Université Badji-Mokhtar-Annaba **Département de Mathématiques**

$3^{\text{ème}}$ Année Licence Académique **2019-2020**

SEM Y

TD 1: Analyse Matricielle

Exercice 1:

— Montrer que la matrice $n \times n$ tridiagonale suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

est inversible.

— Montrer que les valeurs propres de A sont données par

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 1, \cdots, n.$$

— Calculer $\|A\|_2$, $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$.

— Calculer le conditionnement $k(A)$ de A en fonction de n. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} k(A)$. Que peut-on conclure?

Exercice 2:

Soit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & I \end{pmatrix}$ une matrice carré par blocs.

— Montrer que si B est inversible alors A est inversible. Calculer dans ce cas A^{-1}.

— Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} B^n & \sum\limits_{i=0}^{n} (B^i)\, C \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 0$.

— En déduire l'inverse de la matrice 4×4 suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3:

— Résoudre l'équation aux différences suivante

$$u_{i+1} + u_i + u_{i-1} + u_{i-2} = 0, \quad i \geq 3$$

avec les conditions initiales

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 2.$$

— Résoudre l'équation aux différences

$$u_{i+4} - 6u_{i+3} + 14u_{i+2} - 16u_{i+1} + 8u_i = i, \; i \geq 0$$

avec les conditions initiales $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$.