

SEM Y

TD 2: Approximation des EDO

1. Déterminer toutes les méthodes de Runge-Kutta explicite à 3 étapes. Parmi ces méthodes on considère celle ayant le tableau de Butcher suivant

0		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
1	-1	2
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
		$\frac{1}{6}$

- Écrire le schéma de cette méthode.
- Calculer une solution approchée du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(t) + y(t), & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

par cette méthode en prenant 2 noeuds intérieurs équidistants.

2. On considère le schéma suivant dit de "Crank-Nicolson"

$$\begin{cases} u_0 = y_0, \\ u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}), & 0 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

- Ce schéma est-il implicite ou explicite? Que peut-on dire sur sa stabilité?
- Écrire l'erreur de consistance de ce schéma.
- Notons par $t_{i+1/2}$ le milieu de l'intervalle (t_i, t_{i+1}) . En écrivant les développements limités de y_i et y_{i+1} à l'ordre 3 par rapport à $y(t_{i+1/2})$ puis celui de $y''(t_{i+1})$ à l'ordre 1 par rapport à $y''(t_i)$ montrer que le schéma est consistant d'ordre 2. En déduire que le schéma converge à l'ordre 2.
- Montrer que le schéma de Crank-Nicolson peut être vu comme une méthode de Runge-Kutta à 2 étapes. Donner dans ce cas son tableau de Butcher.

3. Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 2. \end{cases} \quad (1)$$

- Écrire le problème (1) sous la forme d'un système différentiel.
 - Calculer la solution exacte x .
 - Calculer une solution approchée en $t = 1$ du système (1) à l'aide de la méthode de Runge-Kutta explicite à 2 étapes en prenant $n = 4$. Quelle est l'erreur commise?
4. En approchant $y'(t_i)$ par une formule de différence finie centrée proposer un schéma pour l'approximation du problème de Cauchy vu en cours. Étudier la convergence de ce schéma. Quel est son ordre de convergence?
 5. Quel est l'ordre de convergence des méthodes d'Adams-Bashforth et d'Adams-Moulton à 2 pas?