**CHAPITRE I**

**écoulement uniforme a surface libre dans un canal rectangulaire**

**I.1. Introduction**

L’objectif principal de ce chapitre est l’étude de l’écoulement uniforme à surface libre dans un canal de forme rectangulaire. Cette étude comprend le dimensionnement du canal, ce qui revient à déterminer sa largeur et la détermination de la profondeur normale. Ce sont les deux principaux problèmes qui se posent dans l’étude de l’écoulement uniforme à surface libre dans un canal de forme rectangulaire.

Le dimensionnement du canal repose sur la théorie du modèle rugueux de référence. Cela consiste à choisir un canal rectangulaire rugueux de rugosité donnée et de déterminer alors ses caractéristiques hydrauliques et géométriques. Ces caractéristiques permettent alors de déterminer celles réelles du canal étudié en appliquant des relations théoriques préalablement établies. Ces relations sont établies sur la base de formules régissant l’écoulement uniforme telles que celles de *Darcy-Weisbach*, de *Chézy* ou de *Manning-Strickler*.

**I.2. Dimensionnement par la méthode du modèle rugueux**

**I.2.1. Caractéristiques géométriques et hydrauliques**

Pour les canaux ouverts, le modèle rugueux de référence est caractérisé par une rugosité relative arbitrairement choisie égale à, où et désignent respectivement la rugosité absolue caractérisant l’état de la paroi interne du canal et le diamètre hydraulique du modèle.

L’écoulement dans le modèle rugueux de référence est considéré comme étant en régime turbulent rugueux et le coefficient de frottement est alors donné par la relation : .

Ou bien : 

Le canal de forme rectangulaire est l’un des ouvrages le plus connu et le plus rencontré dans les aménagements hydrauliques. La figure 1.1 montre schématiquement ce canal et ses caractéristiques géométriques.



**Figure 1.1** : Schéma de définition du canal ouvert de forme rectangulaire

Les parois internes du canal sont caractérisées par la rugosité absolue. Le canal écoule le débit volume, d’un liquide de viscosité cinématique, sous la pente *i* qui correspond à la pente géométrique de l’ouvrage.

La forme du canal considéré est définie par le paramètre de forme, appelé aussi rapport d’aspect, où  est la profondeur normale de l’écoulement et désigne la largeur du canal. Il s’agit alors de dimensionner le canal considéré, ce qui revient à calculer la dimension linéaire.

L’aire de la section mouillée de l’écoulement s’écrit :

 (1.1)

qui peut également s’écrire :

 (1.2)

Le périmètre mouillé est :

 (1.3)

ou bien :

 (1.4)

Le diamètre hydraulique est par suite :



soit :

 (1.5)

**I.2.2. Caractéristiques du modèle rugueux de référence**

Le modèle rugueux de référence du canal étudié est représenté schématiquement sur la figure 1.2. Il est caractérisé par la largeur et l’écoulement est de profondeur. Le paramètre de forme  du modèle rugueux de référence est égal à celui du canal à dimensionner, représenté par la figure 1.1, soit :

 (1.6)

Le modèle rugueux écoule le même débit volume que celui du canal à dimensionner et sous la même pente *i*, soit :

 (1.7)

En tenant compte de la relation (1.6), l’aire de la section mouillée  du modèle rugueux de référence est donc :

 (1.8)

Le périmètre mouillé est :

 (1.9)

qui peut s’écrire :

 (1.10)



**Figure 1.2** : Schéma de définition du modèle rugueux de référence

du canal ouvert de forme rectangulaire

Le diamètre hydraulique est par suite :



soit :

 (1.11)

Etant donné que la rugosité relative du modèle rugueux de référence est et que le régime d’écoulement est turbulent rugueux, alors le coefficient de frottement de l’écoulement est donné par la relation bien connue de *Nikuradse*, soit :

 (1.12)

Après calcul, le coefficient de frottement prend alors la valeur. L’écoulement turbulent rugueux se produisant dans le canal de forme rectangulaire de référence est donc caractérisé par un coefficient de frottement constant égal à 1/16.

**I.2.3. Relation de *Darcy-Weisbach* appliquée au modèle rugueux**

La relation de *Darcy-Weisbach* s’applique également aux canaux à ciel ouvert. Soit :

 (1.13)

La vitesse moyenne *V* figurant dans la relation (1.13) peut s’écrire, en tenant compte de l’équation de continuité :

 (1.14)

Le diamètre hydraulique est par définition :

 (1.15)

En tenant compte des relations (1.14) et (1.15), la relation (1.13) s’écrit alors :

 (1.16)

En appliquant la relation (1.16) au modèle rugueux de référence, on obtient :

 (1.17)

Rappelons que et que la section mouillée et le périmètre mouillé sont régis respectivement par les relations (1.8) et (1.10). Ainsi, la relation (1.17) s’écrit :

 (1.18)

On peut alors tirer de la relation (1.18) que la largeur du modèle rugueux s’écrit :

 (1.19)

La relation (1.19) permet le calcul explicite de la dimension linéaire du modèle rugueux de référence, à partir des valeurs connues du débit volume , de la pente *i* et du paramètre de forme. Les effets de la viscosité cinématique  du liquide ne sont pas pris en considération, puisque l’écoulement est, ou supposé être, dans le domaine turbulent rugueux. La profondeur normale de l’écoulement dans le modèle rugueux de référence est telle que  et qui s’écrit, en tenant compte de la relation (1.19) :

 (1.20)

**I.2.4. Facteur de correction des dimensions linéaires**

Selon la méthode du modèle rugueux, toute dimension linéaire *b* d’un canal donné est égale à la dimension linéaire homologue  du modèle rugueux, corrigée par les effets d’un facteur de correction. Cela se traduit par la relation fondamentale :

 (1.21)

Etant donné que la dimension linéaire est plus grande que la dimension linéaire *b,* alors le facteur de correction est inférieur à l’unité, ou bien .

Comme le périmètre mouillé *P* est une dimension linéaire, alors on peut écrire :

 (1.22)

En ce qui concerne l’aire de la section mouillée *A*, celle-ci étant proportionnelle au carré de la dimension linéaire *b*, on peut alors écrire que :

 (1.23)

On applique les relations (1.22) et (1.23) à la relation (1.16). On obtient :



Soit :

 (1.24)

On remarque, en vertu de la relation (1.17) que :

 (1.25)

En combinant les relations (1.24) et (1.25), il vient alors que :

 (1.26)

Comme et  en vertu de la condition (1.7), la relation (1.26) s’écrit alors plus simplement :



Soit :

 (1.27)

Il faut donc noter que le facteur de correction des dimensions linéaires est étroitement lié au coefficient de frottement *f*.

Dans cette étape du chapitre, il est nécessaire de faire appel à la formule de *Colebrook-White* exprimant le coefficient de frottement *f*, soit :

 (1.28)

Le diamètre hydraulique figurant dans la relation (1.28) est une dimension linéaire et peut donc s’écrire, en vertu de la relation (1.21) :

 (1.29)

Le nombre de *Reynolds* *R* figurant dans la relation (1.28) s’écrit, par définition :

 (1.30)

Compte de la relation (1.22), la relation (1.30) devient :

 (1.31)

Puisque en vertu de la condition (1.7), on peut alors remarquer que la quantité figurant dans la relation (1.31) correspond au fait au nombre de *Reynolds* caractérisant l’écoulement dans le modèle rugueux. Ainsi :

 (1.32)

En combinant les relations (1.31) et (1.32), il ressort que :

 (1.33)

On introduit les relations (1.27), (1.29) et (1.33) dans la relation (1.28). On obtient :



Ou bien :

 (1.34)

Selon la relation (1.34), le facteur de correction des dimensions linéaires est fonction de la rugosité absolue  et des caractéristiques hydrauliques et de l’écoulement dans le modèle rugueux. La relation (1.34) montre bien qu’elle est implicite vis-à-vis du facteur. Une relation approchée de a été déterminée et les calculs ont montré que le facteur de correction pouvait s’écrire, avec une excellente approximation, sous la forme :

 (1.35)

La relation approchée (1.35) a été comparée à la relation exacte (1.34). La comparaison a été menée en respectant les étapes suivantes :

1. On fixe une valeur de la rugosité relative entre les valeurs 0 et 0,05 afin de balayer l’ensemble du diagramme universel de *Moody*.
2. On fait varier le nombre de *Reynolds* avec un pas arbitrairement choisi.
3. Par un procédé itératif, on calcule la valeur du coefficient de correction  en application de la relation exacte (1.34).
4. On calcule la valeur approchée de  selon la relation proposée (1.35).
5. On calcule enfin l’écart relatif entre les valeurs de déterminées au cours des étapes 3 et 4.

Les résultats de cette comparaison ont été tracés graphiquement dans le système d’axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 1.3.



**Figure 1.3** : Comparaison entre les valeurs exactes et approchées du coefficient calculées selon les relations (1.34) et (1.35).

Il ressort de la figure 1.3 que, pour les valeurs pratiques, l’écart relatif entre les valeurs exactes et approchées de ne dépassent guère 0,4% seulement. Ceci montre clairement la fiabilité de la relation approchée (1.35) qui peut donc être appliquée avec une erreur très acceptable. On note que la relation approchée (1.35) est applicable à l’ensemble du domaine de l’écoulement turbulent, comprenant le régime d’écoulement lisse, le régime d’écoulement de transition et le régime d’écoulement turbulent rugueux.

**I.2.5. Dimensionnement du canal par la relation de *Darcy-Weisbach***

 **pour un rapport d’aspect imposé**

Le dimensionnement du canal consiste donc à déterminer la valeur de la dimension linéaire *b*, correspondant à la largeur du canal. Il faut noter que les paramètres connus du problème sont : le débit volume *Q*, le paramètre d’aspect ou paramètre de forme, la rugosité absolue caractérisant l’état de la paroi interne du canal, la pente géométrique *i* du canal et enfin la viscosité cinématique du liquide en écoulement. A partir de ces cinq paramètres connus, les étapes suivantes sont recommandées pour déterminer la dimension linéaire recherchée *b* du canal étudié :

1. Avec les valeurs connues des paramètres, *i* et, la dimension linéaire du modèle rugueux de référence est déterminée par application de la relation (1.19).
2. Connaissant les valeurs deet de, la relation (1.11) permet de calculer la valeur du diamètre hydraulique de l’écoulement dans le modèle rugueux de référence, tandis que le périmètre mouillé du modèle rugueux est déterminé par application de la relation (1.10).
3. Les valeurs connues des paramètres *Q*, et sont introduites dans la relation (1.32) pour l’évaluation du nombre de *Reynolds* caractérisant l’écoulement dans le modèle rugueux de référence.
4. A partir des valeurs connues de et de, la relation (1.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires.
5. Enfin, connaissant les valeurs de et de, la valeur recherchée de la dimension linéaire *b* est directement déduite par application de la relation fondamentale (1.21).

Afin de mieux illustrer les étapes de calcul de dimensionnement ci-dessus indiquées, l’exemple d’application suivant est proposé.

***Exemple d’application 1.1****.*

Un canal de forme rectangulaire écoule un débit volume  d’un liquide de viscosité cinématique  sous une pente géométrique . Sachant que la rugosité absolue caractérisant l’état des parois internes du canal est  et que le paramètre de forme de la section mouillée est , déterminez la largeur du canal.

**I.2.6. Dimensionnement du canal par la relation de *Darcy-Weisbach***

 **pour une profondeur normale imposée**

Le problème consiste à déterminer la largeur *b* du canal lorsque le débit volume *Q*, la pente géométrique *i*, la rugosité absoluecaractérisant l’état de la paroi interne du canal, la viscosité cinématique du liquide en écoulement et la profondeur normale sont les paramètres connus ou constituent les données de ce problème. Dans ce cas, le paramètre d’aspect ou paramètre de forme n’est plus une donnée du problème et seule la profondeur normale  est imposée.

Pour les données de ce problème, il est nécessaire de considérer que le rapport d’aspect dans le canal étudié est différent du rapport d’aspect dans le modèle rugueux de référence, soit, et que la profondeur normale  dans le canal considéré est, dans un premier temps, égale à celle de l’écoulement dans le modèle rugueux. Sous la condition, la relation (1.20) devient :

 (1.36)

On introduit la conductivité relative :

 (1.37)

Tenant compte de (1.37), la relation (1.36) permet de déduire que :

 (1.38)

En développant la relation (1.38), on peut écrire que :

 (1.39)

On obtient ainsi une équation de troisième degré en, comprenant un terme de second ordre. L’équation obtenue se présente sous la forme :

 (1.40)

Avec :

, , 

En procédant au changement de variables :



on obtient alors une équation de troisième degré en, sans terme du second ordre, soit :



où :





Le discriminant de l’équation en *x* est :



Soit, après simplifications et réarrangements :



Il apparaît donc que lorsque la conductivité relative est telle que, alors le discriminant est positif ou nul. Pour, la valeur du paramètre de forme est, selon l’équation du troisième degré en  : .

Autrement dit, si, ce qui est le cas le plus courant, alors et le discriminant est négatif ou nul.

Dans ce cas, la solution réelle de l’équation du troisième degré en est unique et elle s’obtient après avoir calculé l’angle tel que :



soit :

 (1.41)

La racine réelle de l’équation de troisième degré en est :



soit :



En tenant compte du changement de variables adopté, la racine réelle de l’équation du troisième degré en est donc :

 (1.42)

Pour résoudre le problème du dimensionnement du canal lorsque la profondeur normale est imposée, il faut donc supposer dans un premier temps que la profondeur normale de l’écoulement dans le modèle rugueux de référence est égale à celle de l’écoulement dans le canal étudié.

En outre, si l’on faisait écouler le même débit volume dans le modèle rugueux et dans le canal, sous la même pente géométrique, alors la largeur du modèle rugueux de référence devrait être nécessairement différente de la largeur, voire même supérieure. On obtient schématiquement ce qui suit :



 **Canal étudié Modèle rugueux**

Cela revient à dire que pour obtenir, pour le même débit volume *Q* et la pente géométrique *i*, la même profondeur normale, il est nécessaire d’étirer ou de rallonger dans le sens horizontal le modèle rugueux, c'est-à-dire augmenter sa dimension linéaire.

En réalité, il est nécessaire de préciser que la profondeur normale  est différente de son homologue dans le modèle rugueux. Pour obtenir le même rapport d’aspect  dans le canal étudié et dans le modèle rugueux (), il est nécessaire que la profondeur normale dans le modèle rugueux soit telle que  . Cela revient donc à dire que pour la conductivité relative :

 

l’équation du troisième degré en exprimée par la relation (1.39) mènerait à. Ceci permettrait alors de déduire la valeur recherchée de la dimension linéaire *b*, puisque.

Le schéma suivant permet d’illustrer l’état de l’écoulement dans le canal étudié et dans le modèle rugueux, pour le rapport d’aspect.



Afin de mieux préciser cette démarche de calcul qui consiste à évaluer la largeur *b* du canal pour une valeur imposée de la profondeur normale, les étapes suivantes sont recommandées :

1. Pour les valeurs connues des paramètres *Q*, *i* et, et en admettant dans un premier temps que, calculer selon la relation (1.37) la conductivité relative :



1. Pour la valeur connue de la conductivité relative, on détermine par application de la relation (1.41) la valeur de l’angle. Notons qu’il faudra toujours considérer la valeur absolue de  par application de la relation (1.41).
2. Une fois déterminée la valeur de l’angle, la relation (1.42) permet de calculer la valeur du rapport d’aspect  dans le modèle rugueux de référence.
3. Pour les valeurs ainsi connues des paramètres et de, on peut alors déduire la valeur de la dimension linéaire du modèle rugueux.
4. Avec les valeurs calculées de et de, les relations (1.9), (1.11) et (1.32) permettent d’évaluer respectivement le périmètre mouillé, le diamètre hydraulique  et le nombre de *Reynolds*.
5. Les valeurs connues des paramètres, et seront introduites dans la relation (1.35) pour la détermination du facteur de correction des dimensions linéaires.
6. Une fois la valeur de déterminée, il faut maintenant affecter à l’écoulement dans le modèle rugueux la profondeur normale, pour la valeur imposée de la profondeur normale.
7. On calcule pour la valeur de la profondeur normale de l’étape 7, la nouvelle valeur de la conductivité relative :



1. Cette nouvelle valeur de la conductivité relative permet de calculer, selon la relation (1.41), la valeur de l’angle.
2. Avec la valeur connue de l’angle, l’application de la relation (1.42) conduit à la valeur du rapport d’aspect.
3. Une fois la valeur de  déterminée, la dimension linéaire recherchée *b* est directement déduite de la relation .

L’exemple d’application suivant est proposé pour mieux illustrer les étapes de calcul ci-dessus indiquées du dimensionnement du canal étudié lorsque la profondeur normale est imposée. Par souci de comparaison, cet exemple d’application reconduit les données de l’exemple d’application 1.1.

**Exemple d’application 1.2.**

Reprenons donc les données de l’exemple d’application 1.1, soient :

, , , , .

La profondeur normale a été évaluée au cours de l’exemple d’application 1.1 et elle est imposée dans le présent exemple. Il s’agit alors d’évaluer la dimension linéaire *b* du canal. Le résultat attendu devra être le même que celui obtenu lors de la solution de l’exemple d’application 1.1.

**I.3. Détermination de la profondeur normale**

L’un des problèmes rencontrés dans l’étude de l’écoulement uniforme est la détermination de la profondeur normale. Pour cela, les paramètres connus sont : le débit volume *Q* écoulé par le canal, la dimension linéaire *b* correspondant à la largeur du canal, la pente géométrique *i* du canal, la rugosité absolue caractérisant l’état de la paroi interne du canal et la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Le but du calcul est de déterminer le rapport d’aspect et de déduire la profondeur normale par la relation. On verra que le calcul est en grande partie facilité par la méthode du modèle rugueux.

**I.3.1. Calcul de la profondeur normale par la relation de *Darcy-Weisbach***

On considère un modèle rugueux de référence de forme rectangulaire dont la largeur est , écoulant un débit sous la pente géométrique . La dimension linéaire *b*, le débit volume *Q* et la pente géométrique *i* sont donc identiques dans le canal étudié et dans le modèle rugueux.

Le paramètre de forme ou rapport d’aspect de l’écoulement dans le modèle rugueux de référence est donc tel que, correspondant à. On peut même écrire que et. On a alors schématiquement ce qui suit :



 **Canal étudié modèle rugueux**

L’application de la relation de *Darcy-Weisbach* au modèle rugueux de référence à conduit à l’établissement de la relation (1.20) qui, pour, devient :

 (1.43)

En divisant les deux membres de l’équation (1.43) par et en remarquant que, il est aisé de montrer que :



Ou bien :



Soit, après simplifications :

 (1.44)

On introduit, par définition, la conductivité relative rapportée à la dimension linéaire *b* :

 (1.45)

La relation (1.44) prend alors la forme :

 (1.46)

Ou bien, plus simplement :

 (1.47)

L’on peut donc remarquer que la relation (1.47) est une équation de troisième degré en, sans terme du second ordre. Cette équation s’écrit :

 (1.48)

La conductivité relative est la variable connue de l’équation (1.48) et celle-ci permet alors de déterminer le rapport d’aspect. L’équation (1.48) se présente sous la forme :

 (1.49)

Avec : , , 

Le discriminant de l’équation (1.49) est :



Soit :



On peut donc écrire que :

1. Lorsque, le discriminant  est négatif ou nul et la racine réelle de l’équation du troisième degré en exprimée par (1.48) s’écrit :



Soit :

 (1.50)

Où l’angle  est tel que :



Soit :

 (1.51)

1. Lorsque, le discriminant  est positif ou nul et la racine réelle de l’équation de troisième degré en  est :



Soit :

 (1.52)

Où l’angle est tel que :



Soit :

 (1.53)

On note que, par des considérations trigonométriques, la racine réelle exprimée par la relation (1.52) peut s’écrire :

 (1.54)

On vient donc d’établir les relations (1.50) et (1.54) permettant de calculer le rapport d’aspect  dans le modèle rugueux de référence, à partir de la valeur connue de la conductivité relative.

Une fois la valeur de  déterminée et compte tenu de la valeur connue de la dimension linéaire *b* correspondant également à , les caractéristiques hydrauliques de l’écoulement dans le modèle rugueux de référence sont alors bien définies. C’est en particulier le cas du périmètre mouillé, le diamètre hydraulique et du nombre de *Reynolds* . Ces paramètres sont déterminés respectivement par application des relations (1.10), (1.11) et (1.32). Ainsi et selon la relation (1.35), le coefficient de correction des dimensions linéaires est par suite un paramètre bien défini que l’on peut calculer aisément.

Si l’on affectait au modèle rugueux de référence la dimension linéaire, alors le rapport d’aspect  dans le modèle rugueux serait égal à celui dans le canal étudié, soit . Ce rapport d’aspect est calculé par application de l’une des relations (1.50) ou (1.54), selon que la conductivité relative est supérieure ou inférieure à : . On note que le calcul doit être effectué pour la conductivité relative :

 (1.55)

Une fois le rapport d’aspect déterminé, la valeur de la profondeur normale recherchée est déduite de la relation.

Afin d’illustrer la démarche de calcul qu’on vient d’exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale, l’exemple d’application suivant est proposé. Par souci de comparaison, on reprend les données de l’exemple d’application 1.1.

***Exemple d’application 1.3.***

Reprenons donc les données de l’exemple d’application 1.1, soient :

, , , , .

Il s’agit de calculer la valeur de la profondeur normalede l’écoulement dans le canal de forme rectangulaire étudié.