**chapitre II**

**calcul du diametre d’une conduite circulaire en charge**

**par la methode du modèle rugueux (mmr)**

**I.3.2. Le diamètre *D* est inconnu**

I.3.2.1. **Expression du nombre de *Reynolds***

 Il s’agit d’établir la relation permettant le calcul explicite du nombre de *Reynolds *caractérisant l’écoulement dans une conduite circulaire sous pression dont le diamètre est le paramètre inconnu. Les données du problème sont le débit volume écoulé par la conduite, le gradient de la perte de charge linéaire, la rugosité absolue  et la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Dans cette partie, nous assumons les égalités suivantes : et. Ces conditions impliquent nécessairement. Autrement dit, nous faisons écouler dans le modèle rugueux de référence le même débit que celui de la conduite, sous le même gradient de la perte de charge linéaire. La relation (1.4) devient alors :

  (1.35)

Compte tenu du fait que et, le diamètre s’exprime alors, en vertu de la relation (1.35), par :

 (1.36)

Le diamètre du modèle rugueux de référence est donc entièrement défini par les paramètres connus et.

D’autre part, le nombre de *Reynolds* caractérisant l’écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (1.6) pour :

 (1.37)

Le nombre de *Reynolds* est donc bien défini, puisque, et se comptent parmi les paramètres connus du problème.

Compte tenu du fait que et, la relation de *Darcy-Weisbach* permet d'écrire que :



Après simplifications et réarrangements, la relation précédente permet d’écrire que :

 (1.38)

La relation (1.38) peut également s’écrire :

 (1.39)

où :

 (1.40)

La relation (1.39) traduit le fait que le diamètre de la conduite est égal au diamètre du modèle rugueux de référence, corrigé par les effets du facteur.

Celui-ci peut donc être considéré comme le facteur de correction des dimensions linéaires.

La relation (1.39) constitue la relation fondamentale de la méthode du modèle rugueux qui peut être généralisée à toutes les dimensions linéaires d'une conduite non circulaire ou d'un canal. Toute dimension linéaire est donnée par la relation (1.39).

En faisant le rapport entre les relations (1.14) et (1.37), nous obtenons :

 (1.41)

Or, selon la relation (1.39), le rapport constituant le membre droit de la relation (1.41) n’est autre que. Ainsi, la relation (1.41) s’écrit :

 (1.42)

En remplaçant, dans la relation (1.16) de *Colebrook-White*, le diamètre, le coefficient de frottement ainsi que le nombre de *Reynolds* *R* par leur expression respective (1.39), (1.40) et (1.42), nous obtenons :



Après simplifications et réarrangements, la relation précédente prend la forme suivante :

 (1.43)

Nous obtenons ainsi la relation implicite. Rappelons que le diamètre est bien défini par la relation (1.36) pour les valeurs connues de et, et que l’est aussi pour les valeurs données de, et en vertu de la relation (1.37). La seule variable inconnue dans la relation (1.43) n’est donc que le facteur de correction des dimensions linéaires. Celui-ci doit être évalué par un procédé itératif ou graphique, en raison de la forme implicite de la relation (1.43) qui le gouverne. Cette relation est représentée graphiquement dans le système d’axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure (1.3). Le diagramme obtenu traduit la variation du coefficient de correction des dimensions linéaires en fonction du nombre de *Reynolds* , pour diverses valeurs de la rugosité relative.



**Figure 1.3** : Variation de selon la relation (1.43) pour

diverses valeurs de la rugosité relative

Nous pouvons considérer le diagramme de la figure 1.3 comme une version du diagramme de *Moody*. On y distingue les trois domaines connus de l’écoulement turbulent : lisse, de transition et turbulent rugueux. Sur la figure 1.3 nous avons fait figurer, en trait continu, la courbe limite pratique délimitant les domaines de l’écoulement de transition et turbulent rugueux. Au-delà de cette courbe, le domaine de l’écoulement turbulent rugueux se traduit par une variation quasi horizontale du coefficient de correction des dimensions linéaires. Celui-ci ne dépend alors que de la rugosité relative. En l'absence de la valeur du diamètre *D* de la conduite, la rugosité relative ainsi que celle du nombre de *Reynolds* ne peuvent être calculées et il est alors évident que le diagramme de *Moody* ne peut servir à identifier la nature du régime de l'écoulement. Pour se faire, le diagramme de la figure 1.3 est le plus approprié puisque la rugosité relative et le nombre de *Reynolds* peuvent être déterminés même si le diamètre *D* de la conduite n'est pas un paramètre connu du problème.

Le domaine lisse, correspondant à, se réduit à une courbe unique. Celle-ci se traduit, selon la relation (1.43), par :

 (1.44)

Le domaine de l’écoulement rugueux, correspondant à ou à, est régi, selon la relation (1.43), par l’équation :

 (1.45)

Le diagramme de la figure 1.3 montre que dans l’ensemble du domaine turbulent, le facteur de correction des dimensions linéaires varie dans la gamme.

Afin de faciliter le calcul du facteur de correction, il est recommandé d’utiliser la relation approchée suivante en remplacement de la relation implicite (1.43), établie au prix d’un calcul assez laborieux :

 (1.46)

Pour mieux apprécier la fiabilité de la relation approchée (1.46), nous l’avons comparée à la relation exacte (1.43). Cette comparaison a été effectuée selon les étapes suivantes :

1. Une valeur de la rugosité relative  est choisie dans la gamme.
2. Le nombre de *Reynolds* est ensuite varié selon un pas arbitrairement choisi.
3. Pour la valeur fixée de la rugosité relative, un calcul itératif permet d’évaluer le facteur de correction des dimensions linéaires selon la relation (1.43), pour chacune des valeurs choisies du nombre de *Reynolds*.
4. Pour les mêmes valeurs de  et de considérées au cours des étapes *i* et *ii*, la relation (1.46) permet d’obtenir la valeur approchée de.
5. L’écart relatif, entre les valeurs exacte et approchée de  calculées respectivement au cours des étapes *iii* et *iv*, est enfin déterminé.

A l’issue des étapes de calcul ci-dessus indiquées, l’écart relatif est représenté graphiquement dans le système d’axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 1.4, en fonction de et pour chacune des valeurs fixées de la rugosité relative.



**Figure 1.4** : Ecart relatif entre les valeurs exacte et approchée de, calculé selon les relations (1.43) et (1.46) en fonction de et.

Au regard du diagramme de la figure 1.4, il apparaît clairement que pour et dans toute la gamme, l’écart relatif maximal est inférieur à 0,4%. Ceci confirme, si besoin est, la validité de la relation approchée explicite (1.46).

En assumant la relation (1.46), l’expression du nombre de *Reynolds* de l’écoulement est déduite de la relation (1.42), soit :

 (1.47)

La relation (1.47) est applicable dans tout le domaine de l’écoulement turbulent.

Elle engendrerait, selon la relation (1.42), une erreur relative maximale sur le calcul de égale à seulement.

Les étapes suivantes indiquent la voie à suivre pour calculer la valeur du nombre de *Reynolds* *R* par application de la relation (1.47), sachant que,,  et sont les paramètres connus du problème et que le diamètre de la conduite n’est pas requis :

1. A partir des valeurs connues des seuls paramètres et, la relation (1.36) permet le calcul aisé du diamètre du modèle rugueux de référence, soit :



1. Le nombre de *Reynolds* peut être évalué soit par application de la relation (1.37):



1. La valeur donnée de la rugosité absolue  et celle précédemment calculée de donnent la rugosité relative.
2. Les paramètres et sont alors insérés dans la relation (1.47) pour l’évaluation du nombre de *Reynolds* recherché *R*.

***Exemple d’application 1.6.***

Quelle est la valeur du nombre de *Reynolds* *R* caractérisant l’écoulement se produisant dans une conduite circulaire sous pression de rugosité absolue, écoulant un débit volume d’un liquide de viscosité cinématique, sous un gradient de la perte de charge linéaire  ? Quelle est la nature du régime de l’écoulement ?

I.3.2.2. **Expression du coefficient de frottement**

 Il s’agit d’établir la relation permettant le calcul du coefficient de frottementà partir des valeurs connues du débit volume écoulé par la conduite, du gradient de la perte de charge linéaire, de la rugosité absolue  et de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Le diamètre *D* de la conduite n’est pas un paramètre donné du problème.

Selon les relations les relations (1.40) et (1.42), nous pouvons écrire que :



ou bien :

  (1.48)

En remplaçant, dans la relation (1.48), le nombre de *Reynolds R* par l’expression (1.47), nous pouvons déduire que :

  (1.49)

La relation (1.49) donne, de façon explicite, la valeur pratiquement exacte du coefficient de frottement, pour les valeurs connues de,,  et . Les paramètres, et  sont calculés suivant les mêmes étapes que celles indiquées dans l’exemple d’application 1.6.

***Exemple d’application 1.7.***

Reprenons les données de l’exemple 1.6 qui sont, en l’absence du diamètre *D* de la conduite : ;  ; 

Quelle est la valeur du coefficient de frottement  ?

I.3.2.3. **Expression du diamètre *D***

Il s’agit d’établir la relation qui permet de déterminer de manière explicite le diamètre *D* d’une conduite circulaire sous pression, à partir des valeurs connues du débit volume qu’elle écoule, de la rugosité absolue caractérisant l'état de sa paroi interne, du gradient *J* de la perte de charge linéaire et de la viscosité cinématique du liquide écoulé.

L'expression du diamètre s'obtient simplement en remplaçant dans la relation fondamentale (1.39) le facteur de correction des dimensions linéaires par son expression (1.46). Il vient alors :

 (1.50)

La relation (1.50) est applicable dans tout le domaine de l’écoulement turbulent, soit pour et pour. Elle occasionne un écart relatif maximal de 0,4% seulement sur le calcul du diamètre *D*, ce qui est largement satisfaisant pour la plupart des cas pratiques.

Le diamètre et le nombre de *Reynolds* figurant dans la relation (1.50) sont, pour rappel, respectivement donnés par les relations (1.36) et (1.37).

***Exemple d’application 1.8.***

Une conduite circulaire sous pression, dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue, écoule un débit volume  d’un liquide de viscosité cinématique, sous un gradient de la perte de charge linéaire. Quelle est la valeur du diamètre *D* de la conduite ?

***Exemple d’application 1.9.***

La pression à la sortie de la station de pompage, schématisée sur la figure ci-dessous, est. De l’eau, de masse volumique, de viscosité cinématique et de débit volume, doit être acheminée à travers une conduite circulaire rectiligne de diamètre interne et de rugosité absolue, sur une longueur  et sur une hauteur de. L’accélération de la pesanteur est.

Parmi les diamètres commerciaux ci-dessous indiqués, quel est le plus petit diamètre pouvant répondre aux conditions du problème ?

|  |
| --- |
| Diamètres commerciaux (en millimètres) |
| 60 – 80 – 100 – 125 – 150 – 200 – 250 – 300 |

