Dérivées partielles d'ordre supérieur

Si $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b)$ existe, alors la dérivée partielle / à x_2 est définie par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{x=(a,b)}$$

$$= \lim_{(k\to 0)} \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b)\right)$$

De même : si $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)$ existe, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{x=(a,b)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a+h,b) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)\right)$$

Rq : on note qu'en général l'ordre où on effectue les dérivées est important.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a,b)$$

2°) Notations :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b) = f_{x_1 x_2}(a,b) = (\partial_{x_2}\partial_{x_1} f)(a,b)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2}(a,b) = (\partial_{x_2}\partial x_1^2 f)(a,b)$$

$$= f_{x_1 x_1 x_2}(a,b)$$

Exemple : $\longrightarrow$ Page 27. (Exemple 1.27)

Soit $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si non} \end{cases}$

Cette fct admet des dérivées partielles en tout pt de $\mathbb{R}^3$.

i) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - xy^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2-y^2)y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

et $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(3x^2+y^2)xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ii) si $(x,y)=(0,0)$, on utilise la définition.

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

et $$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

— calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - f'_x(0,0)\right)$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{k^5}{k^4} - 0\right) = \boxed{1}$$

et $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(0-0) = \boxed{0}$$

Conclusion : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice : Soit $f(T,V) = \frac{RT}{V}$, $R = \text{cte}$

calculer les d.p. premiers et seconds de f.

Fonctions de classe C^n

Définition : une fct f est de classe C^n sur l'ouvert $O \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$ si toutes ses dérivés partielles.

$$\frac{\partial^{n_1+n_2} f}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} (x_1, x_2) \quad \text{avec } n_1+n_2 \leq n.$$

existent et sont continues en chaque point $(x_1, x_2) \in O$.

f est de classe C^∞ sur O si elle est de classe C^n pour tout entier n.

Exemple : La fct $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ est définie sur le domaine

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -|x| \leq y \leq |x|\}$$

Elle admet, en chaque pt de l'ouvert

$$O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -|x| < y < |x|\}$$

les dérivés partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Sont continues en chaque pt. de O.

Donc $f \in C^1$ sur O.

De m̂ les dérivées secondes de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y^2}{(x^2-y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x^2}{(x^2-y^2)^{3/2}}.$$

et $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{xy}{(x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

et on en déduit que f est de classe C^2 sur O

En fait il est aisé de se convaincre qu'elle est de classe C^∞ sur O.

$\underline{\text{Rq}}$: $f \in C^1 \implies f$ est diff.

$\underline{\text{Exemple}}$: Montrer que la fct $x \longrightarrow \|x\|$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f(x_1,x_2) = \|(x_1,x_2)\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{x_1}{\|x\|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{x_2}{\|x\|}$$

ces deux fcts sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\Longrightarrow f \in C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Donc f est différentiable

<u>Théorème des accroissement finis</u>

Si f est diff sur un domaine convexe $\mathcal{O}$

alors, pour tout $x, y \in \mathcal{O}$, $\exists\, \xi : \xi = x + \theta(y-x)$

et $\theta \in [0,1]$ /

$$f(y) - f(x) = (y_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) + (y_2 - x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi)$$

<u>Preuve</u> : ?

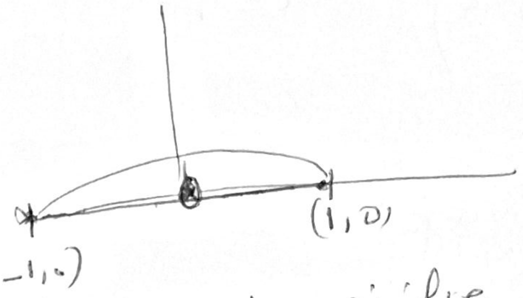
Exemple (Application) Le m exemple, $x = (-1,0)$

et $y = (1,0)$

Le segment $S = [-1,1] \times \{0\}$ reliant x et y

$f(y) - f(x) = 0$

$y_1 - x_1 = 2$, $y_2 - x_2 = 0$



Si la formule des A.f était vérifiée pour $\xi \in S \setminus \{(0,0)\}$ on aurait :

$$f(y) - f(x) = 0 = 2\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) + 0\frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi)$$

$$= 2\frac{\xi_1}{\|\xi\|} = \pm 2,$$ ce qui absurde.

Théorème ; Clairaut Si $f \in C^2$ sur O alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b)$$

Pour tout $(a,b) \in O$.

Preuve ; Soit $(a,b) \in O$ fixé,

$(a+h, b+k) \in O$. (h,k) fixé...

$g(u) = f(u, b+k) - f(u,b)$ — le Th des A.f

$$g(a+h) - g(a) = h\, g'(a+\theta h) \quad , \quad \theta \in [0,1]$$

et $g'(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(u,b)$

et appliq. le T. A fini , on obtient,

$$g'(a+\theta h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+\theta h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+\theta h, b)$$

$$= k \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a+\theta h, b+\theta' k)$$

$\theta' \in [0,1]$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(a+h, b+k) - f(a+h,b)}{k} - \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a+\theta h, b+\theta' k).$$

$k \to 0$

$$1/h\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a+h, b) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a+\theta h, b)$$

$h \to 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a,b).$$

cqfd