Analyse fonctionnelle appliquée

Espaces de Sobolev et formulation variationnelle

Lahcène CHORFI
Dept. de Maths, Université B.M. d' Annaba

Avril 2020

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces dont les élements sont des fonctions, et ces fonctions sont telles que leurs puissances et les puissances de leurs dérivées (au sens des distributions) sont intégrables au sense de Lebesque. Ces espaces sont des espaces de Banach. Le fait que les espaces de Sobolev sont complets est très important pour démontrer l'existence de solutions à de nombreuses équations aux dérivées partielles

1.1 Espace $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$. On défini l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carré sommables dans Ω muni du produit scalaire

$$< f,g >= \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

On note $C_c^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$) l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact sur Ω.

Théorème 1 *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Preuve. (voir [1], théorème 3.4.3)

1.1.1 Dérivée faible

Définition 1 *Soit $u \in L^2(\Omega)$, $w_i \in L^2(\Omega)$ est dite dérivée faible de u par rapport à sa i-ème variable si, pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega w_i(x)\phi(x)dx$$

w_i est notée $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. On note $\nabla u = (w_1, w_2, \cdots, w_N) \in L^2(\Omega)^N$ le gradient de u

Remarque 1
- *Si u est dérivable au sens usuel (classique) et $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, alors la dérivée faible w_i coincide avec $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.*
- *La dérivée faible, si elle existe, coincide avec la dérivée au sens des distributions $D_i u$, défini par le crochet de dualité $< D_i u, \phi >_{D',D} = - < u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} >_{D',D}$, D^* est le dual topologique de $D = C_c^\infty(\Omega)$ muni de la convergence simple.*
- *Inversement si $D_i u \in L^2(\Omega)$, c'est à dire il existe $w_i \in L^2(\Omega)$ t.q*

  $$< D_i u, \phi > = -(w_i, \phi)_{L^2(\Omega)}$$

  pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, alors $\frac{\partial u}{\partial x_i} = D_i u$.
- *De même, on défini la dérivée faible d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$, $D^\alpha u = w_\alpha \in L^2(\Omega)$ si*

  $$(u, D^\alpha \phi)_{L^2} = (-1)^{|\alpha|}(w_\alpha, \phi)_{L^2(\Omega)}$$

  pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, où $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$

1.1.2 Définition et propriétés

Définition 2 *(**Espaces de Sobolev**) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$.*
- *1. L'espace $H^1(\Omega)$ est defini par :*

  $$H^1(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D_i u \in L^2(\Omega); \forall i = 1; \cdot; N \}$$

- *2. L'espace $H^m(\Omega)$, pour $m \in \mathbf{N}^*$, est défini par:*

  $$H^m(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall \alpha \in \mathbf{N}^N; |\alpha| \leq m \}$$

Proposition 1 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

En particulier

$$(u,v)_{H^1} = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x))\, dx$$

1.1.3 Espace $H^1(I)$, $I =]a,b[$

Théorème 2 *Soit $u \in H^1(I)$, alors*

- *1. u est absolument continue sur $[a,b]$:*

$$\forall x,y \in \bar{I},\, u(x) = u(y) + \int_x^y u'(t)dt$$

- *2.*

$$\forall x,y \in \bar{I},\, |u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{1/2} \|u'\|_{L^2(I)}$$

- *3. Il existe $C = C(a,b)$ tel que*

$$\forall x \in \bar{I},\, |u(x)| \leq C\|u\|_{H^1(I)}$$

Preuve. 1- $f = Du \in L^2$, posons

$$v(x) = \int_a^x f(t)dt$$

v est asolument continue (primitive d'une fonction de L^1).
Montrons que $DG = f$ au sens de $D'(I)$. Pour tout $\varphi \in D(I)$, on a

$$< DG,\varphi >= - < G,\varphi' >= - \int_a^b (\int_a^x f(t)dt)\varphi'(x)dx$$

En échangeant l'ordre d'intégration, on a

$$< DG,\varphi >= - \int_a^b (\int_t^b \varphi'(x)dx)f(t)dt$$

d'où

$$< DG,\varphi >= -\int_a^b \varphi(t)f(t)dt =< f,\varphi >$$

Donc $DG = f = Du$, par suite $G = u + C$, ce qui prouve la formule (1).
Les propriétés (2) et (3) découlent de (1).

Théorème 3 *(de Rellich) Si I est borné, alors l'injection $H^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ est compacte.*

Preuve. Il suffit de montrer que l'injection $H^1(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ est compacte car l'injection $C(\bar{I}) \hookrightarrow L^2(I)$ est continue. Pour cela on utilise le théorème d'Ascoli. Soit B une partie bornée de $H^1(I)$, alors

- B est bornée dans $C(\bar{I})$ d'après la propriété (3)
- B est équicontinue d'après la propriété (2)

1.1.4 Théorème de compacité

Le théorème précédent se généralise à la dimension $N \geq 2$ ([1])

Théorème 4 *(Rellich) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, $(N \geq 1)$. Toute partie bornée de $H_0^1(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.*

1.1.5 Théorème de densité

Rappel. Un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^N$ est dit régulier (ou de classe C^1) si le bord de Ω est localement le graphe d'une fonction de classe C^1 et que Ω est (localement) d'un seul côté de ce graphe.

Théorème 5 *(Densité et prolongement) Soit Ω un ouvert borné et régulier, alors :*

- *1. l'ensemble $C^\infty(\bar{\Omega})$ des restrictions à des fonctions $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*
- *2. Il existe une application linéaire continue $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbf{R}^N)$ telle que*

$$\forall u \in H^1(\Omega);\ P(u) = u \text{ p.p. dans } \Omega$$

Preuve. 1- La démonstration se fait par troncature et régularisation. Voir [2], proposition 4.4.2.
2- Essayons de donner la preuve pour le cas le plus simple $N = 1$

Cas $I =]0,+\infty[$.
Prolongeons par réflexion

$$Pu(x) = \begin{cases} u(x), & x > 0 \\ u(-x), & x < 0 \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que $v = Pu \in H^1(\mathbf{R})$ et $\|v\|_{H^1(\mathbf{R})} = \sqrt{2}\|u\|_{H^1(\mathbf{R}_+)}$.
Cas $I =]a,b[$.

Supposons $u \in H^1(0,1)$, il existe une fonction $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ tel que

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha(x) \leq 1 & si \quad x \in I = (0,1) \\ \alpha(x) = 1 & si \quad x < \frac{1}{2} \\ \alpha(x) = 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Posons

$$v = \alpha\tilde{u} + (1-\alpha)\tilde{u}$$

où $\tilde{u}$ est le prolongement de u par zéro hors de $I = (0,1)$.
Alors $v_1 = \alpha\tilde{u} \in H^1(0,+\infty)$ et $v_2 = (1-\alpha)\tilde{u} \in H^1(-\infty,1)$
D'après le cas précédent, il existe Pv_1 et $Pv2$ deux prolongements appartenant à $H^1(\mathbf{R})$ tel que

$$\|Pv_i\|_{H^1(\mathbf{R})} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^1(0,1)}, \quad i = 1,2 \quad (C(\alpha) = \|\alpha\|_{C^1})$$

Alors $Pu = Pv_1 + Pv_2$ est un prolongement de u appartenant à $H^1(\mathbf{R})$, de plus il existe $C(\alpha) \geq 0$ tel que

$$\|Pu\|_{H^1(\mathbf{R})} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^1(0,1)}$$

□

Définition 3 *(Espace $H_0^1(\Omega)$) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$. On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note aussi :*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

Si $\Omega = \mathbf{R}^N$ on a $H_0^1(\mathbf{R}^N) = H^1(\mathbf{R}^N)$ alors que l'inclusion est stricte si Ω est un ouvert borné.

Proposition 2 *(Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert borné (au moins dans une direction). Il existe une constante $C > 0$ tel que pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \geq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \qquad (1.1)$$

Preuve. Pour les fonctions $v \in C_0^\infty(\Omega)$, on a déjà démontré l'inégalité de Poincaré (1.1). Par un argument de densité, l'inégalité reste vraie pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$. □

1.2 Théorème de trace et formule de Green

Lorsque u est une fonction de $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^N$, on ne peut pas considérer la restriction de la fonction à un ensemble de mesure nulle car les fonctions de $L^2(\Omega)$ sont justement définies à un ensemble de mesure nulle près. De même les fonctions de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ ne sont plus régulières si $N > 2$. Nous allons montrer dans cette partie qu'il n'est pas nécessaire que la fonction ait un représentant continu pour que l'on puisse considérer sa restriction à $\Gamma := \partial\Omega$. C'est ce que nous appellerons la trace de la fonction sur le bord du domaine.

Cas du demi-espace $\mathbf{R}_+^N$

Commençons par traiter le cas du demi-espace, c'est à dire

$$\mathbf{R}_+^N := \{x = (x'; x_N) \in \mathbf{R}^{N-1} \times R : x_N > 0\}$$

On a alors

$$\Gamma := \{x = (x'; 0) : x' \in \mathbf{R}^{N-1}\}$$

que nous identifierons à $\mathbf{R}^{N-1}$.

Théorème 6 *(de trace) Il existe une application linéaire continue, appelée trace et notée :*

$$\gamma_0 : H^1(\mathbf{R}_+^N) \to H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1});$$

qui prolonge l'application restriction usuelle pour les fonctions continues. Cette application est surjective et son noyau est $ker(\gamma_0) = H_0^1(\mathbf{R}_+^N)$.

Preuve. Soit $v \in C_c^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^N})$, on a

$$|v(x',0)|^2 = -2\int_0^{+\infty} v(x',x_N)\frac{\partial v}{\partial x_N}(x',x_N)dx_N,$$

en utilisant l'inégalité $2ab \leq (a^2+b^2)$, on a

$$|v(x',0)|^2 \leq 2\int_0^{+\infty}(|v(x',x_N)|^2 + |\frac{\partial v}{\partial x_N}(x',x_N)|^2)dx_N.$$

En intégrant par rapport à x', on a

$$\int_{\mathbf{R}^{N-1}} |v(x',0)|^2 dx' \leq 2\int_{\mathbf{R}_+^N}(|v(x',x_N)|^2 + |\frac{\partial v}{\partial x_N}(x',x_N)|^2)dx,$$

c'est à dire

$$\|v(x',0)\|_{L^2(\mathbf{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbf{R}_+^N)}$$

Par densité de $C_c^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^N})$ dans $H^1(\mathbf{R}_+^N)$, on obtient la même inégalité pour $v \in H^1(\mathbf{R}_+^N)$

$$\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\mathbf{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbf{R}_+^N)}$$

En utilisant la transformée de Fourier par rapport à x', on montre que (voir [DL, Vol. 3])

$$\|\gamma_0(v)\|_{H^{1/2}(\mathbf{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbf{R}_+^N)}$$

de plus γ_0 est surjective.
La définition de l'espace de Soolev $H^s(\mathbf{R}^N)$, avec s réel, sera donnée en Annexe. □

Cas d'un ouvert Ω

Pour définir la trace d'une fonction sur le bord d'un ouvert de classe C^1, on introduit une partition de l'unité et un système de cartes locales pour se ramener au cas du demi-espace que nous venons de traiter. Nous n'écrirons pas en détails cette démarche et ne donnons que le résultat (voir [4]):

Théorème 7 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. Alors, il existe une unique application (linéaire continue) définie de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et tel que*

$$\gamma_0(u) = u p.p. \ sur \ \Gamma, \ si \ u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),$$

de plus $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.

Formule de Green

Le théorème suivant généralise la propriété d'intégration par parties des fonctions régulières.

Théorème 8 *(Intégration par parties) Soit Ω est un ouvert borné à frontière régulière, alors, pour tout $i = 1; \cdots; N$, on a*

$$\int_\Omega u D_i v dx = -\int_\Omega u D_i v dx + \int_\Gamma \gamma u(y) \gamma v(y) n_i(y) d\gamma(y); \forall (u; v) \in (H^1(\Omega))^2$$

où γu désigne la trace de u sur la frontière Γ et $d\gamma(y)$ désigne l'intégration par rapport à la mesure surfacique sur Γ (qu'on peut voir comme une mesure de Lebesque $(N-1)$- dimensionnelle), et $n = (n_1; \cdots; n_N)$ est la normale à Γ extérieure à Ω.

Preuve. Rappelons que la formule a été établie pour les fonctions de classe C^1, on utilise la densité de $C^1(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$. Pour plus de détails voir [2], chapitre 4 . □

Théorème 9 *(Formule de Green) Soit Ω un ouvert de classe C^1 dans R^N tel que Γ soit bornée où bien $\Omega = \mathbf{R}^N_+$. Alors, pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:*

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma$$

Précisons une fois encore que dans l'intégrale de bord, il faut comprendre $\gamma_0(u)$ pour u (la trace de u) sur Γ et

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \sum_{i=1}^{N} \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) n_i \quad \text{où} \quad n = (n_1; \cdots; n_N)$$

1.3 Espace $H^m(\Omega)$

1.3.1 Traces des éléments de $H^m(\Omega)$

Définition 4 $H_0^m(\Omega) = AdhD(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^m}$

Soit Ω un ouvert borné de classe C^2 de frontière $\partial\Omega = \Gamma$. Considérons les applications (restriction)

$$\begin{gathered}\gamma_0 : D(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma)\\ \varphi \mapsto \varphi|_\Gamma\\ \gamma_1 : D(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma)\\ \varphi \mapsto \tfrac{\partial\varphi}{\partial n}|_\Gamma\end{gathered}$$

Théorème 10 *L'application*

$$\begin{gathered}\gamma : D(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\Gamma)^2\\ u \mapsto (u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma)\end{gathered}$$

se prolonge par continuité en une application continue de

$$H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)^2$$

- De plus, $Ker\ \gamma = H_0^2(\Omega)$ *et* $Im\ \gamma = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$

Espace $\mathcal{H}^s(\mathbf{R}^N)$

Si $s \geq 0$, on défini les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire, ou réel,

$$\mathcal{H}^s(\mathbf{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^N), \hat{u} \in L_s^2(\mathbf{R}^N)\}$$

avec

$$L_s^2(\mathbf{R}^N) = \{v \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^N), (1 + |y|^2)^{s/2} v \in L^2(\mathbf{R}^N)\}$$

où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier-Plancherel définie dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ par

$$\hat{u}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^N} u(x) e^{-ix.y} dx$$

Si Γ est une sous-variété compacte, $H^s(\Gamma)$ est définie à l'aide de cartes locales [4].

1.3.2 Injections de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que lorsque l'exposant m est suffissamment grand, les fonctions de $H^m(\Omega)$ ont des propriétés de continuité et de différentiabilité au sens classique. On commence par le cas $\Omega = \mathbf{R}^N$. Rappelons que pour k entier :

$$B^k(\mathbf{R}^N) := \{u \in C^k(\mathbf{R}^N) : \lim_{|x|\to+\infty} |D^\alpha u(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbf{N}^N; |\alpha| \leq k\}$$

Cet espace est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{B^k} := \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbf{R}^N} |D^\alpha u(x)|$$

Nous pouvons énoncer un premier résultat :

Théorème 11 *(de Morrey)Soient $s \in \mathbf{R}$ et $k \in N$ vérifiant $s > \frac{N}{2} + k$. Alors :*

$$H^s(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow B^k(\mathbf{R}^N) \text{ est continue}$$

Preuve. Montrons le résultat pour $k = 0$, c'est à dire que si $s > N/2$ alors l'injection $H^s(\mathbf{R}^N) \hookrightarrow B^0(\mathbf{R}^N)$ est continue. Soit $u \in H^s(\mathbf{R}^N)$, alors

$$\int_{R^N} |\widehat{u}(\xi)| d\xi = \int_{R^N} (1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi|^2)^{-s/2}|\widehat{u}(\xi)| d\xi \leq \|u\|_{H^s} \int_{R_N} (1+|\xi|^2)^{-s/2} d\xi$$

L'intégrale du second membre est convergente si $s > \frac{N}{2}$, alors il existe $C = C(N,s) > 0$ tel que

$$\|\widehat{u}\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}, \forall u \in H^s(\mathbf{R}^N)$$

On sait d'après le cours d'analyse de Fourier que

$$\|u\|_{B^0} \leq \|\widehat{u}\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}$$

- Le cas général ($k \geq 1$) s'obtient en remarquant que

$$u \in H^s(\mathbf{R}^N) \Rightarrow D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbf{R}^N)$$

et $s - |\alpha| > N/2$ pour tout $|\alpha| \leq k$. □

On déduit de cette proposition :

Corollaire 1 *Soit Ω un ouvert de R^N borné et régulier (de classe C^m). Alors, pour tout $k \in N$ et pour tout $m \in N$ tel que $m > N/2 + k$, l'injection $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$ est continue.*

Preuve. On peut prolonger toute fonction u de $H^m(\Omega)$ en une fonction $\bar{u} \in H^m(\mathbf{R}^N)$ (voir le théorème 5 de prolonement). Le théorème de Morrey affirme que $\bar{u} \in B^k(\mathbf{R}^N)$. On en déduit que $u \in C^k(\bar{\Omega})$.

1.4 Espace $H^{-1}(\Omega)$

Définition 5 $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)'$ *dual topologique*

$$f \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists C \geq 0 \; tel \; que \; | < f,\varphi > | \leq C\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}, \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

muni de la norme duale

$$\|f\|_{H^{-1}} = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{| < f,\varphi > |}{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}}$$

Comme $D(\Omega)$est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut considérer que $H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$ avec injection i^* continue

$$f \rightarrow i^*(f) \; t.q \; < i^*(f),\varphi >_{D',D} = < f,\varphi >_{H^{-1},H_0^1}$$

$T = i^*(f)$ est une distribution d'ordre 1

Proposition 3

$$u \in H^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow \exists g_i \in L^2(\Omega), \, i = 0,1, \cdots ,N / \; u = g_0 + \sum_{i=1}^{N} D_i g_i$$

Preuve. Découle du théorème de Riesz, il existe $v \in H^1$ tel que

$$< u,\varphi >_{H^{-1},H_0^1} = (v,\varphi)_{H^1} = (v,\varphi)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} (D_i v, D_i \varphi)_{L^2}$$

Posons $g_0 = v$, $g_i = -D_i v$, alors

$$< i^*(u),\varphi >_{D',D} = (g_0,\varphi)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} (g_i, D_i \varphi)_{L^2}$$

d'où

$$u = g_0 + \sum_{i=1}^{N} D_i g_i, \; dans \; D'$$

□

Bibliographie

[1] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris (1983).

[2] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation (chapitres 3,4 et 5) http://www.cmap.polytechnique.fr/ ∼ allaire/livre2.html

[3] Thierry Gallouët, Raphaèle Herbin, Equations aux dérivées partielles, Master 2 de mathématiques , Université Aix Marseille (2018) https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/master2.d/M2edp.pdf

[4] R. Dautray, et J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 3, Transformations, Sobolev, Opérateurs, Masson, Paris, 1988.

[5] R. Dautray, et J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Vol. 4, Méthodes variationnelles, Masson, Paris, 1988.

[6] A. Munnier, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivés partielles. Université de Nancy, Institut Elie Cartan, 2007-2008