UNIVERSITE BADJI MOKHTAR- ANNABA
FACULTE DES SCIENCES
Départ. SM 1° Année LMD

2019 – 2020

SERIE N°3

Théorème de Gauss.

EX1

En employant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique créé par :

- Un fil rectiligne infini chargé d'une densité linéique constante $\lambda > 0$.
- Un plan infini chargé d'une densité surfacique constante σ positive.

EX2

On considère une distribution volumique de charge ρ constante répartie uniformément entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie de rayons respectifs $R1$ et $R2$ $(R1 < R2)$ (figure 1). En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrique créé en tout point de l'espace.

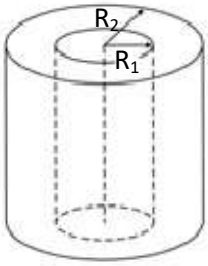


Fig 1

EX3

On considère deux sphères concentriques de rayons a et b (a < b). La surface de la sphère de rayon b est chargée avec une densité surfacique constante σ (figure 2). La sphère de rayon a est chargée avec une densité volumique $\rho(r) = \alpha\, r$, tel que α est une constante et r est la distance par rapport au centre de la sphère (figure 2).

1. Déterminer le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace et tracer l'allure de E(r) en fonction de r.
2. Déterminer le potentiel électrostatique V(r) en tout point de l'espace.

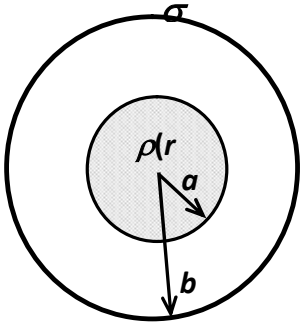
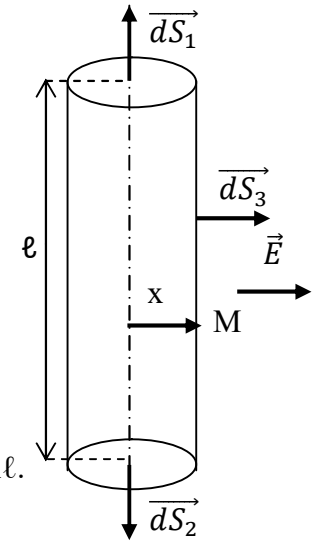


Fig 2

Solution de la série 3

EX1

1- Fil infini



Le champ $\vec{E}$ créé par un fil infini est radial.

La surface de Gauss choisie est un cylindre de rayon x et de longueur ℓ.

Théorème de Gauss : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2 + \emptyset_3 = \underbrace{\iint \vec{E}.\overrightarrow{dS_1}}_{0} + \underbrace{\iint \vec{E}.\overrightarrow{dS_2}}_{0} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS_3}$$

$$\left(\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_1}\right) \qquad \left(\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_2}\right)$$

S_1 et S_2 : surfaces des bases du cylindre et S_3 = surface latérale du cylindre = 2π xℓ.

Le module du champ électrique est **constant** sur la surface de Gauss.

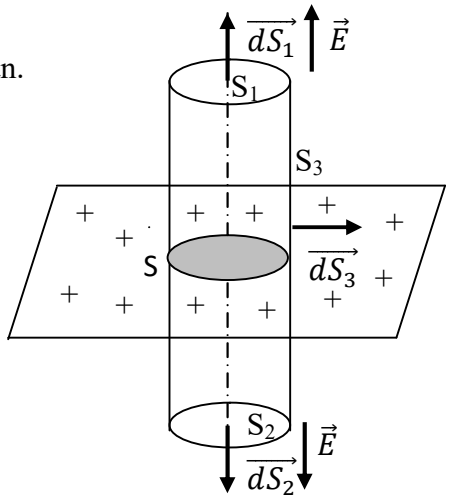
$$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS_3} = E \iint dS_3 = ES_3 = E2\pi\ell x$$

La charge électrique **à l'intérieur de la surface** de Gauss est donnée par :

$$\sum Q_{int} = \int \lambda d\ell = \lambda\ell$$

$$\emptyset = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E2\pi\ell x = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}}$$

2- Plan infini



Le champ électrique créé par un plan infini est perpendiculaire au plan.

La surface de Gauss choisie est un cylindre.

Le flux du champ électrique à travers la surface de Gauss est :

$$\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2 + \emptyset_3 = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \underbrace{\iint \vec{E}.\overrightarrow{dS_3}}_{0}$$

Le cylindre a 3 surfaces : S_1, S_2 et S_3. $\left(\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_3}\right)$

$$\emptyset = ES_1 + ES_2 = 2ES$$

$$Q_{int} = \int \sigma dS = \sigma \int dS = \sigma S$$

$$\emptyset = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

EX2

Le champ $\vec{E}$ créé par un cylindre infini est radial.

La surface de Gauss choisie est un cylindre de rayon r et de longueur ℓ.

Le flux du champ électrique à travers la surface de Gauss est donné par:

$$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- On distingue 3 régions :

a) r < R_1

$$\sum Q_{int} = 0 \Rightarrow \emptyset = 0 \Rightarrow \boxed{E_1 = 0}$$

b) R_1 < r < R_2

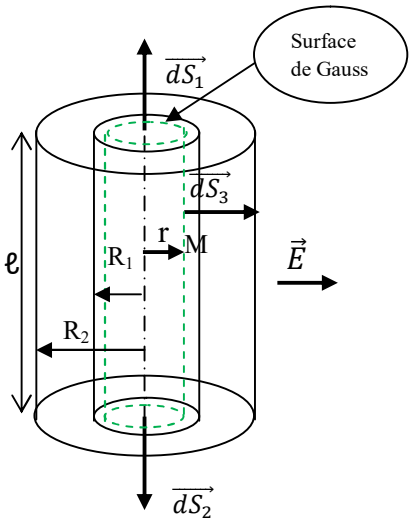
$$\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2 + \emptyset_3 = \underbrace{\iint \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dS_1}}_{0} + \underbrace{\iint \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dS_2}}_{0} + \iint \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dS_3}$$

$$(\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_1}) \qquad (\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_2})$$

$$\emptyset = \iint \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dS_3} = E_2 \iint dS_3 = E_2 S_3 = E_2 2\pi \ell r$$

$$Q_{int} = \int_V \rho dV = \rho V = \rho\pi(r^2 - R_1^2)\ell$$

$$E_2 2\pi \ell r = \frac{\rho\pi(r^2 - R_1^2)\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)}$$



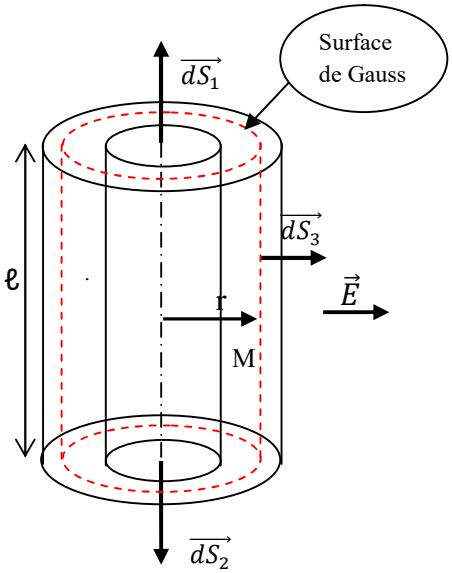
c) r > R_2

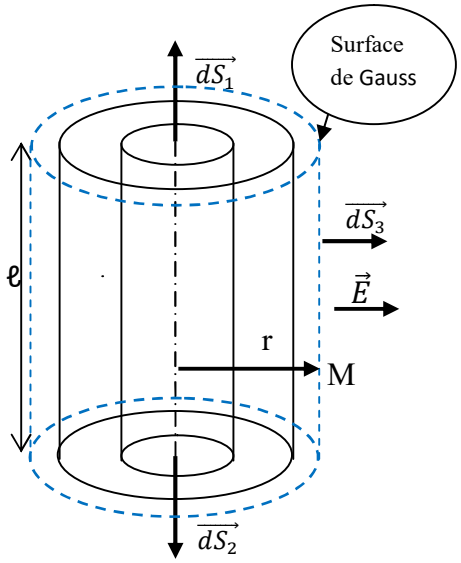
$$\emptyset = \iint \overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{dS_3} = E_3 \iint dS_3 = E_3 S_3 = E_2 2\pi \ell r$$

$$Q_{int} = \int_V \rho dV = \rho V = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)\ell$$

$$E_3 2\pi \ell r = \frac{\rho\pi(R_2^2 - R_1^2)\ell}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_3 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{r}\right)}$$





EX3

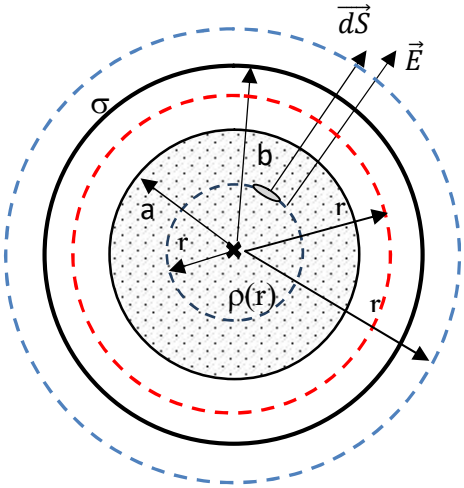
1-Détermination du champ électrostatique :

La surface de Gauss choisie est une sphère de rayon r.

- On distingue 3 régions :

a) r < a

On a : ρ(r) = αr (α est une constante).



Le flux du vecteur champ à travers une surface fermée est donné par :

$d\emptyset = \vec{E}\overrightarrow{dS} = E.dS \ \ (\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS})$

$\phi = \iint E \ . \ dS = E.S = E.4\pi r^2$ ($4\pi r^2$Surface d'une sphère de rayon r).

La charge interne est donnée par :

$q_{int} = \int_0^r \rho(r)\, dV = \int_0^r \alpha r \,.4\pi r^2 dr$

Sachant que *V* représente le volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

d'où dV= $4\pi r^2 dr$

$q_{int} = \int_0^r \alpha r \,.4\pi r^2 dr = \int_0^r 4\pi\alpha r^3 \,.dr = 4\pi\alpha\left(\frac{r^4}{4}\right) = \pi\alpha r^4.$

D'après le théorème de Gauss : $\phi = \iint E \ . \ dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$.

d'où, $E_I.4\pi r^2 = \frac{\pi\alpha^{\ 4}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \ E_I = \frac{\pi\alpha r^4}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\alpha r^2}{4\varepsilon_0}$

$\boxed{E_I = \frac{\alpha r^2}{4\varepsilon_0}}$

b) <u>a < r < b</u>

$\phi = E_{II}.4\pi r^2$

$q_{int} = \int_0^a \rho(r)\, dV = \int_0^a \alpha r \,.4\pi r^2 dr = \alpha\pi a^4$

<u>Remarque</u>: Les bornes d'intégration varient de **0** à **a,** parce que la charge interne se trouve à l'intérieur de la sphère de rayon **a**)

d'où

$E_{II}.4\pi r^2 = \frac{\pi\alpha a^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow \ E_{II} = \frac{\pi\alpha r^4}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0 r^2}$

$\boxed{E_{II} = \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0 r^2}}$

c) <u>r > b</u>

$\phi = E_{III}.4\pi r^2$

$q_{int} = q_V + q_s$

$q_V = \int_0^a \rho(r)\, dV = \int_0^a \alpha r \,.4\pi r^2 dr = \alpha\pi a^4$

$q_S = \int_0^b \sigma\, dS = \sigma \int_0^b dS = \sigma 4\pi b^2$

Donc $\boxed{q_{int} = \alpha\pi a^4 + \sigma 4\pi b^2}$

$\phi = \iint E\,.\, dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad E_{III}.4\pi r^2 = \frac{\alpha\pi a^4 + \sigma\, 4\, \pi b^2}{\varepsilon_0}$

d'où

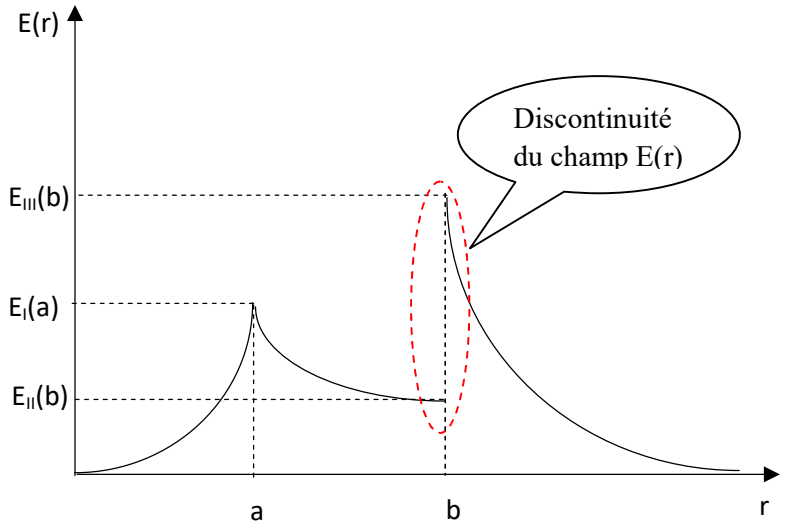
$\boxed{E_{III} = \frac{\alpha a^4 + 4\sigma b^2}{4\varepsilon_0 r^2}}$

- Représentation graphique de E(r) :

$E_I(0) = 0$ et $E_I(a) = \frac{\alpha a^2}{4\varepsilon_0}$

$E_{II}(a) = E_I(a) = \frac{\alpha a^2}{4\varepsilon_0}$ et $E_{II}(b) = \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0 b^2}$

$E_{III}(b) = \frac{\alpha a^4 + 4\sigma b^2}{4\varepsilon_0 b^2}$ et $E_{III}(r \to \infty) \to 0.$



2- Calcul du potentiel électrostatique V(r):

La relation entre le champ et le potentiel est donnée par :

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr}$ (on a une seule variable **r**).

$V(r) = -\int E(r).\, dr$

a) <u>r > b</u>

$$V(r)_{III} = -\int E_{III}.\, dr = -\int \left(\frac{\alpha a^4 + 4\sigma b^2}{4\varepsilon_0 r^2}\right) dr = -\left(\frac{\alpha a^4 + 4\sigma b^2}{4\varepsilon_0}\right) \int \left(\frac{1}{r^2}\right) dr$$

Et $\int \left(\frac{1}{r^2}\right) dr = -\frac{1}{r} + C_1$

Donc

$V(r)_{III} = = \left(\frac{\alpha a^4 + 4\sigma b^2}{4\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} + C_1$

Quand on s'éloigne des sphères chargées le potentiel s'annule, alors :

$$V_{III}(r \to \infty) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$\boxed{V(r)_{III} = \left(\frac{\alpha a^4 + 4\sigma b^2}{4\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r}}$

b) <u>a < r < b</u>

$$V(r)_{II} = -\int E_{II}.\ dr = -\int \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0 r^2}\ dr = \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0}\int \frac{-1}{r^2}\ dr$$

$$V(r)_{II} = \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

Pour déterminer la constante C_2, on utilise la continuité du potentiel au point (r=b), c'est à dire :

$$V_{III}(r = b) = V_{II}(r = b)$$

$$\left(\frac{\alpha a^4 + 4\sigma b^2}{4\varepsilon_0}\right)\frac{1}{b} = \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{b} + C_2 \ \Rightarrow\ C_2 = \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}$$

alors : $\boxed{V(r)_{II} = \frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0}.\frac{1}{r} + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0}}$

c) <u>r < a</u> :

$$V(r)_I = -\int E_I.\ dr$$

$$V(r)_I = -\int \frac{\alpha r^2}{4\epsilon_0}\ dr = -\frac{\alpha}{4\epsilon_0}\int r^2\ dr = -\frac{\alpha r^3}{12\ _0} + C_1$$

De la même manière, pour déterminer la constante C_3, on applique la continuité du potentiel au point r = a :

$$V_{II}(r = a) = V_I(r = a)$$

$$\frac{\alpha a^4}{4\varepsilon_0}.\frac{1}{a} + \frac{\sigma b}{\varepsilon_0} = -\frac{\alpha a^3}{12\ _0} + C_1 \qquad C_1 = \frac{\alpha a^3 + 3\sigma b}{3\varepsilon_0}$$

D' où

$$\boxed{V(r)_I = -\frac{\alpha r^3}{12\varepsilon_0} + \frac{\alpha a^3 + 3\sigma b}{3\varepsilon_0}}$$