Chapitre 2 (la suite): Séance 06

Théorème 2.1: Soit a une fonction définie sur R_+ et bornée. Alors, l'équation de renouvellement associée à F

$$\forall t \geq 0 : A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x)$$

admet une solution unique, bornée sur tout intervalle fini, donnée par

$$\forall t \geq 0 : A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x)$$

où

$$\forall t \geq 0 : M(t) = \sum_{n \geq 1} F_n(t)$$

Preuve:

Le résultat est immédiat pour la fonction de renouvellement. Nous pouvons le vérifier à l'aide de l'intégration par parties, ou bien de la transformée de Laplace. En effet, l'équation

$$\forall t \geq 0 : M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x) = F(t) + \int_0^t M(t-x)f(x)dx$$

se transforme en

$$\begin{aligned}\forall s &> 0 : LM(s) = LF(s) + LM(s)\left(Lf(s)\right) \\ &= LF(s) + LM(s)\left(sLF(s) - F(0)\right) \\ &= LF(s) + LF(s)\left(sLM(s)\right).\end{aligned}$$

Cette dernière factorisation montre que

$$\forall t \geq 0 : M(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)M(x)dx = F(t) + \int_0^t F(t-x)dM(x)$$

Théorème 2.2: On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F et on suppose que $E\left[X_1\right] = \int_0^\infty x dF\left(x\right) = \int_0^\infty x f\left(x\right) dx < \infty$. Soit T_{N_t+1} l'instant de la prochaine occurrence,
alors:

$$E\left[T_{N_t+1}\right] = E\left[X_1\right]\left(1 + E\left[N_t\right]\right) = E\left[X_1\right]\left(1 + M(t)\right)$$

Preuve: On pose $A(t) = E\left[T_{N_t+1}\right]$: l'instant moyen de la prochaine occurence. On conditionne par rapport à la valeur de la variable X_1. Donc:

$$E\left[T_{N_t+1} \mid X_1 = x\right] = \begin{cases} x \ \text{ si } t < x \\ x + A(t-x) \ \text{ si } t \geq x \end{cases}$$

nous obtenons, aprés intégration, et en utilisant la formule des probabilités totales $(P(A) = \sum_{i\geq 1} P(A \mid B_i)P(B_i))$

$$\begin{aligned} A(t) &= E\left[T_{N_t+1}\right] = \int_0^t E\left[T_{N_t+1} \mid X_1 = x\right] dF(x) \\ &= \int_0^t E\left[T_{N_t+1} \mid X_1 = x\right] f(x)dx \\ &= \int_0^t x + A(t-x)f(x)dx + \int_t^\infty xf(x)dx \\ &= \int_0^t xf(x)dx + \int_0^t A(t-x)f(x)dx + \int_t^\infty xf(x)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} x f(x)dx + \int_0^t A(t-x)f(x)dx \\
&= E\left[X_1\right] + \int_0^t A(t-x)f(x)dx. \\
&= E\left[X_1\right] + \int_0^t A(t-x)dF(x)
\end{aligned}
$$

Ainsi, d'aprés le théorème **2.1**,

$$
\begin{aligned}
A(t) &= a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x) \\
A(t) &= E\left[X_1\right] + \int_0^t E\left[X_1\right]dM(x) \;\; (E\left[X_1\right] \text{ est constante}) \\
A(t) &= E\left[X_1\right] + E\left[X_1\right]\int_0^t dM(x) \\
&= E\left[X_1\right] + E\left[X_1\right]\int_0^t M(x)dx \\
&= E\left[X_1\right](1 + M(t))
\end{aligned}
$$

À l'instant t, nous avons

$$T_{N_t+1} = X_1 + ... + X_{N_t+1}$$

En moyenne, l'instant de la prochaine occurrence est égal à $M(t) + 1$ fois la moyenne d'une durée inter-occurrence $E[X_1]$.

Théorème 2.3 (petit théorème de renouvellement):
Soit $\mu = E\left[X\right] < \infty$: la moyenne d'une durée inter-occurrence= la durée moyenne entre deux sinistres par exemple, En plus, À l'instant t, nous avons

$$T_{N_t+1} = X_1 + ... + X_{N_t+1}$$

i.e. T_{N_t+1} l'instant du nouveau renouvellement est la somme de toutes les durées d'attente précedentes.
Alors, lorsque $t \to \infty$:

$$\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{\mu}\ p.s$$

En particulier,

$$lim_{t\to\infty} E\left[\frac{N_t}{t}\right] \to \frac{1}{\mu}$$

N.B: convergence presque sûre: on écrit $X_n \longrightarrow^{p.s} a_0$ si $P(X_n \longrightarrow a_0) = 1$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Preuve:

Pour chaque instant quelconque $t \in \mathbb{R}_+$, nous avons $T_{N_t} \leq t \leq T_{N_t+1}$. où T_{N_t} est l'instant du renouvellement avant l'instant t et T_{N_t} est l'instant du premier renouvellement aprés l'instant t.

Par suite, sous réserve que $N_t \neq 0$, on a l'encadrement suivant (on a divisé tous les termes par N_t):

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t}$$

Cependant, $\frac{T_{N_t}}{N_t} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i}{N_t}$ est la moyenne de N_t v.a indépendantes et identiquement distribuées, il résulte en utilisant la loi forte des grands nombres que:

$\frac{T_{N_t}}{N_t} \longrightarrow \mu$ quand $t \longrightarrow \infty$.

De plus, on peut écrire

$$\frac{T_{N_t+1}}{N_t} = \left(\frac{T_{N_t+1}}{N_t+1}\right) \cdot \left(\frac{N_t+1}{N_t}\right)$$

En appliquant le même raisonnement ci-dessus (loi forte des grands nombres), $\frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \longrightarrow \mu$ quand $t \longrightarrow \infty$.
et $\frac{N_t+1}{N_t} \longrightarrow 1$ quand $t \longrightarrow \infty$ car: $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t+1}{N_t} = \frac{N_t}{N_t} = 1$(propriétés de la limite d'une fonction).
Donc, $\frac{T_{N_t+1}}{N_t} \longrightarrow \mu.1 = \mu$ quand $t \longrightarrow \infty$.
Nous avons:

$$\mu \leq \frac{t}{N_t} \leq \mu$$

d'où

$$\frac{1}{\mu} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

ce qui signifie que $\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ $p.s.$

Remarques:

- Le nombre $\frac{1}{\mu}$ est appelé le taux du processus de renouvellement.
- Parce que le durée moyenne entre les renouvellements est μ, il est assez intuitif que la taux moyen pour lequel les renouvellemnets se réalisent est de 1 pour chaque unité de temps μ.

Exercice 2.2:
L'agriculteur a un projecteur qui fonctionne avec une seule pile. Quand la pile en cours d'utilisation vient de s'épuiser, il la remplace immédiatement par une nouvelle pile. Si la durée de vie de la pile (en heures) est distribuée selon la loi uniforme sur l'intervalle $[30, 60]$, pour quel taux doit-il changer les piles?.

Solution :
Si on note N_t le nombre de piles changées jusqu'à l'instant t, d'aprés le petit théorème de renouvellement,
le taux pour lequel L'agriculteur doit remplaçer les piles est:
$lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\frac{30+60}{2}} = \frac{1}{45}$
i.e. il devra remplaçer une pile chaque 45 heures.

Exercice 2.3:

On suppose que $X_i \sim U\left[0,1\right]$; chercher la fonction de renouvellement $M(t)$ pour $t \in \left[0,1\right]$.

Solution :
On a $X_i \sim U\,[0,1]$, donc:

$$f(x)=\frac{1}{1-0}=1 \text{ et } F(x)=\frac{x-0}{1-0}=x.$$

Pour $t>1$: le calcul est plus compliqué, on a :

$$\begin{aligned} M(t) &= t+\int_0^t M(t-x).1dx \quad \text{(on fait un changement de variable)} \\ &= t+\int_0^t M(y)dy \\ \text{(avec } y &= t-x; dy=-dx; -\int_t^0 M(y)dy=\int_0^t M(y)dy), \end{aligned}$$

En dérivant les deux ctés, on obtient:

$$\frac{d}{dt}M(t) = 1 + M(t);$$
$$\text{(on peut mettre} \quad : \quad h(t) = 1 + M(t))$$

$$h'(t) = h(t)$$

La solution est: $h(t) = Ae^t$ pour une constante A. On sait que $M(0) = 0$ donne $A = 1$.

$$h(t) = e^t$$

$$M(t) = e^t - 1 \text{ pour } \quad t \in [0, 1].$$

Bon courage