

Chapitre 1

Rappel d' Analyse Matricielle

1.1 Rappel sur les Matrices

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions de base sur les matrices qui nous seront utiles dans la suite du cours. Dans toute la suite on désignera par A une matrice carrée réelle.

Définition 1.1 Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$ une matrice carrée. On appelle transposé de A la matrice notée $A^t = (a_{ij}^t)$ et définie par

$$a_{ij}^t = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Une matrice A est dite symétrique si $A = A^t$.

Définition 1.2 On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{n \times n}$ est définie positive si pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ on a

$$x^t A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0.$$

On a le résultat élémentaire suivant, (cf. [2]).

Proposition 1.1 Une matrice définie positive est inversible.

Définition 1.3 Une matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$ est diagonale si $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$. Elle est dite triangulaire supérieure (resp : triangulaire inférieure) si $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$ (resp : $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$).

Une matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$ est dite tridiagonale si $a_{ij} = 0$, pour tout i, j tel que $|i - j| \geq 2$.

Définition 1.4 Une matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$ est dite monotone si $Ax \geq 0$ entraîne $x \geq 0$ (les inégalités s'entendent composante par composante) c'est à dire que

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq 0 \Rightarrow x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 1.2 Une matrice monotone A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.

Preuve. Supposons que $Ax = 0$. Alors en appliquant la définition de la monotonie successivement à $Ax \geq 0$ et $A(-x) \geq 0$ on obtient $0 \leq x \leq 0$ d'où $x = 0$. A est donc inversible. Montrons maintenant que $A^{-1} \geq 0$. Posons

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \cdots & a_{1n}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{-1} & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

et notons par $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$ le i ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On veut montrer que la i ème colonne de A est positive. Posons $f_i = A^{-1}e_i$, d'où $Af_i = e_i \geq 0$ comme A est monotone alors $f_i \geq 0$ et puisque $f_i = (a_{1i}^{-1}, \dots, a_{ni}^{-1})^\top$ on déduit que $a_{ji}^{-1} \geq 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Comme toutes les colonnes de A^{-1} sont positives alors $A^{-1} \geq 0$. $\square$

Exemple Montrons que la matrice tridiagonale suivante est monotone.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax \geq 0$ c'est à dire que

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq 0 \\ 2x_2 - x_1 - x_3 &\geq 0 \\ &\vdots \\ 2x_{n-1} - x_{n-2} - x_n &\geq 0 \\ 2x_n - x_{n-1} &\geq 0 \end{aligned}$$

et montrons que $x \geq 0$. Pour cela posons

$$i_0 = \min \left\{ i : x_i = \min_{1 \leq j \leq n} x_j \right\}$$

Il suffit donc de montrer que $x_{i_0} \geq 0$. Comme $1 \leq i_0 \leq n$ il y a trois cas :

1. $i_0 = 1$: Dans ce cas $2x_1 - x_2 \geq 0$, or comme $x_2 \geq x_1$, car x_1 étant le minimum, donc $2x_1 \geq x_1$ et par suite $x_1 \geq 0$.
2. $i_0 = n$: De même $2x_n - x_{n-1} \geq 0$, or puisque $x_{n-1} \geq x_n$, il vient que $x_n \geq 0$.
3. $2 \leq i_0 \leq n-1$: Dans ce cas on a $2x_{i_0} - x_{i_0+1} - x_{i_0-1} \geq 0$ qui peut s'écrire sous la forme

$$(x_{i_0} - x_{i_0+1}) + (x_{i_0} - x_{i_0-1}) \geq 0 \quad (1.2)$$

Par construction $x_{i_0} \leq x_{i_0+1}$ et $x_{i_0} < x_{i_0-1}$ donc $(x_{i_0} - x_{i_0+1}) \leq 0$ et $(x_{i_0} - x_{i_0-1}) < 0$ ce qui contredit l'inégalité (1.2). Ce cas est donc impossible. On a montré que $x_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et donc $x \geq 0$. A est donc monotone.

Définition 1.5 Soit A une matrice carré. On dit que le scalaire (réel ou complexe) λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$.

On définit le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice carré A par

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |\lambda_i| : \lambda_i \text{ est une valeur propre de } A \}.$$

On a le résultat suivant. Pour la preuve voir [2].

Proposition 1.3 Les valeurs propres d'une matrice symétrique A sont réelle. De plus si A est définie positive alors ses valeurs propres sont strictement positives.

Le résultat suivant nous donne les valeurs propres d'une matrice tridiagonale et symétrique (pour la preuve voir [8]).

Proposition 1.4 Soient a et b deux réels et considérons la matrice tridiagonale et symétrique de taille $n \times n$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & 0 \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres λ_k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ de A sont données par

$$\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Matrices Blocs

Définition 1.6 On appelle matrice par blocs A une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{A_{n1}} & \cdots & \boxed{A_{np}} \end{pmatrix}$$

où A_{ij} est une matrice (un bloc) de taille $n_i \times n_j$. La matrice A est alors de taille $\sum_{i=1}^n n_i \times \sum_{j=1}^p n_j$.

Opérations sur les matrices bloc

Soient $A = (A_{ij})_{n \times p}$ et $B = (B_{ij})_{n \times p}$ deux matrices par blocs.

Combinaison linéaire

Si A et B ont la même taille alors pour tous scalaires réels ou complexes α et β on a

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta B &= \alpha \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{A_{n1}} & \cdots & \boxed{A_{np}} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{B_{n1}} & \cdots & \boxed{B_{np}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \boxed{A_{11}} + \beta \boxed{B_{11}} & \cdots & \alpha \boxed{A_{1p}} + \beta \boxed{B_{1p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \boxed{A_{n1}} + \beta \boxed{B_{n1}} & \cdots & \alpha \boxed{A_{np}} + \beta \boxed{B_{np}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Produit de matrices bloc

Soient $A = (A_{ij})_{n \times p}$ et $B = (B_{ij})_{p \times q}$ deux matrices par bloc. Le produit $C = A.B$ où $C = (C_{ij})_{n \times q}$ est donné par

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} \cdot B_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq q,$$

où la notation $A_{ik} \cdot B_{kj}$ désigne le produit matriciel de A_{ik} et B_{kj} .

Matrice diagonale par bloc

On dit qu'une matrice carré $A = (A_{ij})_{n \times n}$ est diagonale par blocs si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_{nn}} \end{pmatrix}$$

autrement dit $A_{ij} = 0$ (bloc nul) pour $i \neq j$. Dans ce cas $\det A = \prod_{i=1}^n \det A_{ii}$.

Matrices triangulaires par blocs

On dit qu'une matrice carré $A = (A_{ij})_{n \times n}$ est triangulaire supérieure par blocs (resp : triangulaire inférieure par blocs) si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \boxed{A_{12}} & \cdots & \boxed{A_{1n}} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \boxed{A_{n-1n}} \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_{nn}} \end{pmatrix}, \quad \text{resp : } A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \boxed{A_{21}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \boxed{A_{n1}} & \cdots & \boxed{A_{nn-1}} & \boxed{A_{nn}} \end{pmatrix}.$$

On a alors $\det A = \prod_{i=1}^n \det A_{ii}$.

Matrices tridiagonale par blocs

On dit qu'une matrice carré A est tridiagonale par blocs si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \boxed{C_{11}} & \cdots & 0 \\ \boxed{B_{11}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \boxed{C_{n-1n}} \\ 0 & \cdots & \boxed{B_{nn-1}} & \boxed{A_{nn}} \end{pmatrix}$$

où A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} sont des blocs de matrices.

Exemple Soit $n \geq 1$ un entier. On définit la matrice A_n de taille $n \times n$ par

$$A_n = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice de Poisson P_n est définie comme étant la matrice tridiagonale par blocs de taille $n^2 \times n^2$ par

$$P_n = \begin{pmatrix} \boxed{A_n} & \boxed{-I_n} & \cdots & 0 \\ \boxed{-I_n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \boxed{-I_n} \\ 0 & \cdots & \boxed{-I_n} & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. Par exemple dans le cas $n = 2$ on a

$$P_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On verra dans la chapitre 3 que la matrice de Poisson P_n résulte de la discrétisation du laplacien en dimension 2.

1.2 Algorithme de Thomas

Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$ une matrice carré et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. L'équation matricielle $Ax = b$ définit un système linéaire de n équations à n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.4)$$

dont la solution est le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a le résultat d'algèbre suivant.

Proposition 1.5 Le système linéaire (1.4) admet une solution unique si et seulement si $\det A \neq 0$.

Ils existent plusieurs algorithmes de résolution des systèmes linéaires. Ces méthodes se divisent en deux catégories : les méthodes directes et les méthodes itératives. Les méthodes dites directes permettent d'obtenir la solution exacte du système (1.4) en un nombre fini d'opérations. Le coût de ces algorithmes est de l'ordre de $O(n^3)$ ce qui les rend trop coûteuses en temps de calcul lorsque la matrice A est de grande taille. On renvoie pour plus de détails sur les méthodes de résolutions des systèmes linéaires à [6]. Cependant dans le cas où la matrice A est tridiagonale et non singulière il existe un algorithme très efficace appelé algorithme de Thomas qui permet de résoudre le système linéaire (1.4). L'idée de cet algorithme est de décomposer la matrice A en le produit de deux matrices bi-diagonales L et U de sorte que $A = L.U$ où L et U ont la forme suivante

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \beta_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Supposons que la matrice A a la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & \dots & 0 \\ f_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & f_n & a_n \end{pmatrix}$$

et notons par $b = (b_1, \dots, b_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ le second membre du système $Ax = b$. On cherche donc les coefficients α_i , β_i et γ_i tel que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Multiplions la première ligne de L avec la première colonne de U on a

$$\alpha_1 = a_1$$

En multipliant la ligne i de L avec la colonne $i + 1$ de U on obtient

$$\gamma_i = c_i, \quad 1 \leq i \leq n - 1.$$

De même la ligne i de L avec la colonne $i - 1$ de U donne $\beta_i \alpha_{i-1} = f_i$, d'où

$$\beta_i = \frac{f_i}{\alpha_{i-1}}, \quad 2 \leq i \leq n. \quad (1.5)$$

Finalement on a en multipliant la ligne i de L avec la colonne i de U

$$\beta_i \gamma_{i-1} + \alpha_i = a_i, \quad (1.6)$$

d'où d'après (1.5) et (1.6)

$$\alpha_i = a_i - \frac{\gamma_{i-1} f_i}{\alpha_{i-1}}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

La résolution du système tridiagonale $Ax = b$ est donc ramenée à la résolution des deux systèmes triangulaires suivants

$$\begin{cases} Ux = y, \\ Ly = b \end{cases}$$

Le système $Ly = b$ devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

d'où

$$y_1 = b_1$$

et $y_i + \beta_i y_{i-1} = b_i$ ce qui donne

$$y_i = b_i - \beta_i y_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq n$$

Calculons maintenant la solution x du système $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire

$$x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}$$

et $\alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = y_i$ d'où finalement

$$x_i = \frac{y_i - \gamma_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, \dots, 1.$$

On obtient alors les formules suivantes appelées *formules de Thomas*

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 \\ \alpha_i = a_i - \frac{c_{i-1} f_i}{\alpha_{i-1}}, & 2 \leq i \leq n \\ y_1 = b_1 \\ y_i = b_i - \frac{f_i}{\alpha_{i-1}} y_{i-1}, & 2 \leq i \leq n \\ x_n = \frac{y_n}{\alpha_n} \\ x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, & i = n-1, \dots, 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Remarque L'algorithme de Thomas nécessite $8n - 7$ opérations pour la résolution du système (1.4). C'est le meilleur algorithme en terme de cout en temps de calcul pour la résolution de systèmes faisant intervenir des matrices tridiagonales.

Exemple Résolvons le système tridiagonal suivant par l'algorithme de Thomas

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a à partir de la première relation (1.7) $\alpha_1 = 2$. De plus

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= a_2 - \frac{c_1 b_2}{\alpha_1} = 2 - \frac{(-1)(-1)}{2} = \frac{3}{2}, \\ \alpha_3 &= a_3 - \frac{c_2 b_3}{\alpha_2} = 2 - \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}, \\ \alpha_4 &= a_4 - \frac{c_3 b_4}{\alpha_3} = 2 - \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Calculons maintenant $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. On en utilisant les troisième et quatrième relations (1.7)

$$\begin{aligned}y_1 &= 5, \\ y_2 &= f_2 - \frac{f_2}{\alpha_1} y_1 = -7 + \frac{5}{2} = \frac{-9}{2}, \\ y_3 &= f_3 - \frac{f_3}{\alpha_2} y_2 = 3, \\ y_4 &= f_4 - \frac{f_4}{\alpha_3} y_3 = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Calculons enfin $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Les deux dernières relations (1.7) entraînent

$$\begin{aligned}x_4 &= \frac{y_4}{\alpha_4} = 1, \\ x_3 &= y_3 - \frac{c_3 x_4}{\alpha_3} = 3 \\ x_2 &= y_2 - \frac{c_2 x_3}{\alpha_2} = -1 \\ x_1 &= y_1 - \frac{c_1 x_2}{\alpha_1} = 2\end{aligned}$$

1.3 Normes matricielles et conditionnement

1.3.1 Normes vectorielles

Définition 1.7 On appelle norme vectorielle une application notée $\|\cdot\|$

de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}_+$ telle que

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (L'inégalité triangulaire)

Exemple Norme euclidienne : $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Norme l_∞ : $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Norme l_1 : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

1.3.2 Normes matricielles

Définition 1.8 Supposons qu'on dispose d'une norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ et soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. On définit la norme de A notée $\|A\|$, dite norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$, par

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

On a alors les propriétés suivantes des normes matricielles

- (i) $\|Ax\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (matrice nulle)
- (ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ pour toute matrice A et $\lambda \in \mathbb{R}$
- (iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, pour toutes matrices A et B
- (iv) $\|A.B\| \leq \|A\| \|B\|$ pour toutes matrices A et B .

La dernière propriété est caractéristique des normes matricielles. On peut alors montrer le résultat suivant (pour la preuve voir [2]).

Proposition 1.6 (i) La norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$$

où $\lambda_{\max}$ est la plus grande valeur propre de $A^\top A$. En particulier si A est symétrique alors

$$\|A\|_2 = \rho(A). \quad (1.8)$$

(ii) La norme matricielle subordonnée à la norme l_1 de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(iii) La norme matricielle subordonnée à la norme l_∞ de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

On a le résultat important suivant.

Proposition 1.7 Soit A une matrice carrée monotone de taille $n \times n$ alors :

- (i) si $Ay = 1$ pour un certain $y \in \mathbb{R}^n$ alors $\|A^{-1}\|_\infty = \|y\|_\infty$
 - (ii) si $Ay \geq 1$ alors $\|A^{-1}\|_\infty \leq \|y\|_\infty$,
- où le 1 désigne ici le vecteur unité $(1, \dots, 1)^\top$ de $\mathbb{R}^n$.

Preuve Montrons d'abord la seconde inégalité. Supposons que $Ay \geq 1$ où $1 = (1, \dots, 1)$, l'inégalité est ici comprise composante par composante. Comme A est monotone alors $A^{-1} \geq 0$ il résulte de l'inégalité précédente que $0 \leq A^{-1}1 \leq y$ et donc

$$\|A^{-1}1\|_{\infty} \leq \|y\|_{\infty}. \quad (1.9)$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_{\infty} = 1$. Alors $-1 \leq x \leq 1$, d'où puisque A est monotone $-A^{-1}1 \leq A^{-1}x \leq A^{-1}1$ et par suite $\|A^{-1}x\|_{\infty} \leq \|A^{-1}1\|_{\infty}$ ce qui entraîne d'après (1.9) que

$$\|A^{-1}x\|_{\infty} \leq \|y\|_{\infty}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\|_{\infty} = 1. \quad (1.10)$$

D'après la définition de la norme matricielle il résulte de (1.10) que $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \|y\|_{\infty}$.

Pour ce qui est de la première inégalité il suffit de remarquer que $y = A^{-1}1$, l'inégalité (1.10) implique alors que $\|A^{-1}\|_{\infty} = \|y\|_{\infty}$. $\square$

1.3.3 Conditionnement d'une matrice

Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée à une norme de $\mathbb{R}^n$ encore notée $\|\cdot\|$. On définit le conditionnement d'une matrice A relativement à la norme matricielle $\|\cdot\|$ comme étant le nombre

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Si A est non inversible alors on conviendra que

$$k(A) = \infty$$

La proposition suivante donne les propriétés du conditionnement (pour la preuve voir [2]).

Proposition 1.8 (i) Pour toute matrice A on a $k(A) \geq 1$.

(ii) Si A est symétrique alors le conditionnement de A relativement à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ est donné par

$$k(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (1.11)$$

où $\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$ désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de A .

Le résultat suivant résume toute l'importance du conditionnement d'une matrice (pour la preuve voir [6]).

Proposition 1.9 Soit x la solution du système linéaire $Ax = b$.

Perturbons le second membre b en le remplaçant par $\tilde{b}$ et notons par $\tilde{x}$ la solution du nouveau système $A\tilde{x} = \tilde{b}$. On a alors l'inégalité

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \quad (1.12)$$

où $k(A)$ désigne le conditionnement de A relativement à la norme matricielle subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$.

Remarque Le membre gauche de (1.12) désigne l'erreur relative commise sur la solution x du système $Ax = b$ alors que le rapport du membre de droite représente l'erreur relative commise sur le second membre b . Si $k(A)$ est proche de 1 alors une petite erreur relative sur le second membre entraîne une petite erreur sur la solution x du système. On dit dans ce cas que la matrice A est bien conditionnée. Par contre si $k(A)$ est grand alors une petite erreur relative sur b peut entraîner une importante erreur relative sur la solution x . La matrice A est alors dite mal conditionnée.

Exemple Considérons le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.000001 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'unique solution x du système $Ax = b$ est $x = (1, 0)^\top$. Perturbons légèrement le vecteur b en le remplaçant par $\tilde{b} = (1, 1.000001)^\top$ et calculons la solution $\tilde{x}$ du nouveau système $A\tilde{x} = \tilde{b}$. L'algorithme de Thomas donne $\tilde{x} = (0, 1)$. Calculons les erreurs relatives commises. L'erreur sur le second membre est

$$\frac{\|b - \tilde{b}\|_2}{\|b\|_2} = \frac{\|(0, 0.000001)\|_2}{\|(1, 1)\|_2} = 7.0721 \times 10^{-7},$$

alors que celle commise sur la solution x est

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|(1, -1)\|_2}{\|(1, 1)\|_2} = 1.$$

On remarque qu'une erreur relative infime sur le second membre a entraîné une erreur relative énorme sur la solution.

Calculons le conditionnement de A . Comme A est symétrique on utilise la relation (1.11) de la Proposition 1.8. Calculons les valeurs propres de A . Le polynôme caractéristique est donné par

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2.000001\lambda + 0.000001$$

d'où $\lambda_{\min} = 0.0000005$ et $\lambda_{\max} = 2.0000005$. Le conditionnement de A est donc $k(A) = \frac{2.0000005}{0.0000005} = 4 \times 10^6$. On remarque que la matrice A est mal conditionnée d'où l'importante erreur relative obtenue sur la solution x .

1.4 Équations aux différences

Cas homogène

On appelle équation aux différences linéaire homogène une équation de la forme

$$a_0 u_{i+1} + a_1 u_i + \dots + a_p u_{i-p+1} = 0, \quad i \geq p \quad (1.13)$$

où $(a_j)_{0 \leq j \leq p}$ est une suite de réels donnée.

Une solution de l'équation (1.13) est une suite de réels $(u_i)_{i \geq p}$ qui satisfait (1.13). Comme l'équation (1.13) est linéaire l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On associe à l'équation (1.13) les données initiales suivantes

$$u_0 = v_0, u_1 = v_1, \dots, u_{p-1} = v_{p-1}. \quad (1.14)$$

Si $a_0 a_p \neq 0$ l'équation (1.13) est dite d'ordre p . On peut montrer par récurrence le résultat suivant. Pour la preuve voir [7].

Théorème 1.1 Supposons que $a_0 a_p \neq 0$. Alors il existe une unique solution $(u_i)_{i \geq p}$ de l'équation (1.13) satisfaisant les conditions initiales (1.14).

Définition On appelle polynôme caractéristique de l'équation (1.13) le polynôme de degré p suivant

$$\pi(\lambda) = a_0 \lambda^p + \dots + a_{p-1} \lambda + a_p. \quad (1.15)$$

Le résultat suivant montre que la solution de l'équation (1.13) peut être exprimée en fonction des racines du polynôme caractéristique (1.15). Pour la preuve voir [7].

Théorème 1.2 Notons par $(r_j)_{0 \leq j \leq k}$ les racines (réelles ou complexes) du polynôme caractéristique (1.15) et par m_j la multiplicité de la racine r_j . Alors les solutions fondamentales de l'équation (1.13) s'écrivent sous la forme

$$u_i = \sum_{j=0}^k \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} \alpha_{s,j} i^s \right) r_j^i, \quad i \geq p. \quad (1.16)$$

Les coefficients $\alpha_{s,j}$ sont déterminés par les conditions initiales (1.14).

Exemples 1. Considérons l'équation aux différences suivante

$$\begin{cases} u_{i+1} - u_{i-1} = 0, & i \geq 2 \\ u_0 = 0, & u_1 = 1 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit

$$\pi(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

d'où les 2 racines simples $r_0 = 1$ et $r_1 = -1$. D'après le Théorème 1.2 la solution générale s'écrit

$$u_i = \alpha_{0,0} + \alpha_{0,1}(-1)^i, \quad i \geq 2.$$

Les conditions initiales nous amènent à résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha_{0,0} + \alpha_{0,1} = 0, \\ \alpha_{0,0} - \alpha_{0,1} = 1 \end{cases}$$

d'où $\alpha_{0,0} = \frac{1}{2}$ et $\alpha_{0,1} = -\frac{1}{2}$. La solution est alors

$$u_i = \frac{1}{2} (1 - (-1)^i), \quad i \geq 2.$$

2. Considérons maintenant l'équation aux différences d'ordre 3 suivante

$$\begin{cases} u_{i+1} - 2u_i - 7u_{i-1} - 4u_{i-2} = 0, & i \geq 3 \\ u_0 = 1, & u_1 = -1, & u_2 = 0. \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique est donnée par

$$\pi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 7\lambda - 4,$$

qui admet une racine simple $r_0 = 4$ et la racine double $r_1 = -1$. Le Théorème 1.2 entraîne

$$\begin{aligned} u_i &= \left(\sum_{s=0}^0 \alpha_{s,0} i^s \right) 4^i + \left(\sum_{s=0}^1 \alpha_{s,1} i^s \right) (-1)^i \\ &= \alpha_{0,0} 4^i + (\alpha_{0,1} + \alpha_{1,1} i) (-1)^i. \end{aligned}$$

Les conditions initiales donnent le système

$$\begin{cases} \alpha_{0,0} + \alpha_{0,1} = 1, \\ 4\alpha_{0,0} - \alpha_{0,1} - \alpha_{1,1} = -1, \\ 16\alpha_{0,0} + \alpha_{0,1} + 2\alpha_{1,1} = 0 \end{cases}$$

qui admet les solutions $\alpha_{0,0} = -\frac{1}{25}$, $\alpha_{0,1} = \frac{26}{25}$, $\alpha_{1,1} = -\frac{1}{5}$. La solution de l'équation aux différences est donc

$$u_i = \left(\frac{26}{25} - \frac{1}{5}i \right) (-1)^i - \frac{4^i}{25}, \quad i \geq 3.$$

Cas non homogène

Considérons maintenant le cas d'une équation aux différences linéaire non homogène de la forme

$$a_0 u_{i+1} + a_1 u_i + \dots + a_p u_{i-p+1} = \varphi(i), \quad i \geq p, \quad (1.17)$$

où le second membre $\varphi(i)$ est une fonction de i . On a le résultat important suivant. Pour la preuve voir [7].

Théorème 1.3 Soit w_i la solution générale de l'équation homogène suivante

$$a_0 u_{i+1} + a_1 u_i + \dots + a_p u_{i-p+1} = 0, \quad i \geq p,$$

et notons par u_i^φ une solution particulière de l'équation non homogène (1.17). Alors la solution générale de l'équation (1.17) s'écrit

$$u_i = w_i + u_i^\varphi.$$

Remarque La forme de la solution particulière u_i^φ dépend de la forme de la fonction φ . Par exemple dans le cas où φ est de la forme $\varphi(i) = c^i Q(i)$, où Q est un polynôme de degré q , alors on cherchera u_i^φ sous la forme $u_i^\varphi(i) = c^i (b_q i^q + b_{q-1} i^{q-1} + \dots + b_0)$, les coefficients b_j seront déterminés par identification.

Exemple Résoudre l'équation aux différences non homogène suivante

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2^i (i^2 + 1), \quad i \geq 2. \quad (1.18)$$

Cherchons une solution particulière u_i^φ sous la forme

$$u_i^\varphi = 2^i (\alpha i^2 + \beta i + \gamma).$$

En remplaçant l'expression précédente de u_i^φ dans (1.18) on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} 3\alpha = 2, \\ 10\alpha + 3\beta = 0, \\ 5\beta + 5\gamma = 2 \end{cases}$$

après résolution on trouve $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = -\frac{20}{9}, \gamma = \frac{118}{45}$. La solution générale de (1.18) est alors

$$u_i = c_1 + c_2(-1)^i + 2^i \left(\frac{2}{3}i^2 - \frac{20}{9}i + \frac{118}{45} \right), \quad i \geq 2$$

où c_1 et c_2 sont des constantes.

Exercices

1. Considérons la matrice tridiagonale suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

— Montrer que les valeurs propres de A sont données par

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

En déduire le rayon spectral et le conditionnement de A .

— Calculer $\|A\|_2, \|A\|_1, \|A\|_\infty$.

— Écrire un script Matlab qui reçoit n en argument et renvoi la matrice A .

— Calculer le conditionnement de A pour

$n = 4, 10, 20, 50, 100, 200, 300, 500$. Tracer le graphe du conditionnement de A en fonction de n .

— Indiquer un algorithme efficace pour la résolution d'un système linéaire faisant intervenir la matrice A .

2. Soit $n \geq 1$ un entier. Posons $h = \frac{1}{n+1}$ et considérons la matrice $n \times n$

suivante

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & \frac{-1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & \frac{-1}{h^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

— Montrer que A_h est monotone et en déduire que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$.

Indication : Utiliser la Proposition 1.7 en prenant

$$y = \left(\frac{h(1-h)}{2}, \frac{2h(1-2h)}{2}, \dots, \frac{nh(1-nh)}{2} \right).$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors la matrice $(I - A)$ est inversible et que $(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j$.

— En déduire que si en plus A est symétrique alors le schéma numérique

$$U^{(k+1)} = AU^{(k)} + C, \quad k \geq 0,$$

où $C \in \mathbb{R}^n$, converge pour la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ vers un vecteur $U \in \mathbb{R}^n$.

— Montrer l'estimation suivante

$$\left\| U - \sum_{j=0}^k A^j C \right\|_2 \leq \|C\|_2 \rho(A)^{k+1} \frac{1}{1 - \rho(A)}, \quad \forall k \geq 1.$$

4. Soient A, B, C trois matrices carrés d'ordre n . On définit la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} I & A & B \\ 0 & I & C \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

— Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1} .

— En déduire l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. On considère une matrice par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A , B et C sont des matrices carrées.

- Montrer que M est inversible si et seulement si A et C le sont.
- Calculer l'inverse de M sous la forme d'une matrice par blocs.
- *Application* : Calculer l'inverse de la matrice 4×4 suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Considérons la matrice bi-diagonale de taille $n \times n$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que A est définie positive.
 - Résoudre le système $Ax = b$, où $b = (b_1, \dots, b_n)^\top$ par l'algorithme de Thomas.
7. Montrer que si r_j est une racine du polynôme caractéristique

$$\pi(\lambda) = a_0\lambda^p + \dots + a_{p-1}\lambda + a_p,$$

alors $u_i = r_j^i$ est une solution de l'équation aux différences suivante

$$a_0u_{i+1} + a_1u_i + \dots + a_pu_{i-p+1} = 0, \quad i \geq p. \quad (1.19)$$

En déduire que si le polynôme π admet p racines simples $(r_j)_{j=1,p}$ alors la solution générale de l'équation aux différences (1.19) s'écrit

$$u_i = c_1r_1^i + \dots + c_pr_p^i.$$

8. Résoudre l'équation aux différences suivante

$$u_{i+1} + u_i + u_{i-1} + u_{i-2} = 0, \quad i \geq 3$$

avec les conditions initiales

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 2.$$

9. Résoudre l'équation aux différences

$$u_{i+4} - 6u_{i+3} + 14u_{i+2} - 16u_{i+1} + 8u_i = i,$$

avec les conditions initiales $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$.

10. *Commande Matlab gallery*

La commande Matlab `gallery` implémente une grande classe de matrices particulières.

— Tapez `help gallery`. Quelles sont les matrices implémentées ?

— Calculer les matrices de Riemann pour $n = 15$, de Toeplitz pour $n = 10$, Krylov pour $n = 15$, Poisson pour $n = 15$. Cette dernière matrice est sous forme `sparse` convertissez-la avec la commande `full`.

— Donner la structure de chacune des matrices précédentes à l'aide de la commande `spy`. Que peut-on dire sur la structure de chacune de ces matrices ?

— Écrire une fonction Matlab qui implémente la matrice A de l'exercice 1. Tracer le graphe du conditionnement de A en fonction de sa taille n . Que remarquez vous ?