coin de glissement est soumis à l'action de trois forces :

- Le poids des terres W .
- La résultante R des efforts de frottement le long de la ligne de glissement.
- L'action F_a de l'écran sur le massif.

A chaque position de plan de glissement (AE) va correspondre une valeur F_a qui assure l'équilibre de coin.

(AE) en fonction de ρ et en fonction de φ .

La valeur maximale de F_a est celle du plan de glissement réel

W : le poids du coin $W = \gamma \cdot A \cdot 1$

$$W = \frac{\gamma H^2}{2 \sin^2 \alpha} \left[\sin(\alpha + \rho) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\rho - \beta)} \right]$$

On applique la règle des sinus sur le diagramme des forces :

$$\frac{Fa}{\sin(\rho - \varphi)} = \frac{W}{\sin(\pi - \alpha - \rho + \varphi + \delta)}$$

$$Fa = \frac{W \sin(\rho - \varphi)}{\sin(\pi - \alpha - \rho + \varphi + \delta)}$$

$$Fa = \frac{\gamma H^2}{2 \sin^2 \alpha} \left[\sin(\alpha + \rho) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\rho - \beta)} \right] \frac{\sin(\rho - \varphi)}{\sin(\pi - \alpha - \rho + \varphi + \delta)}$$

δ : rugosité du mur

α : inclinaison du mur avec l'horizontale

β : inclinaison de la surface du sol avec l'horizontale

$$\frac{dFa}{d\rho} = 0 \rightarrow \text{la solution obtenue}$$

$$Fa = \frac{\gamma H^2}{2} \frac{\sin^2(\alpha + \varphi)}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha - \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\sin(\alpha - \delta) \sin(\alpha + \beta)}} \right]^2}$$

$$\text{Tel que : } Ka = \frac{\sin^2(\alpha + \varphi)}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha - \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\sin(\alpha - \delta) \sin(\alpha + \beta)}} \right]^2}$$

$$Fa = 1/2 Ka \gamma H^2$$

Si $\beta = 0$; $\delta = 0$ et $\alpha = 90^\circ$ (mur verticale et lisse avec surface horizontale)

$$\text{On a : } Fa = \underbrace{\frac{\gamma H^2}{2} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}}_{Ka} = \underbrace{\frac{\gamma H^2}{2} \tan^2(45 - \varphi/2)}_{Ka}$$

Dans le cas d'une butée :

$$Fp = \frac{\gamma H^2}{2} \underbrace{\frac{\sin^2(\alpha + \varphi)}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha + \delta) \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \beta)}{\sin(\alpha - \delta) \sin(\alpha + \beta)}} \right]^2}}_{Kp}$$

La méthode de Coulomb ne précise pas la position de la poussée ou de la butée mais on admet que le diagramme des contraintes est triangulaire ; donc il est à la trière inférieure

- Valeur du frottement entre le sol et le mur :

L'angle de frottement entre le mur et le sol est compris entre $-\phi$ et $+\phi$ dans le cas où le mur est bien fondé

$-\phi < \delta < +\phi$ mur bien fondé (on prend $0 < \delta < \phi$)

$\delta = 0$ mur doublement lisse

On prend généralement $\delta = 2/3\phi$ pour les murs en maçonneries ou en béton

$\delta = \phi$ murs très rugueux

Exemple :

Un mur de $H=4,6\text{m}$ $\gamma=16,5 \text{ KN/m}^2$ $\phi=30^\circ$ $\delta=2/3\phi$ $C=0$ $\alpha=90^\circ$

Déterminer la poussée active selon coulomb par unité de longueur

$$F_a = \frac{16,5 \cdot 4,6^2}{2} \frac{\sin^2(90+30)}{\sin^2 90 \sin(90-20) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(30+20) \sin(30-0)}{\sin(90-20) \sin(90+0)}} \right]^2}$$

$F_a = 51,90 \text{ KN/ml}$

Nomenclature Chapitre I : Etats d'équilibre limite

F_a : poussée ; pression des terres actives

F_p : butée ; pression des terres passive

Δ : déplacement

K₀ : coefficient de repos

K_p : coefficient de butée passive

K_a : coefficient de poussée active

σ_h : contrainte horizontale

σ_v : contrainte verticale

σ'_h : contrainte effective horizontale

U : pression interstitielle

γ : poids volumique du sol

γ' : poids volumique déjaugé du sol

φ : angle de frottement interne du sol

C : cohésion du sol

δ : rugosité du mur

β : inclinaison de la surface du sol avec l'horizontale

α : inclinaison du mur avec l'horizontale

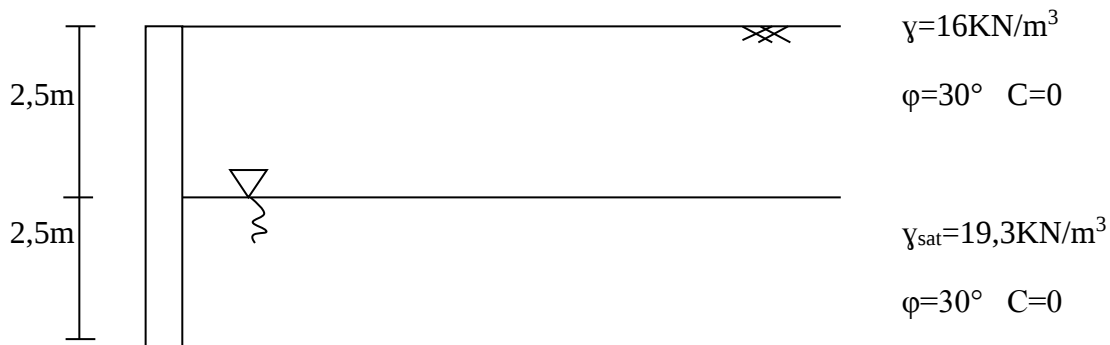
ρ : masse volumique

W : poids du coin de glissement

Série 01 : Etats d'équilibre limites

Exercice 01 :

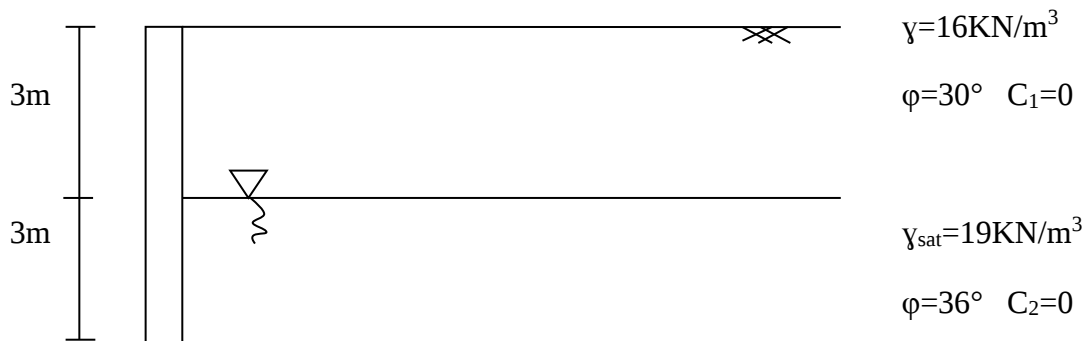
Pour un soutènement de la figure si dessous déterminez la pression latérale des terres au repos par unité de longueur du mur .Déterminez le point d'application de la résultante.



Exercice 02 :

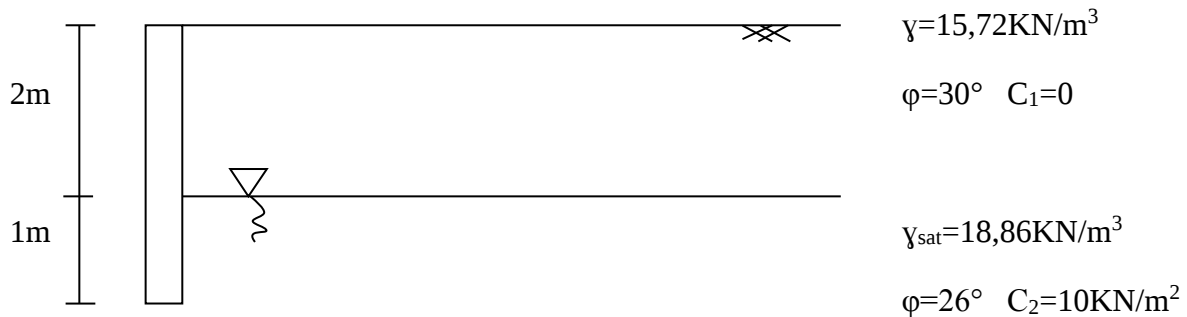
Déterminez la poussée selon Rankine par unité de longueur de mur.

Déterminez son point d'application.



Exercice 03 :

Déterminer la pression par unité de longueur du mur.



Exercice 04 :

Un mur de soutènement de $h=4,6\text{m}$; $\gamma=16,5\text{KN/m}^3$; $\phi=30^\circ$; $\delta=2/3\phi$; $C=0$; $\alpha=9^\circ$ et $\beta=0$ déterminer la poussée active selon Coulomb par unité de longueur du mur.

Exercice 05 :

Un mur de soutènement dont la face verticale arrière à 8m de hauteur supporte un sol sans cohésion de densité 1,75 ; $\phi=30^\circ$; la surface du sol est horizontale, trouver la grandeur de la direction de la poussée par mètre linéaire.

Exercice 06 :

Un mur de soutènement de $H=9,5\text{m}$ retient un sol sans cohésion dont la surface s'élève selon un talus incliné de 15° sur l'horizontale.

La densité du sol est 1,9 ; $\phi=32^\circ$; on néglige l'effet de frottement sur le mur. Déterminer la poussée.

Série 01 : Etats d'équilibre limites

Exercice 01 :

$$\sigma_v = \gamma h$$

$$U = \gamma_w h_w$$

$$\sigma'_v = \sigma_v - U$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v$$

$$(K_0 = 1 - \sin \varphi)$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + U$$

1^{ère} couche :

$$\sigma_v = \gamma h = 16,5 * 2,5 = 41,21 \text{ KN/m}^2$$

$$U = 0$$

$$\sigma'_v = 41,21 \text{ KN/m}^2$$

$$K_0 = 0,5$$

$$\sigma'_h = 0,5 * 41,21 = 20,62 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_h = \sigma'_h = 20,62 \text{ KN/m}^2$$

2^{ème} couche :

$$\sigma_v = \gamma h + \gamma_w h_w = 41,25 + 48,25$$

$$\sigma_v = 89,5 \text{ KN/m}^2$$

$$U = h_2 \rho = 2,5 * 10 = 25 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma'_v = \sigma_v - U = 89,5 - 25$$

$$\sigma'_v = 64,5 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0,5 * 64,5$$

$$\sigma'_h = 32,25 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + U = 32,25 + 25$$

$$\sigma_h = 57,25 \text{ KN/m}^2$$

$$F_1 = \frac{\sigma_h \cdot h_1}{2} = \frac{20,62 \cdot 2,5}{2} = 25,77 \text{ kN/ml}$$

$$F_2 = \sigma_h \cdot h_2 = 20,62 \cdot 2,5 = 51,55 \text{ kN/ml}$$

$$F_3 = ((\sigma_{h2} - \sigma_{h1}) \cdot h_2) / 2 = \frac{(57,25 - 20,62) \cdot 2,5}{2} = 45,78 \text{ kN/ml}$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = > \mathbf{F = 123 \text{ kN/ml}}$$

$$Z_1 = h_1/3 + h_2 = (2,5/3) + 2,5 = 3,33 \text{ m}$$

$$Z_2 = h_2/2 = 2,5/2 = 1,25 \text{ m}$$

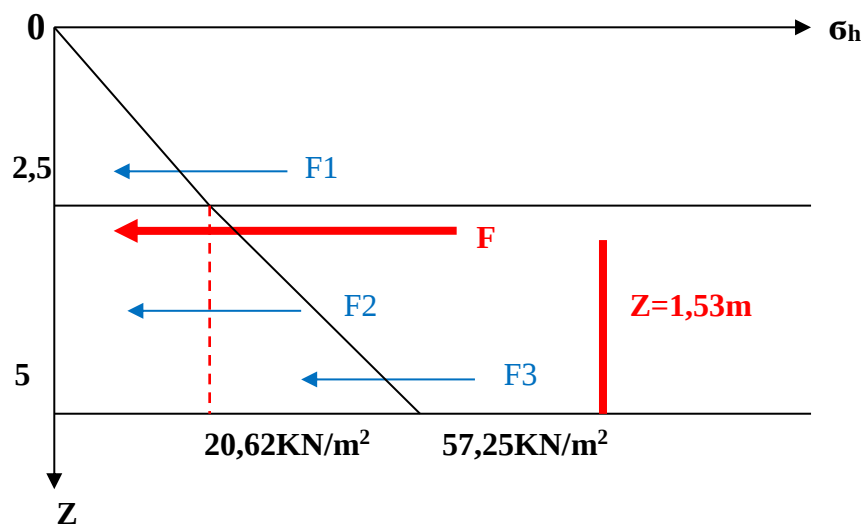
$$Z_3 = h_2/3 = 2,5/3 = 0,83 \text{ m}$$

$$FZ = F_1 Z_1 + F_2 Z_2 + F_3 Z_3$$

$$Z = (F_1 Z_1 + F_2 Z_2 + F_3 Z_3) / F$$

$$Z = (25,77 \cdot 3,33 + 51,55 \cdot 1,25 + 45,78 \cdot 0,83) / 123$$

$$\mathbf{Z = 1,53 \text{ m}}$$



Exercise 02 :

$$K_{a1} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = 1/3 = 0,33$$

$$K_{a2} = 0,25$$

$$\sigma_{h1} = K_{a1} \gamma_1 H_1 = 15,84 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_{h2} = K_{a2} \gamma_2 H_2 = 12 \text{ KN/m}^2$$

A 6m:

$$\sigma'_h = (\gamma_1 h_1 + (\gamma_2 - \gamma_w) h_2) K_{a2}$$

$$= (16,3 + (19 - 10) * 3) 0,25$$

$$\sigma'_h = 18,75 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + U = 18,75 + 30$$

$$\sigma_h = 48,75 \text{ KN/m}^2$$

$$F_1 = (\sigma_{h1} * h_1) / 2 = (15,84 * 3) / 2 = 23,76 \text{ KN/m}$$

$$F_2 = \sigma_{h2} * h_2 = 12 * 3 = 36 \text{ KN/m}$$

$$F_3 = ((\sigma_h - \sigma_{h2}) * h_2) / 2 = ((48,75 - 12) * 3) / 2 = 55,125 \text{ KN/m}$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 114,88 \text{ KN/m}$$

$$Z_1 = h_1 / 3 + h_2 = 3 / 3 + 3 = 4 \text{ m}$$

$$Z_2 = h_2 / 2 = 3 / 2 = 1,5 \text{ m}$$

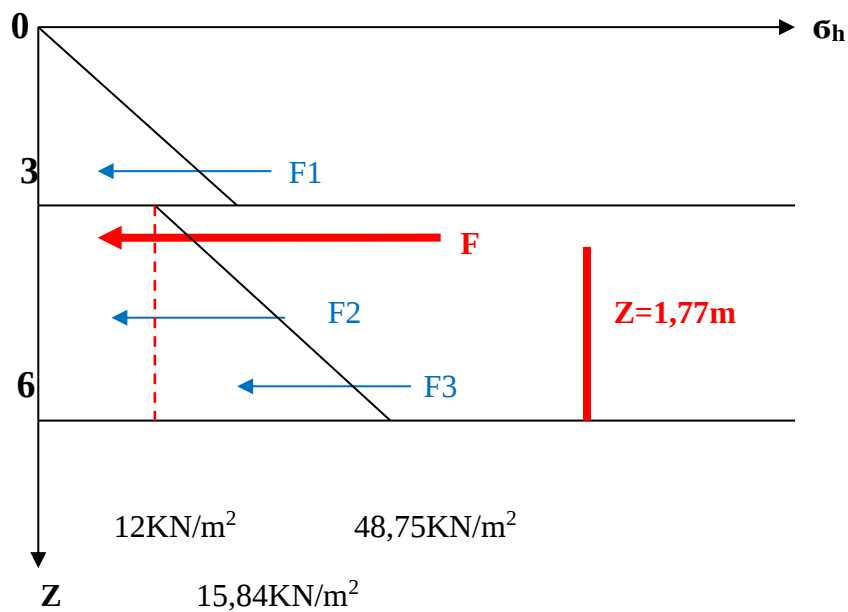
$$Z_3 = h_2 / 3 = 3 / 3 = 1 \text{ m}$$

$$FZ = F_1 Z_1 + F_2 Z_2 + F_3 Z_3$$

$$Z = (F_1 Z_1 + F_2 Z_2 + F_3 Z_3) / F$$

$$Z = (23,76 * 4 + 36 * 1,5 + 55,125 * 1) / 114,88$$

$$Z = 1,77 \text{ m}$$



Exercice 03 :

$$\sigma_{hp} = K_p \sigma_v + 2C\sqrt{K_p}$$

$$K_{p1} = \frac{1 + \sin \phi_1}{1 - \sin \phi_1} = 3 \quad K_{p2} = \frac{1 + \sin \phi_2}{1 - \sin \phi_2} = 2,56$$

A 2m:

$$\sigma_{h1} = K_{p1}(\gamma_1 h_1) = 94,32 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_{h1} = K_{p2}(\gamma_1 h_1) = 80,48 \text{ KN/m}^2$$

A 3m:

$$\sigma_{h2} = K_{p2}((\gamma_1 h_1) + \gamma'_2) + \gamma_w h_2 + 2C\sqrt{K_{p2}}$$

$$= 2,56(15,72 \cdot 2 + (18,86 - 10)) + 10 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{2,56}$$

$$\sigma_{h2} = 145,16 \text{ KN/m}^2$$

$$F_1 = 93,32 \text{ KN/ml}$$

$$Z_1 = 1,66 \text{ m}$$

$$F_2 = 80,48 \text{ KN/ml}$$

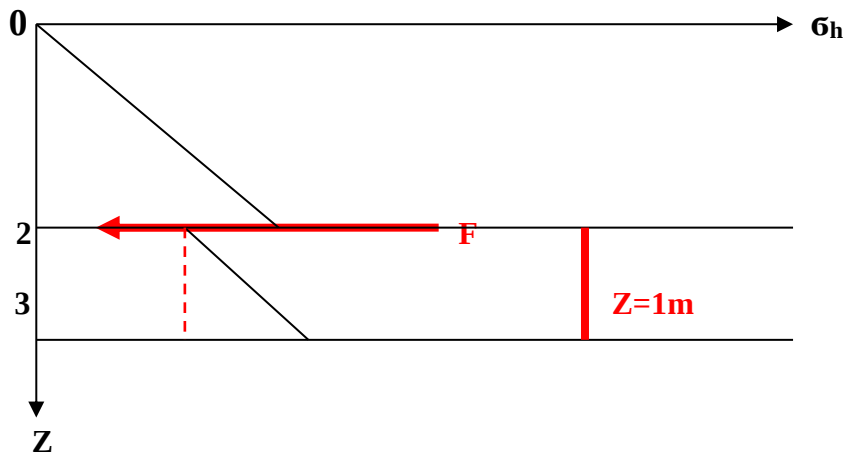
$$Z_2 = 0,5 \text{ m}$$

$$F_3 = 32,34 \text{ KN/ml}$$

$$Z_3 = 0,33\text{m}$$

$$F = 206,14 \text{ KN/ml}$$

$$Z = 1\text{m}$$



Exercise 05 :

$$H = 8\text{m} \quad C = 0 \quad d = 1,75 \rightarrow \gamma_h = 17,5 \text{ KN/m}^3 \quad \varphi = 30^\circ$$

$$F_a = 1/2 K_a \gamma_h h^2$$

$$K_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = 0,33$$

$$F_a = 1/2 * 0,33 * 17,5 * 8^2$$

$$F_a = 184,8 \text{ KN/ml}$$

Exercise 06 :

$$H = 9,5\text{m} \quad C = 0 \quad \beta = 15^\circ \quad d = 1,9 \rightarrow \gamma = 19 \text{ KN/m}^3 \quad \varphi = 32^\circ$$

$$K_a = \cos \beta \frac{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}}{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \varphi}} = 0,33$$

$$F_a = 1/2 K_a \gamma H^2 = 1/2 * 0,33 * 19 * 9,5^2$$

$$F_a = 282,93 \text{ KN/ml}$$

$$Z = h/3 = 3,16\text{m}$$

