

• Fonction $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ (matrice Jacobienne) ①*

La diff au pt a est une app linéaire de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ que l'on représente par sa matrice $(p \times n)$ ^{l'ère} ^{colonne} sur les bases canoniques. Elle s'appelle matrice Jacobienne de f en a . Elle est donnée par :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p(a)}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_p(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$f: (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

Exemple : soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie

$$\text{par } f(x, y) = (x^2 + x \cos y, x^3 + y, y^2 - x)$$

Déterminer $J_f(x, y)$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et son Jacobien.
 (3x2).

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + \cos y & -x \sin y \\ 3x^2 & 1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix}.$$

Différentielle d'une application composée

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ($V \subset f(U)$)

Alors la fct composée $g \circ f$ définie sur U et à valeurs ds $\mathbb{R}^q$ est de classe C^1 sur U .

$$g \circ f : U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q.$$

et sa matrice Jacobienne est donnée par :

$$\forall a \in U : J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$$

$$\left. \begin{array}{l} J_g(f(a)) \text{ (de dimension } q \times p) \\ J_f(a) \text{ (" } p \times n) \end{array} \right\} \Rightarrow q \times n.$$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemple : $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par (2)'

$$g(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2).$$

Calculer la matrice Jacobienne de $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
définie par : $h(x, y) = g(x+y, xy)$.

Sol : $h = g \circ f$:

$$h: (x, y) \xrightarrow{f} f(x, y) = (x+y, xy) \xrightarrow{g} g(x+y, xy)$$

$$h(x, y) = (g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$$

$$\text{Donc } J_h(x, y) = J_g(f(x, y)) \cdot J_f(x, y). \quad (*)$$

$$\text{et } J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \text{ et } J_g(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$$

Alors la fct h est de classe $\mathcal{C}^1$ et son
matrice Jacobienne est par (*)

$$J_h(x, y) = J_g(x+y, xy) \cdot J_f(x, y)$$

$$= \begin{pmatrix} 2(x+y) & 2xy \\ 2(x+y) & -2xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(x+y) + 2xy^2 & 2(x+y) + 2yx^2 \\ 2(x+y) - 2xy^2 & 2(x+y) - 2yx^2 \end{pmatrix}$$

Rq On pourrait trouver ~~directe~~ et en calculant explicite ~~et~~.

$$h(x,y) = g(x+y, xy) = g(u,v) \\ = \left((x+y)^2 + x^2y^2, (x+y)^2 - x^2y^2 \right)$$

Exercice : Calculer J_h ~~directe~~ et ...

• Faire le composé de $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^p$ par g revient donc à remplacer les coordonnées $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{R}^p$ par des fcts

$$u_1(x_1, \dots, x_4), u_2(x_1, \dots, x_4), \dots, u_p(x_1, \dots, x_4) \dots$$

et g est considérée comme fct de $u_1, \dots, u_p$

et comme fct de $x_1, \dots, x_4$ et on a

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

Le changement de variable

Soit : $(x, y) \longrightarrow f(x, y)$

On pose $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$

Exprimer les d. p en (x, y) en fct de celles en (u, v) , ou (vice-versa)

Il s'agit d'un simple de composition de diff...

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longrightarrow \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

on définit La composée :

$$g = f \circ \phi, \text{ et } g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

Les Jacobiens de f et g vérifient la relation :

$$\begin{aligned} Jg &= Jf \cdot J\phi \\ \left(\frac{\partial g}{\partial u} \quad \frac{\partial g}{\partial v} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on déduit les dérivées partielles en u, v en fct de celles en x, y ou vice-versa. suivant le cas.

Exemple : Effectuer le changement de variable,

$x = 2u + 3v$, $y = u - 5v$ — dans une fct

$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Sol : Notons $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie

par : $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

Cette fct est de classe $\mathcal{C}^1$, et on a :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 3, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -5.$$

En déduire :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 2f'_x + f'_y$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 3f'_x - 5f'_y.$$

Exemple 2 : On considère le changement de variable.

$$\phi : u = x^2 - y^2 - 2xy, \quad v = y$$

Transformer par ce changement de variable

l'équation :

$$(x+y) \frac{\partial f}{\partial x} + (x-y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{--- (E)}$$

et en déduire les fcts $f(x, y)$ solutions
de (E)

Sol: Soit $g: (u, v) \longrightarrow g(u, v) \in \mathbb{R}^1$

(4)

sur l'ouvert, $2u^2 + u > 0$

et f définie par: $f = g \circ \phi$.

Donc,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x - 2y & -2x - 2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y) \frac{\partial g}{\partial u}$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2(x+y) \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$.

(E) se ramène à

$$(x-y) \frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

$$2(x+y)(x-y) \frac{\partial g}{\partial u} + (x-y) \left(-2(x+y) \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{(x-y) \frac{\partial g}{\partial v} = 0}, \text{ soit } \frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

La fct. g est indep de v , et est de la forme: $g(u, v) = h(u)$, $h \in \mathcal{C}^1$

(5)

on a: $f(x, y) = h(x^2 - y^2 - 2xy)$.

Exercice : soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et u, v deux fcts reelles de la variable reelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1.) Calculer les dérivées partielles de la fct $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow g(x, y) = f(u(x), v(y))$.

Sol: $g \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est une fct composée de $(x, y) \rightarrow (u(x), v(y))$ ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) et de la fct $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$. $g = f \circ \phi$.

Le Jacobien de ϕ :

$$J_g(x, y) = J_f(u(x), v(y)) \cdot J_\phi(x, y).$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u(x), v(y)) & \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), v(y)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u'(x) & 0 \\ 0 & v'(y) \end{pmatrix}$$

$$= \left(u'(x) \frac{\partial f}{\partial u} \quad v'(y) \frac{\partial f}{\partial v} (u(x), v(y)) \right)$$

(6)'

Soit $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = u'(x) \frac{\partial f}{\partial u}(u(x), v(y))$

et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = v'(y) \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), v(y))$

2°) Calculer les dérivées partielles de la fonction:
 $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$

Sol: La fct h est la composée des trois fcts de classe $\mathcal{C}^1$:

• $\varphi_1: (x, y) \longrightarrow (x+y, x-y)$, dont $J_{\varphi_1}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

• $\varphi_2: (p, q) \longrightarrow (u(p), v(q))$, dont $J_{\varphi_2}(u(p), v(q)) = \begin{pmatrix} u'(p) & 0 \\ 0 & v'(q) \end{pmatrix}$

$p = x+y, q = x-y.$

• $(u, v) \longrightarrow f(u, v)$ dont le Jacobien est $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} u(x+y) \\ \text{et } v(x-y) \end{matrix}$

Le Jacobien de h en (x, y) est donné par:

(7')

$$J_h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(x+y) & 0 \\ 0 & v'(x-y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = u'(x+y) \frac{\partial f}{\partial u}(u(x+y), v(x-y))$ (8) (x)

$$+ v'(x-y) \frac{\partial f}{\partial v}(u(x+y), v(x-y))$$

$$\begin{pmatrix} u'(x+y) & 0 \\ 0 & v'(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(x+y) & u'(x+y) \\ v'(x-y) & -v'(x-y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u(x+y), v(x-y)) \cdot u'(x+y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x+y), v(x-y)) \cdot v'(x-y) \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u(x+y), v(x-y)) \cdot u'(x-y) - \frac{\partial f}{\partial v}(u(x+y), v(x-y)) \cdot v'(x-y) \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x+y), v(x-y)) \cdot u'(x-y) - \frac{\partial f}{\partial v}(u(x+y), v(x-y)) \cdot v'(x-y) \right.$$

3) Application : $u(t) = t$, $v(t) = t^2$ et $f(u, v) = u^2 v$

$$u'(t) = 1, v'(t) = 2t, \frac{\partial f}{\partial u} = 2uv, \frac{\partial f}{\partial v} = u^2$$

Soit $u'(x+y) = 1$, $v'(x-y) = 2(x-y)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, (x-y)^2) &= 2(x+y)(x-y)^2 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, (x-y)^2) &= (x-y)^2 \end{aligned} \right\}$$

Don't run time finished.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= 1 \times 2(x+y)(x-y)^2 + 2(x-y)(x+y)^2 \\ &= 4x(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= 1 \times 2(x+y)(x-y)^2 - 2(x-y)(x+y)^2 \\ &= -4y(x^2 - y^2) \end{aligned} \right.$$

$$h(x, y) = (x^2 - y^2)^2$$

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(u(x, y), v(x, y)) \\ &= f(x+y, (x-y)^2) = u^2 \cdot v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x+y)^2 (x-y)^2 = [(x+y)(x-y)]^2 \\ &= \underline{(x^2 - y^2)^2} \end{aligned}$$

Exercice: Résoudre $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$

(8)'

en utilisant le changement de variables

$$u = x^2 + y^2, \quad v = y/x.$$

Sol $f(x, y) = g(u, v).$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2x g'_u + \frac{y}{x} g'_v \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2y g'_u + \frac{1}{x} g'_v \end{cases}$$

$$(E) \Rightarrow x f'_x + y f'_y = x \left(2x g'_u - \frac{y}{x} g'_v \right) + y \left(2y g'_u + \frac{1}{x} g'_v \right)$$

$$= 2(x^2 + y^2) \frac{\partial g}{\partial u} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \Rightarrow g(u, v) = \sqrt{u} + \phi(v)$$

ou ϕ est une fct réelle de la variable réelle de classe $\mathcal{C}^1$.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

2°) Formaliser le problème de changement de variable, et vérifier ce qu'il y a à vérifier

$\phi : (x, y) \longrightarrow (u, v)$ elle est définie

sur l'ouvert $\Omega = \{(x, y) / x \neq 0\}$

ϕ est un difféomorphisme : $\Omega \longrightarrow V$

$$u = x^2 + y^2, v = y/x \longrightarrow u > 0 \text{ et } y = vx.$$

$u = x^2 + vx^2 = x^2(1+v^2) \Rightarrow$ qui admet
en fait deux solutions.

$$\Omega = \{(x, y) : x > 0\} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{u}{1+v^2}} \text{ et } y = v \sqrt{\frac{u}{1+v^2}}$$

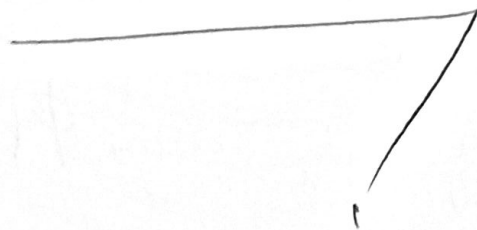
d'une façon unique ; on obtient une bijection

de $\Omega \longrightarrow \Omega$.

ϕ et ϕ^{-1} sont des app de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω

$\Rightarrow \phi$ est un difféomorphisme de Ω sur lui.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, il existe une f unique $g \in \mathcal{C}^1$
sur Ω / $f = g \circ \phi$.





Département de Mathématiques
Matière : Analyse 4

Année 2016/2017

Série de TD 03

Dérivées d'ordre deux et changement de variables

Exercice 01 : Soit la fonction définie par :

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

- a) Calculer les dérivées partielles dans l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
b) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 02 : Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On passe en coordonnées polaires et on note g la fonction définie par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

a) Montrer que

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

b) Supposons que f est invariante par rotation, c'est-à-dire $g(r, \theta) = \Phi(r)$. Résoudre l'équation $\Delta f = 0$.

Exercice 03 : Dans une fonction $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ de classe C^2 , on effectue le changement de variable

$$x + ay = u, \quad x - ay = v, \text{ de sorte que } f(x, y) = F(u, v).$$

- a) Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f à l'aide de celles de F .
b) Calculer $a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de F .
c) Résoudre l'équation aux dérivées partielles (trouver la solution générale de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$)

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 04 : Trouver toutes les fonctions $f(x, y, z) = \varphi(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, telles que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

Exercice 05 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et homogène de degré $n \in \mathbb{N}$, montrer alors que : $x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = n f(x, y)$