**ChAPITRE II**

**ECOULEMENT UNIFORME DANS UNE CONDUITE DE FORME OVOIDALE**

**1. Introduction**

Au cours de ce chapitre, l’étude de l’écoulement uniforme dans la conduite de forme ovoïdale est présentée. Après avoir donné les caractéristiques géométriques de la conduite et hydrauliques de l’écoulement, tels que le rayon hydraulique, le périmètre mouillé et l’aire de la section mouillée, leur variation est représentée graphiquement et comparée à celle de la conduite circulaire.

Dans un premier temps, l’écoulement uniforme dans la conduite de forme ovoïdale est étudié à coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* constants, puis à coefficients de résistance variables dans un second temps. A coefficients de résistances constants, la conductivité relative est déduite des relations de *Chézy* et de *Manning* et sa représentation graphique montre une courbe unique passant par un maximum. A coefficients de résistance variables, la conductivité relative est déduite de la formule d’Achour et de *Bedjaoui* (2006) et dont la représentation graphique se traduit par une serie de courbes passant chacune par un maximum. Les courbes obtenus sont discutées et commentées et leurs principales caractéristiques sont déterminées.

Les courbes de remplissage de la conduite à coefficients de résistance constants et variables font l’objet d’une étude particulière et des relations approchées sont proposées pour le calcul de la profondeur normale.

Les coefficients de *Chézy* et de *Manning* sont déterminés en ayant recours à la méthode du modèle rugueux de référence (*Achour*, 2007). Leur représentation graphique est analysée et des conclusions intéressantes sont tirées. Des exemples d’application pratiques sont proposés pour mieux illustrer la méthode préconisée.

**2. Caractéristiques géométriques**

L’une des formes de la conduite ovoïdale considérées dans la présente étude est celle représentée par la figure 2.1. La conduite est caractérisée par une hauteur correspondant au diamètre du cercle et de centre.



**Figure 2.1 :** Schéma de définition de la conduite ovoïdale.

1. En considérant le triangle, nous pouvons écrire que :



soit :

, ou bien radian

Par suite, le triangle permet d’écrire que :

, ou bien radian

1. 
2. Le triangle permet d’écrire que :



soit :



En outre, il est possible d’écrire que :



soit :



1. La longueur de l’arcest :



1. La longueur de l’arc, égale à celle de l’arc, est :



1. La longueur de l’arc, moitié du périmètre du cercle est :



**3. Caractéristiques de l’écoulement**

Les caractéristiques de l’écoulement, telle que l’aire de la section mouillée, le périmètre mouillé, la largeur du plan d’eau ou le rayon hydraulique dépendent du taux de remplissage où est la profondeur normale de l’écoulement. En outre, ces caractéristiques s’expriment par différentes relations selon le lieu géométrique de l’écoulement. Il n’existe de nos jours aucune relation unique permettant d’évaluer l’aire de la section mouillée pour un taux de remplissage  (Figure 2.2). C’est le cas également de toutes les caractéristiques hydrauliques de l’écoulement. La figure 2.2 montre les trois espaces géométriques que peut occuper l’écoulement, selon la valeur du taux de remplissage. C’est ainsi que si :

* , l’écoulement, de plan d’eau, se situe dans la partie circulaire la plus basse de la conduite.
* , l’écoulement, de plan d’eau, se situe dans l’espace délimité par les arcs de cercle et.
* , l’écoulement, de plan d’eau, se situe dans la partie circulaire la plus haute de la conduite.

Les caractéristiques de l’écoulement doivent donc être déterminées pour chacun des trois cas ci-dessus indiqués.



**Figure 2.2 :** Schéma de définition de l’état de l’écoulement dans la conduite de forme ovoïdale.

* 1. 
     1. ***Largeur du plan d’eau***

Lorsque, la largeur du plan d’eau correspond à la corde. Les points et  appartiennent au cercle, de centre et de diamètre. Ainsi :



ou bien :



où l’angle est le demi angle au centre, tel que :



ou tel que :



Finalement, la largeur du plan d’eau est :

 (2.1)

* + 1. ***Périmètre mouillé***

Le périmètre mouillé correspond à la longueur de l’arc, appartenant au cercle, de centre et de diamètre. Ainsi :



Soit :

 (2.2)

Définissons la fonction :

 (2.3)

La relation (2.2) devient alors :

 (2.4)

* + 1. ***Aire de la section mouillée***

L’aire de la section mouillée correspond à l’aire du segment circulaire, appartenant au cercle, de centre et de diamètre. Ainsi :



Soit :

 (2.5)

Définissons la fonction :

 (2.6)

La relation (2.5) permet alors d’écrire que :

 (2.7)

* + 1. ***Rayon hydraulique***

Les relations (2.4) et (2.7) permettent de déduire que le rayon hydraulique est :

 (2.8)

* 1. 
     1. ***Largeur du plan d’eau***

Lorsque, la largeur du plan d’eau  correspond à (Figure 2.2). Le point appartient au cercle de centre et de rayon. L’équation de ce cercle est :

 (2.9)

où et sont les coordonnées du point. Dans le système d’axes de la figure 2.2, le point a pour coordonnées et. Dans le même système d’axes, le point  a pour coordonnées  et. La relation (2.9) s’écrit alors :



En divisant les deux membres de cette équation par, il vient que :



ou bien :



La largeur du plan d’eau  est donc :

 (2.10)

* + 1. ***Périmètre mouillé***

Lorsque, le périmètre mouillé correspond à deux fois la longueur de l’arc, à laquelle il faut ajouter la longueur de l’arc de cercle. La longueur de l’arc  est égale à la différence des longueurs des arcs  et. La longueur de l’arca été évaluée à l’étape *iv* du paragraphe précédent, soit. La longueur de l’arc a été quant à elle évaluée à l’étape *v*, soit.

Pour évaluer la longueur de l’arc, écrivons d’abord que dans le triangle droit :

**

Soit :

 (2.11)

Ou bien :

** (2.12)

L’angle ainsi défini varie entre et, valeur correspondant à celle de l’angle.

Notons également que dans le triangle droit :

**

Soit, en tenant compte de la relation (2.10) :

** (2.13)

La longueur de l’arc  est par suite :



ou bien :



La longueur de l’arc  est par suite :



Le périmètre mouillé est donc tel que :



Soit :



Ou bien :

 (2.14)

Définissons la fonction :

 (2.15)

La relation (2.14) s’écrit alors plus simplement :

 (2.16)

* + 1. ***Aire de la section mouillée***

L’aire de la section mouillée correspondant à  est définie par l’espace de la figure 2.2. L’aire de la section mouillée peut être décomposée en trois aires qui sont :

* , où est l’aire de la section du segment circulaire.
* , l’aire du trapèze dont les caractéristiques sont :

- Grande base largeur du plan d’eau, définie par la relation (2.10).

- Petite base, déterminée à l’étape *iii* du paragraphe précédent.

- Hauteur.

* , l’aire du segment circulaire qui s’exprime par la relation (2.5) pour.

L’aire de la section recherchée est donc :



L’aire du segment circulaire appartient au cercle de centre, de rayon et d’angle au centre. Nous pouvons ainsi écrire que, pour et exprimés en radian :



ou bien :

 (2.17)

La quantité peut s’écrire :

 (2.18)

L’angle a été évalué au cours de l’étape *i* du paragraphe précédent, soit radian. Ceci permet d’écrire que :





En tenant compte des relations (2.11) et (2.13), la relation (2.18) s’écrit alors :

 (2.19)

Avec la valeur de  radian et en ayant recours aux relations (2.12) et (2.19), la relation (2.17) devient :



Ou bien :

 (2.20)

L’aire de la section mouilléedu trapèze s’écrit :

 (2.21)

ou bien :

 (2.22)

En tenant compte de la relation (2.10), la relation (2.22) devient :

 (2.23)

Après réarrangements, la relation (2.23) mène à :

 (2.24)

L’aire du segment circulaire est donnée par la relation (2.5) pour, soit :





Le calcul mène à :

 (2.25)

Finalement, l’aire recherchéeest, compte tenu des relations (2.20), (2.24) et (2.25) :

 (2.26)

Définissons, par souci de simplification d’écriture, la fonction :

 (2.27)

La relation (2.26) s’écrit alors :

 (2.28)

* + 1. ***Rayon hydraulique***

Le rayon hydraulique s’écrit, en ayant recours aux relations (2.16) et (2.28) :

 (2.29)

* 1. 
     1. ***Largeur du plan d’eau***

Lorsque, la largeur du plan d’eau correspond à la longueur du segment. Dans le triangle droit, nous pouvons écrire que :

 (2.30)

 (2.31)

 (2.32)

Les relations (2.30), (2.31) et (2.32) mènent à écrire que :

 (2.33)

ou bien :

 (2.34)

Or :

 (2.35)

soit :

 (2.36)

Par suite, la relation (2.34) s’écrit :



Ainsi, la largeur du plan d’eau est :

 (2.37)

* + 1. ***Périmètre mouillé***

Pour, le périmètre mouillé correspond à deux fois la longueur de l’arc à laquelle il faut ajouter la longueur. Celle-ci s’obtient par la relation (2.14) pour. La longueur est quant à elle égale à la différence des longueurs des arcs et.

Désignons par la longueur. Pour, la relation (2.14) donne :



Soit :

 (2.38)

Désignons par la longueur de l’arc. Celle-ci correspond au demi-périmètre du cercle de centre et de rayon. Ainsi :

 (2.39)

Désignons également par la longueur de l’arc. Nous pouvons alors écrire que :

 (2.40)

Or, dans le triangle, nous pouvons écrire que :



Soit :

 (2.41)

Notons également que le triangle permet d’écrire :

 (2.42)

Tenant compte de la relation (2.37), la relation (2.42) devient :

 (2.43)

Soit :

 (2.44)

Tenant compte de (2.41), la relation (2.40) s’écrit :

 (2.45)

Le périmètre recherché est, en ayant recours aux relations (2.38), (2.39) et (2.45) :



ou bien, plus simplement :

 (2.46)

Définissons la fonction :

 (2.47)

La relation (2.46) s’écrit alors :

 (2.48)

* + 1. ***Aire de la section mouillée***

L’aire de la section mouillée, dans le cas où, correspond à l’espace de la figure 2.2. L’aire de la section mouillée est la somme des aires et.

Désignons par l’aire de la section. Cette aire est donnée par la relation (2.26) pour, soit :



Le calcul mène à :

 (2.49)

Désignons également par l’aire de la section mouillée du segment circulaire. Ce segment circulaire appartient au cercle de centre et de rayon. Nous pouvons alors écrire que, pour l’angle exprimé en radian :

 (2.50)

Soit :

 (2.51)

Tenant compte des relations (2.41) et (2.43), la relation (2.51) s’écrit :

 (2.52)

Désignons aussi par l’aire du demi-cercle, de rayon. Il vient que :

 (2.53)

L’aire  recherchée est, en ayant recours aux relations (2.49), (2.52) et (2.53) :

 (2.54)

Définissons la fonction :

 (2.55)

La relation (2.54) s’écrit alors plus simplement :

 (2.56)

Pour l’état plein de la conduite ovoïdale considérée, correspondant au taux de remplissage, la relation (2.54) mène à écrire que :

 (2.57)

L’aire de la conduite circulaire pleine de même diamètre (Figure 2.1) est :

 (2.58)

Par suite, nous pouvons déduire des relations (2.57) et (2.58) que la conduite ovoïdale occupe de la surface de la conduite circulaire.

* + 1. ***Rayon hydraulique***

Lorsque, le rayon hydraulique s’exprime, compte tenu des relations (2.48) et (2.56), par :

 (2.59)

**4. Variation des caractéristiques de l’écoulement**

Les caractéristiques adimensionnelles de l’écoulement, en particulier le périmètre mouillé relatif, l’aire de la section mouillée relative et le rayon hydraulique relatif sont représentées graphiquement sur les figures 2.3, 2.4 et 2.5 respectivement, dans la gamme. Ces caractéristiques sont comparées à leurs homologues dans la conduite circulaire.



**Figure 2.3 :** Variation du périmètre mouillé relatif en fonction du taux de remplissage.



**Figure 2.4 :** Variation de la section relative en fonction du taux de remplissage.



**Figure 2.5 :** Variation du rayon hydraulique relatif en fonction du taux de remplissage. (●) Taux de remplissage correspondant à.

La figure 2.5 montre que le rayon hydraulique relatif passe par un maximum, aussi bien pour le cas de la conduite circulaire que pour celui de conduite de forme ovoïdale considérée. Le calcul a révélé que le taux de remplissage, correspondant au maximum de, est pour la conduite de forme circulaire et pour la conduite de forme ovoïdale.

Pour celle-ci, le taux de remplissagecorrespondant au maximum de appartient à la gamme. Ainsi, doit être calculé par application de la relation (2.59). La valeur de chacune des fonctions etsont respectivement, selon les relations  (2.47) et (2.55):

* 
* 

Ainsi :



Soit :

 (2.60)

**5. Etude de l’écoulement à coefficient de résistance variable**

Le coefficient de résistance à l’écoulement, aussi bien celui de *Chézy* que celui de *Manning*, devrait en principe dépendre, parmi d’autres paramètres, du taux de remplissage de la conduite. Lorsqu’il s’agit de déterminer le diamètre de la conduite, le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*, ou *n* de *Manning*, ne constitue pas une donnée du problème.

**5.1. Coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy***

**5.1.1. Relation générale et variation du coefficient de résistance de *Chézy***

Pour exprimer le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* par une relation de validité générale, il est utile d’voir recours à la formule du débit volume d’*Achour* et *Bedjaoui* (2006), soit :

 (2.61)

Dans cette relation, désigne la rugosité absolue caractérisant l’état de la paroi interne de la conduite et est un nombre de *Reynolds* défini par la relation :

 (2.62)

où est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour le cas de la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, l’aire de la section mouillée figurant dans la relation (2.61) s’exprime par les relations (2.7), (2.28), et (2.56) selon la gamme du taux de remplissage. Quant au rayon hydraulique figurant dans la relation (2.62), il s’exprime par les relations (2.8), (2.29) et (2.59).

Pour une conduite de forme ovoïdale à l’état plein, correspondant au taux de remplissage, le rayon hydraulique  est régi par la relation (2.59), où l’indice « *p* » désigne l’état plein. Les fonctions et figurant dans cette relation sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, et l’on peut aisément montrer que et. Par suite, le rayon hydraulique à l’état plein est, en vertu de la relation (2.59) :

 (2.63)

Par suite, le nombre de *Reynolds* à l’état plein de la conduite est, selon la relation (2.62) :

 (2.64)

Selon *Chézy*, le débit volume s’exprime par la relation :

 (2.65)

oùet désignent respectivement le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* et la pente longitudinale de la conduite.

En comparant les relations (2.65) et (2.61), nous pouvons déduire que le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* est tel que :

 (2.66)

La relation (2.66) peut aussi s’écrire, en termes adimensionnels :

 (2.67)

Tenant compte des relations (2.8), (2.29) et (2.59), la relation (2.66) montre que le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* est fonction à la fois de la rugosité relative , du taux de remplissage et d’un nombre de *Reynolds* , lui-même fonction de la pente longitudinale , du diamètre , de et de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Nous pouvons donc écrire la relation fonctionnelle :

 (2.68)

En ayant recours aux relations (2.8), (2.29) et (2.59), nous pouvons écrire que pour :

1. 
   * La relation (2.62) mène à :

 (2.69)

ou bien :

 (2.70)

* + La relation (2.67) mène à :

 (2.71)

1. 
   * + La relation (2.62) mène à écrire que :

 (2.72)

ou bien :

 (2.73)

* + - La relation (2.67) permet d’écrire que :

 (2.74)

1. 
   * + - La relation (2.62) mène à :

 (2.75)

ou bien :

 (2.76)

* + - * La relation (2.67) mène à :

 (2.77)

Les relations (2.71), (2.74) et (2.77) traduisent ainsi la relation fonctionnelle (2.68), selon la gamme de valeurs du taux de remplissage. Ces relations ont été graphiquement représentées sur la figure 2.6 (**a** à **e**).



**a)**



**b)**



**c)**



**d)**



**e)**

**Figure 2.6 :** Variation du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* en fonction du taux de remplissage, selon les relations (2.71), (2.74) et (2.77).

(●) Valeurs maximales obtenues pour.

Il ressort de la figure 2.6 (**a** à **e**) que, pour la même valeur du nombre de *Reynolds* à l’état plein et quelle que soit la rugosité relative, augmente avec l’accroissement du taux de remplissage. Notons que cette augmentation est très rapide dans la gamme approximative, alors qu’elle est plus lente au-delà de. Pour toutes les rugosités relatives considérées, les courbes de la figure 2.6 (**a** à **e**) montrent que atteint un maximum et les calculs ont montré que le taux de remplissage correspondant à est. Cette valeur de appartient à l’intervalle et, de ce fait, est régi par la relation (2.77). Nous pouvons donc énoncer que la valeur maximale du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* s’obtient à la profondeur, alors que les calculs ont montré que, pour la conduite de forme circulaire, s’obtient à la profondeur.

La figure 2.6 (**a** à **e**) montre enfin que les courbes de variation de se resserrent au fur et à mesure de l’augmentation de la rugosité relative. Nous pouvons constater sur la figure 2.6e, correspondant à la plus forte rugosité relative considérée, que les courbes de variation de sont extrêmement proches les unes des autres et se confondent au-delà du nombre de *Reynolds*. Ceci correspond au régime turbulent rugueux pour lequelest indépendant du nombre de *Reynolds*et donc de la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour exprimer le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*, introduisons la valeur dans la relation (2.77). Les fonctions et sont régies par les relations (2.47) et (2.55) respectivement. Pour, elles prennent les valeurs suivantes :

* + - * + 
* 



Ainsi, selon la relation (2.77), le coefficient de résistance à l’écoulement maximal de *Chézy* est :



Soit :

 (2.78)

Rappelons que le nombre de *Reynolds*, figurant dans la relation (2.78), est donné par la relation (2.64). La relation (2.78) permet donc d’évaluer la valeur maximale du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*, à partir des valeurs connues du diamètre de la conduite, de la rugosité absolue, de la pente longitudinale et de la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour l’état plein de la conduite, correspondant à, la relation (2.77) permet d’exprimer le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*. Pour, les fonctionset prennent respectivement les valeurs suivantes :

* + - * + 
* 



Ainsi, selon la relation (2.77), le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* à l’état plein est donné par la relation :



Soit :

 (2.79)

Le nombre de *Reynolds*, figurant dans la relation (2.79), est donné par la relation (2.64). La relation (2.79) permet donc l’évaluation du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* à l’état plein, à partir des valeurs connues du diamètre de la conduite, de la rugosité absolue , de la pente longitudinale et de la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

**5.1.2. Calcul du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* par la MMR**

Lorsque le diamètre de la conduite n’est pas une donnée du problème, les relations (2.71), (2.74) et (2.77) ne peuvent être utilisées pour évaluer le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*. Les paramètres connus du problème sont le débit volume, le taux de remplissage de la conduite, la pente longitudinale, la rugosité absolue et la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Pour ces seuls paramètres, la MMR (*Achour*, 2007) permet la détermination du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*.

Selon la MMR, l’écoulement dans le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de frottement, ce qui se traduit par un coefficient de résistance de *Chézy* :

** (2.80)

En outre, le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre, écoulant un débit volume  d’un liquide de viscosité cinématique correspondant à un taux de remplissage, sous une pente longitudinale. Pour déterminer le coefficient de résistancede *Chézy*, caractérisant l’écoulement dans la conduite considérée, admettons les conditions suivantes :

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

Définissons la conductivité relative :

 (2.81)

Selon la relation (2.81) et tenant compte des conditions (*ii*) et (*iii*), la conductivité relative du modèle rugueux de référence serait telle que :

 (2.82)

ou bien, en tenant compte de la relation (2.80) :

 (2.83)

* + - 1. 

L’aire de la section mouillée est donnée par la relation par la relation (2.7), tandis que le rayon hydraulique  s’exprime par la relation (2.8). Les fonctions et sont définies par les relations (2.3) et (2.6) respectivement.

En tenant compte de toutes ces relations, la relation (2.65) devient :

 (2.84)

La conductivité relative est donnée selon la relation (2.81) :

 (2.81)

La relation (2.84) s’écrit alors, en termes adimensionnels :

 (2.85)

* + - 1. 

Dans cet intervalle du taux de remplissage, l’aire de la section mouillée ainsi que le rayon hydraulique  sont respectivement donnés par les relations (2.28) et (2.29). Dans ces relations, les fonctions  et sont définies par les relations (2.15) et (2.27) respectivement.

En ayant recours à ces relations, la relation (2.65) devient :

 (2.86)

En faisant appel à la relation (2.81), la relation (2.86) s’écrit alors, en termes adimensionnels :

 (2.87)

* + - 1. 

Dans cet intervalle de, l’aire de la section mouillée et le rayon hydrauliquesont donnés par les relations (2.56) et (2.59) respectivement. Dans ces relations, la fonction est définie par la relation (2.47), tandis que la fonction est donnée par la relation (2.55). Ainsi, en tenant compte de ces relations, la relation (2.65) devient :

 (2.88)

En ayant recours à la relation (2.81), la relation (2.88) s’écrit, en termes adimensionnels :

 (2.89)

Pour le cas particulier correspondant à l’état plein de la conduite ovoïdale, le taux de remplissage est. Les fonctions  et sont respectivement égales à :

* 



* 

Ainsi, selon la relation (2.89), la conductivité relative à l’état plein est :



Soit :

 (2.90)

La conductivité relative du modèle rugueux est régie par les relations (2.85), (2.87) et (2.89) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage. Ainsi, pour :

1. 

 (2.91)

Les relations (2.83) et (2.91) permettent de déduire que le diamètre  du modèle rugueux de référence est :

 (2.92)

Pour, le nombre de *Reynolds*, caractérisant l’écoulement dans le modèle rugueux de référence, s’exprime par une relation similaire à la relation (2.70), soit :

 (2.93)

1. 

 (2.94)

Les relations (2.83) et (2.94) permettent d’écrire que :

 (2.95)

Dans la gamme, le nombre de *Reynolds*, caractérisant l’écoulement dans le modèle rugueux de référence, s’exprime par une relation similaire à la relation (2.73), soit :

 (2.96)

1. 

 (2.97)

Nous pouvons déduire des relations (2.83) et (2.97) que :

 (2.98)

Dans la gamme, le nombre de *Reynolds*, caractérisant l’écoulement dans le modèle rugueux de référence, s’exprime par une relation similaire à la relation (2.76), soit :

 (2.99)

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres, et, le diamètre  du modèle rugueux de référence peut être explicitement évalué par l’une des relations (2.92), (2.95) ou (2.98). Ces paramètres permettent également d’évaluer le nombre de *Reynolds* de l’écoulement dans le modèle rugueux de référence, par application de l’une des relations (2.93), (2.96) et (2.99). Dans ces relations, le nombre de *Reynolds* à l’état plein s’exprime par une relation similaire à la relation (2.64), soit :

 (2.100)

Selon la MMR, le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* est défini par la relation :



Soit, en tenant compte de la relation (2.80) :

 (2.101)

Dans la relation (2.101), est un paramètre sans dimension tel que et il est défini par la relation :

 (2.102)

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, le rayon hydraulique, figurant dans la relation (2.102), est défini par des relations similaires aux relations (2.8), (2.29) et (2.59). De même que le nombre de *Reynolds*  est donné par l’une des relations (2.93), (2.96) et (2.99). Ainsi :

1. 

 (2.103)

La relation (2.102) s’écrit, en tenant compte des relations (2.93) et (2.103) :

 (2.104)

1. 

 (2.105)

Tenant compte des relations (2.29) et (2.96), la relation (2.104) s’écrit :

 (2.106)

1. 

 (2.107)

La relation (2.102) devient alors, tenant compte des relations (2.99) et (2.107) :

 (2.108)

Pour évaluer le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*, pour les valeurs connues des paramètres,,, et, les étapes suivantes sont recommandées :

Connaissant la valeur du taux de remplissage, l’une des relations (2.92), (2.95) ou (2.98) permet d’évaluer le diamètre du modèle rugueux de référence.

Les paramètres connus, et sont introduits dans la relation (2.100) pour le calcul du nombre de *Reynolds* à l’état plein.

Le coefficient peut alors être évalué par l’une des relations (2.104), (2.106) ou (2.108).

Enfin, le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* est déduit de la relation (2.101).

**5.1.3. Exemple d’application 2.1**

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 est le siège d’un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume d’un liquide de viscosité cinématique, sous une pente longitudinale. La paroi interne de la conduite est considérée comme étant à l’état géométriquement lisse () et le taux de remplissage est.

1. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*.
2. Déduire la valeur du diamètrede la conduite.

**5.1.4. Exemple d’application 2.2**

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 est le siège d’un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume d’un liquide de viscosité cinématique, sous une pente longitudinale. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue et le taux de remplissage est.

1. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*.
2. Déduire la valeur du diamètrede la conduite.

**5.1.5. Exemple d’application 2.3**

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 est le siège d’un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume d’un liquide de viscosité cinématique, sous une pente longitudinale. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue et le taux de remplissage est.

1. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy*.
2. Déduire la valeur du diamètrede la conduite.

**5.2. Expression du débit volume maximal**

L’expression du débit volume maximal****, correspondant à la capacité d’évacuation de la conduite, peut être déduite de la formule générale (2.61). Dans cette relation, l’aire de la section mouillée, le rayon hydraulique et le nombre de *Reynolds* s’expriment par les relations que nous avons déjà établies, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage. Nous pouvons alors écrire que pour :

1. 

L’aire de la section mouillée, le rayon hydraulique et le nombre de *Reynolds* s’expriment par les relations (2.7), (2.8) et (2.70) respectivement. Tenant compte de ces relations, la relation (2.61) s’écrit :

 (2.109)

Introduisons la conductivité relative :

 (2.110)

La relation (2.109) s’écrit alors, en termes adimensionnels :

 (2.111)

1. 

L’aire de la section mouillée, le rayon hydraulique et le nombre de *Reynolds* s’expriment par les relations (2.28), (2.29) et (2.73) respectivement. Tenant compte de ces relations, la relation (2.61) s’écrit :

 (2.112)

soit :

 (2.113)

1. 

L’aire de la section mouillée, le rayon hydraulique et le nombre de *Reynolds* s’expriment par les relations (2.56), (2.59) et (2.76) respectivement. Tenant compte de ces relations, la relation (2.61) s’écrit :

 (2.114)

Ou bien :

 (2.115)

Rappelons que dans les relations (2.111), (2.113) et (2.115), le nombre de *Reynolds* à l’état plein est donné par la relation (2.64). Les relations (2.111), (2.113) et (2.115) montrent que la conductivité relative de la conduite est fonction à la fois du taux de remplissage, de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* à l’état plein.

La variation du taux de remplissage en fonction de la conductivité relative a été représentée sur la figure 2.7 (**a** à **f**), conformément aux relations (2.111), (2.113) et (2.115).



**a)**



**b)**



**c)**



**d)**



**e)**



**f)**

**Figure 2.7 :** Variation de pour diverses valeurs de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* conformément aux relations (2.111), (2.113) et (2.115).

Il ressort principalement de la figure 2.7 (**a** à **f**) que la conductivité relative augmente dans un premier temps avec l’accroissement du taux de remplissage, puis diminue dans un second temps même si continue d’augmenter. La variation de passe ainsi par un maximum qui dépend à la fois de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds*. Le tableau 2.1 regroupe les valeurs particulières du taux de remplissage correspondant à, calculées selon les relations (2.111), (2.113) et (2.115) pour diverses valeurs de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds*. L’espace grisâtre du tableau 2.1 correspond au domaine pratique de la rugosité et du nombre de *Reynolds*.

**Tableau 2.1 :** Valeurs du taux de remplissage correspondant à  pour diverses valeurs de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 0,95083 | 0,950834 | 0,950862 | 0,950894 | 0,951111 | 0,951297 | 0,951621 | 0,951381 |
|  | 0,95267 | 0,952703 | 0,952822 | 0,952946 | 0,953437 | 0,953582 | 0,953046 | 0,952352 |
|  | 0,953285 | 0,953348 | 0,953558 | 0,953742 | 0,954210 | 0,954201 | 0,953283 | 0,952494 |
|  | 0,954434 | 0,954688 | 0,955166 | 0,955351 | 0,955208 | 0,954865 | 0,953486 | 0,952611 |
|  | 0,954838 | 0,955258 | 0,955743 | 0,955812 | 0,955377 | 0,954963 | 0,953512 | 0,952626 |
|  | 0,955623 | 0,956489 | 0,956507 | 0,956315 | 0,955523 | 0,955045 | 0,953533 | 0,952638 |
|  | 0,955909 | 0,956855 | 0,956639 | 0,956390 | 0,955542 | 0,955055 | 0,953536 | 0,952640 |
|  | 0,956478 | 0,957259 | 0,956639 | 0,956453 | 0,955557 | 0,955064 | 0,953538 | 0,952641 |
|  | 0,956691 | 0,957319 | 0,956767 | 0,956461 | 0,955559 | 0,955065 | 0,953538 | 0,952641 |

Nous pouvons ainsi constater que dans la large gamme pratique et, le taux de remplissage correspondant à varie dans l’intervalle. La valeur moyenne peut donc être considérée comme la valeur la plus appropriée pour le calcul du débit volume maximal. Elle appartient à l’intervalle, ce qui permet de déduire que la conductivité relative maximale est régie par la relation (2.115). Ainsi, le débit volume maximal s’obtient à la profondeur.

Pour, les fonctions et, régies par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, prennent les valeurs :

* + 
  + 



La conductivité relative maximale est par suite, selon la relation (2.115) :

 (2.116)

Tenant compte de la relation (2.110), nous pouvons alors écrire que :

 (2.117)

Nous obtenons ainsi l’expression du débit volume maximal en fonction de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* à l’état plein.

**5.2.1. Exemple d’application 2.4**

Quelle est la capacité d’évacuation de la conduite ovoïdale représentée par la figure 2.1, sachant que :

 ; , , 

**5.3. Relation approchée de la profondeur normale**

L’objectif de cette partie de l’étude est la détermination d’une relation approchée permettant le calcul explicite de la profondeur normale de l’écoulement dans la conduite de forme ovoïdale considérée, dans le cas du coefficient de résistance à l’écoulement variable. Pour cela, la démarche adoptée consiste à trouver la loi de variation de en tenant compte des relations (2.109), (2.112), (2.114) et (2.116).

Nos calculs ont montré, après un programme de vérification intense, que dans la gamme, le taux de remplissage pouvait s’exprimer par la relation approchée suivante :

 (2.118)

L’application de la relation approchée (2.118) à de multiples exemples numériques a montré que la valeur du taux de remplissage est obtenue avec un écart relatif maximal inférieur à 0,5% seulement. Compte tenu de la relation (2.118), la profondeur normale s’écrit alors :

 (2.119)

**5.3.1. Exemple d’application 2.5**

En ayant recours à la relation (2.119), déterminer la valeur de la profondeur normale de l’écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, sachant que :

 ;  ;  ;  ; .

**5.3.2. Exemple d’application 2.6**

Déterminer la profondeur normale de l’écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, sachant que :

 ;  ;  ;  ; .

**5.3.3. Exemple d’application 2.7**

Déterminer la profondeur normale de l’écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, sachant que :

 ;  ;  ;  ; 

**5.3.4. Exemple d’application 2.8**

Déterminer la profondeur normale de l’écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, sachant que :

 ;  ;  ;  ; 

**5.4. Expression de la vitesse moyenne maximale **

En ayant recours à la relation générale (2.61) exprimant le débit volume et compte tenu du fait que la vitesse moyenne est telle que, nous pouvons alors écrire que :

 (2.120)

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, le rayon hydraulique s’exprime par l’une des relations (2.8), (2.29) ou (2.59), tandis que le nombre de *Reynolds* *R* est donné par l’une des relations (2.70), (2.73) ou (2.76). Ainsi, pour :

1. 

 (2.121)

Introduisons la vitesse relative telle que :

 (2.122)

La relation (2.121) s’écrit alors, en termes adimensionnels :

 (2.123)

1. 

 (2.124)

Ou bien :

 (2.125)

1. 

 (2.126)

Ou bien :

 (2.127)

Nous pouvons ainsi observer que dans toute la gamme, la vitesse relative peut s’exprimer en fonction du taux de remplissage, de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* à l’état plein.

Conformément aux relations (2.123), (2.125) et (2.127), la vitesse relative a été représentée graphiquement sur la figure 2.8 (**a** et **b**) en fonction du taux de remplissage, pour diverses valeurs du nombre de *Reynolds*  et pour les rugosités relatives extrêmeset.



**a)**



**b)**

**Figure 2.8 :** Variation de pour diverses valeurs du nombre de *Reynolds* à l’état plein, conformément aux relations(2.123), (2.125) et (2.127). (**a**)**:**  ; (**b**) : . (●) Valeurs maximales de correspondant à.

La figure 2.8 (**a** et **b**) montre que la vitesse relative augmente dans un premier temps avec l’accroissement du taux de remplissage, puis diminue dans un second temps en passant par un maximum. Le taux de remplissage correspondant à la valeur maximale de a été estimé à et demeure constant quelle que soit la valeur du nombre de *Reynolds* et de la rugosité relative. Notons que cette valeur de correspond à celle que nous avons obtenue pour le coefficient de *Chézy* . Nous pouvons affirmer que et donc apparaît à la profondeur. D’autre part, la figure 2.8 montre aussi que plus la rugosité relative augmente et plus les courbes de variation de se resserrent pour ensuite se confondre quasiment à partir de la valeur, lorsque la rugosité relative atteint la valeur. Au-delà de la valeur, le nombre de *Reynolds*n’a aucune influence sur la vitesse relative et l’écoulement est alors dans le domaine turbulent rugueux. La vitesse relative ne dépend que de la rugosité relative.

Puisque la valeur, correspondant à appartient à l’intervalle, alors est régie par la relation (2.127). Pour , les fonctions et prennent respectivement la valeur :







La relation (2.127) permet alors d’écrire que :

 (2.128)

Tenant compte des relations (2.122) et (2.128), nous pouvons écrire que :

 (2.129)

Rappelons que dans la relation (2.129), le nombre de *Reynolds* à l’état plein est donné par la relation (2.64).

**5.4.1. Exemple d’application 2.9**

Soit une conduite en béton de forme ovoïdale (Figure 2.1) dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue. Admettons que la vitesse d’auto-curage doit être supérieure ou égale à et que, pour éviter tout phénomène érosif, la vitesse moyenne admissible ne doit pas excéder à. La conduite écoule le débit volume d’un liquide de viscosité cinématique, sous une pente longitudinale. Le taux de remplissage de la conduite est.

Déterminer la profondeur normale  de l’écoulement.

**5.4.2. Exemple d’application 2.10**

Soit une conduite de forme ovoïdale (Figure 2.1) dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue. Admettons que la vitesse d’auto-curage doit être supérieure ou égale à et que, pour éviter tout phénomène érosif, la vitesse moyenne admissible ne doit pas excéder à. La conduite écoule le débit volume d’un liquide de viscosité cinématique, sous une pente longitudinale. Le taux de remplissage de la conduite est.

Déterminer la profondeur normale  de l’écoulement.

**5.4.3. Exemple d’application 2.11**

Reprenons l’exemple d’application 2.10 et déterminons la profondeur normale de l’écoulement pour les données suivantes :

, , , , 

**5.5. Calcul du coefficient de *Manning* par la MMR**

La relation universellement connue de *Manning* exprime le débit volume sous la forme suivante :

 (2.130)

En comparant les relations (2.65) et (2.130), nous pouvons déduire que :

 (2.131)

Par conséquent, le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de résistance de *Manning* tel que :

 (2.132)

Rappelons que**.

Le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre  ; il écoule un débit volume  d’un liquide de viscosité cinématique correspondant à un taux de remplissage, pour une pente longitudinale. Pour déterminer le coefficient de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

1.  : le diamètre de la conduite considérée est différent de celui du modèle rugueux de référence.
2.  : la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même débit volume.
3.  : la conduite considérée et le modèle rugueux de référence sont caractérisés par la même pente longitudinale.
4.  : Le taux de remplissage de la conduite considérée est égal à celui du modèle rugueux de référence.
5.  : la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même liquide.

Le débit volume écoulé par le modèle rugueux de référence s’écrit :

 (2.133)

L’aire de la section mouillée ainsi que le rayon hydraulique sont liés à leurs homologues du modèle rugueux de référence et par les relations suivantes :

 (2.134)

 (2.135)

En tenant compte des relations (2.134) et (2.135), la relation (2.130) devient :

 (2.136)

Il ressort ainsi des relations (2.133) et (2.136) que :

 (2.137)

En combinant les relations (2.132) et (2.137), il vient que :

 (2.138)

Le coefficient de correction des dimensions linéaires est donné par l’une des relations (2.104), (2.106) ou (2.108) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, tandis que s’exprime par l’une des relations (2.103), (2.105) ou (2.107). Ainsi :

* 1. 

 (2.139)

* 1. 

 (2.140)

* 1. 

 (2.141)

Selon les relations (2.139), (2.140) et (2.141), le coefficient  de *Manning* s’exprime en fonction du taux de remplissage, de la rugosité absolue et des caractéristiques et du modèle rugueux de référence. Suivant la valeur de, le diamètre est donné par l’une des relations (2.92), (2.95) ou (2.98), tandis que le nombre de *Reynolds* est régi par la relation (2.100).

Selon la relation (2.130) de *Mannig*, le débit volume s’exprime par la relation :

 (2.130)

Nous pouvons écrire que pour :

1. 

 (2.142)

Rappelons que les fonctions et sont données par les relations (2.3) et (2.6) respectivement.

Introduisons la conductivité relative :

 (2.143)

La relation (2.142) peut alors s’écrire en termes adimensionnels :

 (2.144)

1. 

 (2.145)

oùet sont donnés par les relations (2.15) et (2.27) respectivement. En tenant compte de la relation (2.143), la relation (2.145) s’écrit en termes adimensionnels :

 (2.146)

1. 

 (2.147)

Dans la relation (2.147), les fonctions et sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement. La relation (2.147) s’écrit en termes adimensionnels, compte tenu de la relation (2.143) :

 (2.148)

Les exemples d’application suivants montrent les étapes d’évaluation du coefficient  de *Manning* par la MMR.

**5.1. Exemple d’application 2.12**

La conduite ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volumed’un liquide de viscosité cinématique, sous la pente longitudinale. La paroi interne de la conduite est dans un état pratiquement lisse et le taux de remplissage de la conduite doit être maintenu à 60%.

Calculer la valeur :

1. du coefficient *n* de *Manning*.
2. de la profondeur normale.

**5.2. Exemple d’application 2.13**

Reprenons l’exemple d’application 2.12 en imposant un taux de remplissage. Calculer la valeur :

1. du coefficient *n* de *Manning*.
2. de la profondeur normale.

**5.3. Exemple d’application 2.14**

Reprenons l’exemple d’application 2.12 en imposant la rugosité absolueainsi que le taux de remplissage. Calculer la valeur :

1. du coefficient *n* de *Manning*.
2. de la profondeur normale.

**5.4. Exemple d’application 2.15**

La conduite ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volumed’un liquide de viscosité cinématique, sous la pente longitudinale. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue et le taux de remplissage de la conduite doit être maintenu à 75%. Calculer la valeur :

1. du coefficient *n* de *Manning*.
2. de la profondeur normale.

**6. Calcul de la profondeur normale par la méthode**

**du modèle rugueux (MMR)**

Le calcul de la profondeur normale se base principalement sur les équations de résistance à l’écoulement dans les canaux ouverts. Les plus usuelles sont la relation de Darcy-Weisbach ainsi que les relations de Chézy et de Manning. La première fait appel au coefficient de frottement au sens de Colebrook-White défini par une relation implicite. La solution requiert un procédé itératif laborieux ou une méthode graphique. La deuxième et la troisième relation utilisent respectivement le coefficient de Chézy et le coefficient de rugosité de Manning qui ne sont pas des coefficients constants. La littérature montre que la plupart des études impose les coefficients de Chézy et de Manning comme des données du problème, en considérant ces coefficients comme des constantes dépendant exclusivement de la nature du matériau constituant la paroi interne de la conduite. Cette approche est physiquement non justifiée du fait que ces coefficients dépendent aussi de la profondeur normale recherchée et cela constitue alors une erreur d’imposer à l’avance la valeur de ces coefficients. En réalité, ces coefficients dépendent de cinq paramètres qui sont la rugosité absolue, la géométrie de la conduite, la viscosité cinématique du liquide en écoulement, l’accélération de la pesanteur et le taux de remplissage de la conduite et par conséquent la profondeur normale.

Le problème qui demeure récurrent et de calculer la profondeur normale *yn* à partir de données mesurables en pratique tels que le débit volume *Q*, la pente longitudinale *i* de la conduite, le diamètre *D* générateur, la viscosité cinématique *ν* du liquide en écoulement et la rugosité absolue *ε* qui reflète l’état de la paroi interne de la conduite. Pour résoudre le problème de la profondeur normale à partir de ces données seulement, la méthode du modèle rugueux semble être l’outil de calcul le mieux approprié ; c’est que tentera de démontrer la présente étude. Dans cette méthode, il n’y a pas lieu de considérer les coefficients de résistance à l’écoulement tels que le coefficient de frottement, le coefficient de Chézy ou le coefficient de Manning.

**6.1. Equations de Base**

Les équations sur lesquelles repose la présente étude sont des relations simples, bien connues en hydraulique, qui sont la relation de Darcy-Weisbach (1854), la relation de Colebrook-White (1939) et le nombre de Reynolds. La pente *i* de la conduite est donnée par la relation de Darcy-Weisbach sous la forme :

 (2.149)

Où *Q* est le débit volume, *g* est l’accélération de la pesanteur, *A* est l’aire de la section mouillée, *Dh* est le diamètre hydraulique et *f* est le coefficient de frottement qui s’exprime, de manière implicite, par la formule de Colebrook-White sous la forme:

 (2.150)

Où *ε* est la rugosité absolue et *R* est le nombre de Reynolds qui s’exprime par :

 (2.151)

Où ν est la viscosité cinématique et *P* est le périmètre mouillé.

D’autres auteurs préfèrent utiliser la relation suivante pour le coefficient de frottement *f* (Anonymous, 1963), indiquant qu’elle est applicable à toutes les formes géométriques de canaux :

 (2.152)

Le calcul montre que l’écart relatif entre les relations (2.150) et (2.152) est de l’ordre de 3% seulement et demeure inférieur à l’erreur commise sur la mesure de la rugosité absolue*ε*. Notons enfin que Sinniger et Hager (1989) affirment que la relation (2.150) est applicable à toute forme de conduites et de canaux. C’est cette relation que nous allons utiliser dans la présente étude.

**6.2. Modèle rugueux de reference**

Toutes les caractéristiques géométriques et hydrauliques du modèle rugueux se distinguent par le symbole "". Le modèle rugueux est particulièrement caractérisé par une rugosité relative arbitrairement choisie, où est le diamètre hydraulique. La rugosité relative est tellement élevée que l’écoulement est dans le domaine turbulent rugueux. Ainsi, le coefficient de frottement est selon la relation (2.150) pour tendant vers l’infini. La conduite de forme ovoïdale est caractérisée par son diamètre générateur *D*, le taux de remplissage qui correspond également à la profondeur normale adimensionnelle et la pente longitudinale *i*. Le modèle rugueux est caractérisé par le diamètre  et le taux de remplissage. En raison de la forte valeur de la rugosité relative, la profondeur normale dans le modèle rugueux est telle que, impliquant évidemment. Le débit volume Q ainsi que la pente longitudinale *i* sont les mêmes dans la conduite ovoïdale et dans le modèle rugueux, c’est-à-dire  et.

En appliquant la relation (2.149) au modèle rugueux, nous pouvons écrire :

 (2.153)

Sachant que et que, la relation (2.153) peut être réécrite sous la forme :

 (2.154)

Le périmètre ainsi que  s’expriment en fonction du lieu géométrique qu’occupe l’écoulement (Fig. 2.1). L’écoulement occupe trois zones que l’on peut identifier selon les gammes de valeurs du taux de remplissage. Ces trois zones correspondent à : , et.

1. Pour, le périmètre mouillé et l’aire de la section mouillée s’écrivent respectivement:

 (2.155)

 (2.156)

Où :

 (2.157)

 (2.158)

En insérant les relations (2.155) et (2.156) dans la relation (2.154) et après réarrangements, il vient que :

 (2.159)

Où *Q*\* est la conductivité relative définie par la relation :

 (2.160)

Nous pouvons alors déduire que le diamètre  du modèle rugueux est :

 (2.161)

2. Pour, le périmètre mouillé et l’aire de la section mouillée s’écrivent respectivement:

 (2.162)

 (2.163)

Où :

 (2.164)

 (2.165)

En insérant les relations (2.162) et (2.163) dans la relation (2.154), il vient que :

 (2.166)

La conductivité relative *Q*\* est régie par la relation (2.160). La relation (2.166) permet de déduire que le diamètre  du modèle rugueux est :

 (2.167)

3. Pour, le périmètre mouillé et l’aire de la section mouillée s’écrivent respectivement:

 (2.168)

 (2.169)

Où :

 (2.170)

 (2.171)

En insérant les relations (2.168) et (2.169) dans la relation (2.154), il vient que :

 (2.172)

Nous pouvons déduire de la relation (2.172) que le diamètre  du modèle rugueux est :

 (2.173)

Les équations (2.159), (2.166) et (2.172) sont implicites vis-à-vis du taux de remplissage. Le paramètre connu dans ces équations est la conductivité relative *Q*\* et ce qui est demandé est la détermination du taux de remplissage. Cependant, le calcul requiert une méthode graphique ou une procédure itérative. Le meilleur moyen d’éviter ces inconvénients est l’utilisation de la relation explicite suivante :

 (2.174)

La relation (2.174) a été établie dans la large gamme, correspondant à. L’erreur relative occasionnée par la relation (2.174) est inférieure à 0,4% seulement, ce qui est largement suffisant pour les applications pratiques.

Le calcul a montré que pour l’état plein du modèle rugueux, correspondant à , la conductivité relative est calculée par application de la relation (2.172). Le calcul montre également que pour cette même valeur de la conductivité relative, l’équation (2.172) donne une seconde valeur du taux de remplissage égale à. Nous obtenons donc un modèle rugueux avec un diamètre  égal au diamètre à l’état plein, caractérisé par un taux de remplissage. Ainsi, selon les relations (2.168) et (2.169), le périmètre mouillé et l’aire de la section mouillée s’écrivent respectivement:

 (2.175)

 (2.176)

Le diamètre hydraulique est alors:

 (2.177)

Le diamètre, qui correspond au diamètre à l’état plein, est donné par la relation (2.173) pour. Soit :

 (2.178)

Les relations (2.175) à (2.178) expriment les caractéristiques géométriques et hydrauliques du modèle rugueux de référence. Ce sont ces relations qui seront utilisées pour déduire la valeur recherchée de la profondeur normale.

**6.3. Facteur de correction des dimensions lineaires**

La méthode du modèle rugueux énonce que toute dimension linéaire *L* d’une conduite ou d’un canal et la dimension linéaire homologue  du modèle rugueux sont liées par la relation suivante, applicable à l’ensemble du domaine turbulent :

 (2.179)

Où est un facteur adimensionnel de correction des dimensions linéaires, inférieur à l’unité, et qui est régi par l’équation explicite suivante (Achour et Bedjaoui, 2006; 2012) :

 (2.180)

Le nombre de Reynolds dans le modèle rugueux est donné par la relation :

 (2.181)

Tous les paramètres de la relation (2.180) sont connus, ce qui permet de calculer de manière explicite le facteur.

**6.4. Etapes de calcul de la profondeur normale**

Pour calculer la profondeur normale dans la conduite ovoïdale, les paramètres suivants doivent être donnés : *Q*, *D*, *i*, *ε* et*ν*. Notons d’une part que ces paramètres sont mesurables en pratique et que d’autre part le coefficient de résistance à l’écoulement tel que le coefficient de Chézy ou celui de Manning n’est pas imposé. Pour calculer la profondeur normale *yn*, les étapes de calcul suivantes sont recommandées :

1. Calculer le diamètre du modèle rugueux par application de la relation (2.178).

2. Déduire le périmètre mouillé selon la relation (2.175).

3. Calculer le diamètre hydraulique en utilisant la relation (2.177).

4. Calculer le nombre de Reynolds selon la relation (2.181).

5. Avec les valeurs calculées de et de, déduire la valeur du facteur de correction des dimensions linéaires par application de la relation (2.180).

6. Assigner au modèle rugueux de référence la nouvelle dimension, en accord avec la relation fondamentale (2.179). Déduire alors la valeur de la conductivité relative en application de la relation (2.160).

7. En insérant cette valeur calculée de dans la relation (2.174), il en découle. La profondeur normale recherchée est alors.

**6.5. Exemple d’application 2.16**

Calculer la profondeur normale *yn* dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 1, pour les données suivantes :

, , , , 

**7. Ecoulement critique**

La profondeur critique est un paramètre important qui permet de se prononcer sur le caractère fluvial ou torrentiel de l’écoulement. Lorsque la profondeur critique est supérieure à la profondeur normale, l’écoulement est de nature torrentielle. Dans le cas contraire, l’écoulement est fluvial.

L’écoulement critique est régi par la relation bien connue sous le nom de condition de criticité. Celle-ci s’écrit :

 (2.182)

où désigne la largeur du plan d’eau (Figure 2.9) et l’indice «  » se réfère l’état critique de l’écoulement.



**Figure 2.9 :** Schéma de définition de l’écoulement critique dans une conduite de forme ovoïdale.

La largeur du plan d’eau critique est régie, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, par l’une des relations (2.1), (2.10) ou (2.37), tandis que l’aire de la section mouillée critique est donnée par l’une des relations (2.7), (2.28) ou (2.56). Tenant compte de ces relations, la condition de criticité s’écrit, pour :

1. 

 (2.183)

où :

 (2.184)

Les fonctions et sont régies par les relations (2.3) et (2.6) respectivement. Introduisons le débit relatif :



(2.185)



La relation (2.183) s’écrit alors :

(2.186)



(2.187)



où :

(2.188)



La fonction est régie par la relation (2.27). La relation (2.187) permet également d’écrire que :



(2.189)



(2.190)



où :

(2.191)



La fonction est donnée par la relation (2.55). La relation (2.190) peut se mettre sous la forme :



(2.192)



Les relations (2.186), (2.189) et (2.192) ont été représentées graphiquement sur la figure 2.10. Elle montre que le débit relatif augmente avec l’accroissement du taux de remplissage critique et tend vers l’infini lorsque. La courbe obtenue a été comparée à celle de l’écoulement critique dans la conduite de forme circulaire.



En règle générale, le débit volume ainsi que le diamètre de la conduite de forme ovoïdale considérée sont des paramètres connus et l’on cherche à déterminer la valeur de la profondeur critique. Le problème revient donc à calculer à partir de la valeur connue du débit relatif, défini par la relation (2.185). L’évaluation de la profondeur critiquepeut se faire graphiquement en ayant recours à la figure 2.10, ou par voie de calcul itératif en utilisant l’une des relations (2.186), (2.189) ou (2.192). La valeur connue de permet le choix de la relation appropriée pour le calcul de et donc de. Le calcul a en effet montré que lorsque, le taux de remplissage est inférieur à 1/15 et doit être évalué par la relation (2.186). Lorsque, le taux de remplissage est tel que et doit donc être calculé en ayant recours à la relation (2.189). Pour les valeurs de telles que, le taux de remplissage critique est supérieur à 2/3 et doit donc être évalué par la relation (2.192).





**Figure 2.10 :** Variation du taux de remplissage critiqueen fonction du débit relatif pour les conduites de formes ovoïdale et circulaire.



Afin de simplifier le calcul du taux de remplissage critique et donc de celui de la profondeur critique, il est recommandé d’utiliser la relation approchée suivante, établie dans la large gamme pratique  et qui correspond à :



(2.193)



L’écart relatif maximal, occasionné par l’application de la relation (2.193), est inférieur à 0,5% dans toute la gamme ci-dessus définie du taux de remplissage critique. La relation (2.193) permet donc d’écrire que :



(2.194)



Les écarts relatifs occasionnés par l’application de la relation approchée (2.193) sont représentés graphiquement sur la figure 2.11.



**Figure 2.11 :** Ecarts relatifs occasionnés par la relation approchée (2.193) sur le calcul du taux de remplissage à l’état critique de la conduite de forme ovoïdale.

**7.1. Exemple d’application 2.17**

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volume sous la pente longitudinale . La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue et la viscosité cinématique du liquide en écoulement est. Pour le taux de remplissage, déterminer :



1. le diamètre de la conduite en ayant recours à la relation de *Manning*.



1. la nature de l’écoulement en comparant les profondeurs normale et critique.

**7.2. Exemple d’application 2.18**

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volume sous la pente longitudinale. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue et la viscosité cinématique du liquide en écoulement est. Pour le taux de remplissage, déterminer :



1. le diamètre de la conduite en ayant recours à la relation de *Manning*.



1. la nature de l’écoulement en comparant les profondeurs normale et critique.

**9. Conclusion**

Ce chapitre a eu pour objectif l’étude de l’écoulement uniforme dans une conduite de forme ovoïdale de hauteur *D*, égale au diamètre du cercle qui l’a générée. Les caractéristiques géométriques de la conduite ont été données ainsi que les propriétés hydrauliques de l’écoulement, telles que la largeur du plan d’eau, le rayon hydraulique et l’aire de la section mouillée. Ces caractéristiques et propriétés dépendent du lieu géométrique de l’écoulement et dépendent ainsi du taux de remplissage de la conduite. Leur variation a été représentée graphiquement et a été comparée à celle de la conduite de forme circulaire. Il a été noté en particulier que le rayon hydraulique atteint un maximum dont l’expression a été déterminée.

Ce chapitre s’est intéressé à l’analyse de l’écoulement à coefficient de résistance variable, aussi bien celui de *Chézy* que celui de *Manning*.

La relation générale du coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* a été identifiée en ayant recours la relation du débit volume proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006). Le coefficient de résistance à l’écoulement de *Chézy* est fonction à la fois de la rugosité relative, du taux de remplissage et d’un nombre de *Reynolds*, lui-même fonction de la pente longitudinale, du diamètre, de et de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. L’auteur a, donc, écrit la relation fonctionnelle. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, il a été déterminé le paramètre adimensionnel. Il se présente en fonction du taux de remplissage, de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* à l’état plein. La représentation graphique du paramètre, en fonction de et de, a montré que passe par un maximum pour. Lorsque le diamètre *D* de la conduite n’est pas une donnée du problème, le calcul du coefficient *C* de *Chézy* a pu être possible en ayant recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). Des exemples d’application ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.



En tenant compte de la relation générale du débit volume proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006), on a montré que le débit volume maximal est atteint pour la profondeur. Dans la gamme, on a pu exprimer la relation approchée explicite permettant le calcul du taux de remplissageet, par conséquent, celui de la profondeur normale.



La relation générale de la vitesse moyenne *V* a été exprimée en tenant compte également de la relation du débit volume proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006). La vitesse relative a été exprimée selon la gamme de variation du taux de remplissage. Sa représentation graphique a montré qu’elle passe par un maximum, atteint à la profondeur.



En ce qui concerne le coefficient de résistance *n* de *Manning*, son expression générale a été déterminée. La représentation graphique du paramètre adimensionnel a montré un minimum, atteint pour. Pour cette même valeur de, le coefficient *n* de *Manning* atteint alors sa valeur maximale et dont l’expression a été déterminée. Lorsque le diamètre de la conduite n’est pas une donnée du problème, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer le coefficient de résistance à l’écoulement *n* de *Manning*. Des exemples d’application numériques ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.



Une étude particulière du calcul de la profondeur normale a été effectuée en ayant recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). La profondeur normale a été explicitement calculée lorsque le diamètre *D* du cercle générateur est l’une des données du problème.

Notre étude s’est poursuivie par l’anlyse de l’écoulement critique dans la conduite de forme ovoïdale considérée. En se basant sur la condition de criticité, le débit relatif a été exprimé pour chacune des gammes du taux de remplissage critique. La forme implicite du taux de remplissage critique a été levée en proposant une excellente relation approchée. Cette relation permet de cacluler la profondeur critique dans la conduite de forme ovoïdale considérée.



**Références bibliographiques**

Achour B. *Calcul des conduites et canaux par la MMR* – *Conduites et canaux en charge*, Larhyss Edition Capitale, Tome 1, 2007, 610p.

ACHOUR B. *Conduite curculaire en charge et à surface libre*, Editions Al-Djazair, 2013, 119p.

ACHOUR B. *Canal rectangulaire en charge et à surface libre*, Editions Al-Djazair, 2014, 79p.

Achour B. [Design of Pressurized Vaulted Rectangular Conduits Using the Rough Model Method](http://www.scientific.net/AMR.779-780.414.pdf), *Adv. Mat. Res.*, Trans. Tech. Publications, Vols. 779-780, 414-419, 2013.

ACHOUR B., RIABI M. Design of a Pressurized Trapezoidal Shaped Conduit Using the Rough Model Method (Part 1), *Adv. Mater. Res.*, Trans. Tech. Publications,Vols. 945-949, 892-898, 2014.

ACHOUR B., BEDJAOUI A. . Design of a Pressurized Trapezoidal Shaped Conduit Using the Rough Model Method (Part 2), Adv. Mater. Res*.*, Trans. Tech. Publications,Vols. 945-949, 892-898, 2014.

ACHOUR B. Computation of normal depth in trapezoidal open channel using thee rough model method, Appl. Mech. Mater*.*, Trans. Tech. Publications, Vols. 580-583, 1828-1841, 2014.

ACHOUR B. Design of a pressurized rectangular conduit with triangular bottom using the rough model method, Open Civil Eng. J., Vol. 8, 205-212, 2014.

ACHOUR B., SEHTAL S. The Rough Model Method (RMM). Application to the Computation of Normal Depth in Circular Conduit, Open Civil Eng. J., Vol. 8, 57-63, 2014.

ACHOUR B., BEDJAOUI A. Discussion. Exact solutions for Normal Depth Problem, by Prabatha K. Swamee and Pushpa N. Rathie, J. Hydraul. Res., Vol.44, n°5, 715-717, 2006.

ACHOUR B., BEDJAOUI A., KHATTAOUI M., DEBABECHE M. Contribution au calcul des écoulements uniformes à surface libre et en charge, Larhyss Journal, n°1, 7-36, 2002.

ACHOUR B., BEDJAOUI A. Calcul du coefficient de frottement en conduite circulaire sous pression, Larhyss Journal, n°5, 197-200, 2006.

ACHOUR B., KHATTAOUI M. Computation of Normal and Critical Depths in Parabolic Cross Sections, The Open Civil Engineering Journal, Vol.2, 9-14, 2008.

ACHOUR B. Computation of normal depth in parabolic cross sections using the rough model method, Open Civil Eng. J., Vol. 8, 213-218, 2014.

ACHOUR B., BEDJAOUI A. Contribution au calcul de la profondeur normale dans un canal rectangulaire, Larhyss Journal, n°5, 139-147, 2006.

ACHOUR B., BEDJAOUI A. Turbulent Flow Computation Using The Rough Model Method (RMM), Journal of Civil Engineering and Science, Vol.1, n°1, 36-41, 2012.

ACHOUR B. Design of a rectangular-shaped conduit using the rough model method (Part 1), Appl. Mech. Mater., Vols. 641-642, 261-266, 2014.

ACHOUR B. Computation of normal depth in horseshoe shaped tunnel using the rough model method, Adv. Mater. Res., Trans. Tech. Publications, Vols. 1006-1007, 826-832, 2014.

ACHOUR B., KHATTAOUI M. [Design of Pressurized Vaulted Rectangular Conduits Using the Rough Model Method](http://www.scientific.net/AMR.779-780.414.pdf) (Part 2), Adv. Mat. Res*.*, Trans. Tech. Publications, Vols. 1025-1026, 24-31, 2014.

ACHOUR B. Computation of Normal Depth in a U-Shaped Open Channel Using the Rough Model Method, Amer. J. Engin. Tech. Soc., Vol.2, N°3, 46-51, 2015.

ACHOUR B. Analytical Solution for Normal Depth problem in a Vertical U-Shaped Open Channel Using the Rough Model Method, J.Sci. Res. Rprt., Vol.6, N°6, 468-475, 2015.

Anonymous. Friction Factors in Open Channels, Progress Report of Task Force on Friction Factors in Open Channels, *J. Hydraul. Eng. Div*., ASCE, Vol. 89, no2, 97-143, 1963.

BABEYAN-KOOPAEI K. "Dimensionless Curves for Normal-Depth Calculations in Canal Sections", J. Irrig. Drain. Eng., ASCE, Vol.127, 386-389, 2001.

Bakhmeteff B.A., Feodoroff N.V., Discussion on open channel flow, Transactions, American Society of Engineers, Vol.108, 492-502, 1943.

BADRI T. Contribution à l’étude de l’écoulement uniforme dans une conduite fermée ovoïdale, Mémoire de Magister, Université de Biskra, 2010.

Bazin H., Etude d’une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts, Mémoire n°41, Annales des ponts et chausses, Vol.14, ser.7, 4ème trimestre, 20-70, 1897.

BEDJAOUI A., ACHOUR B. Nouvelle approche pour le dimensionnement des conduites circulaires sous pression, Courrier du Savoir, n°10, 23-29, 2010.

Blench T., A new theory of turbulent flow in liquids of small viscosity, Journal, Institution of Civil Engineers, London, Vol.11, n°6, 611-612, April, 1939.

Camp T.R., Design of sewers to facilitate flow, Sewage Works Journal, Vol.18, 1-16, 1946.

Chow V.T., *Open channel Hydraulics*, McGraw-Hill International Editions, 1973.

Colebrook C.F. Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Between the Smooth and Rough Pipe laws, J. Inst. Civil Eng., Vol. 11, no4, 133-156, 1939.

Darcy H. Sur les recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux, Comptes rendus des séances de l’Académie des Sciences, n°38, 1109-1121, 1854.

Forchheimer P., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig and Berlin, 139-163, 1930.

FRENCH R.H. Open channel hydraulics. New York, USA : McGraw Hill, 1986.

Ganguillet E., Kutter W.R., An investigation to establish a new general formula for uniform flow of water in canals and rivers, Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines, Vol.21, n°1, 6-25, n°2-3, p.46-59, 1869.

HENDERSON F.M., Ed., Open channel flow. New York : MacMillan Publishing Co., 1966.

Houk I.E., Calculation of flow in open channels, Miami Conservancy District, Technical report, Pt. IV, Dayton, Ohio, 1918.

Keulegan G.H., Laws of turbulent flow in open channels, Research paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol. 21, 707-741, December, 1938.

Kouchakzadeh S., Vatankhah A.R. Discussion of ‘‘Exact solutions for normal depth problem’’ by Prabhata K. Swamee and Pushpa N. Rathie, J. Hydraul. Res., Vol. 45, n°4, 567-571, 2007.

Lindquist E., On velocity formulas for open channels and pipes, Transactions of the World Power Conference, Sectional Meeting, Scandinavia, Stockholm, Vol.1, 177-234, 1933.

Manning R., On the flow of water in open channels and pipes, Transactions, Institution of Civil engineers of Ireland, Vol.20, 161-207, Dublin, 1891.

Pavlovski N.N., “*Handbook of Hydraulic”, Kratkil Gidravlicheskil, Spravochnik, Gosstrolizdat*, Leningrad and Moscow, 1940, 314p.

Powell R.W., Resistance to flow in rough channels, Transactions, American Geophysical Union, Vol.31, n°4, 575-582, August, 1950.

Prandtl L., On fully developed turbulence, Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, Zurich, 62-74, 1926.

RIABI M., ACHOUR B. Contribution au dimensionnement des conduites de forme ovoïdale, Courrier du Savoir, n°11, 33-39, 2011.

RIABI M., Contribution au dimensionnement des conduites fermées de forme circulaire et non circulaire, Thèse de Doctorat en Science, Université de Biskra, Juin, 242p, 2012.

RIABI M., ACHOUR B. Design of a pressurized circular pipe with benches using the rough model method (RMM), *Adv. Mater. Res.*, Vols. 960-961, 586-591, 2014.

Schnackenberg E.C., Slope discharge formulae for alluvial streams and rivers, Proceeding, New Zealand Institution of Engineers, Vol. 37, 340-409, Wellington, 1951.

Sinniger, R.O., Hager W.H., *Constructions hydrauliques*, Traité de Génie Civil de l’Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Presses Polytechniques Romandes, (15), 1ère Edition, Suisse, 1989.

Srivastava R. Discussion of ‘‘Exact solutions for normal depth problem’’ by Prabhata K. Swamee and Pushpa N. Rathie’, J. Hydraul. Res., Vol. 44, n°3, 427-428, 2006.

SWAMEE P.K. "Normal-depth equations for irrigation canals", J. Irrig. Drain. Eng., ASCE, Vol.120, 942-948, 1994.

Swamee P.K., Jain A.K., Explicit equations for pipe-flow problems, Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol.102, HY5, 657-664, 1976.

SWAMEE P.K., SWAMEE N. full-range pipe-flow equations, J. Hydraul. Res., Vol.45, n°6, 841-843, 2007.

SWAMEE P.K., RATHIE P.N. "Exact Solution for Normal Depth Problem", J. Hydraul. Res., Vol.42, n°5, 541-547, 2004.

Toebes C., Streamflow : Poly-dimensional treatment of variable factors affecting the velocity in alluvial streams and rivers, Proceedings, Institution of Civil Engineers, London, Vol.4, n°3, pt. III, 900-938, December, 1955.

Vladislavljevitch Z., Aperçu critique sur les formules pour la prédétermination de la vitesse moyenne de l’écoulement uniforme, Transactions of the 1st Congress, International Commission on Irrigation and Drainage, New Delhi, Vol.2, rept.12, question 2, 405-428, 1951.