**chapitre I**

**calcul des Débits dans une conduite circulaire en charge**

**par la methode du modèle rugueux (mmr)**

**I.1. Introduction**

Le présent chapitre s’intéresse à exposer une démarche explicite au calcul des débits volumes dans une conduite circulaire en charge par la méthode du modèle rugueux de référence (Achour, 2007) .

Dans un premier temps, la méthode sera exposée aussi clairement que possible en mettant l’accent sur les principaux fondements sur lesquels elle repose.

Dans un second temps, la méthode sera appliquée à la conduite circulaire en charge et les relations régissant les caractéristiques de l’écoulement seront alors déduites.

Les divers paramètres mis en jeu seront identifiés, tout en mettant en exergue leur signification physique.

Enfin, des exemples d’applications pratiques seront exposés et serviront à mieux apprécier l’intérêt de la méthode préconisée.

**I.2. Modèle rugueux de référence**

Le modèle rugueux de référence que nous considérons est en fait une conduite circulaire, également sous pression, caractérisée par un diamètre, une rugosité absolue, écoulant un débit volume d’un liquide de viscosité cinématique, sous un gradient de la perte de charge linéaire.

Le nombre de *Reynolds* caractérisant l’écoulement est  et le coefficient de frottement est.

On affecte à cette conduite une forte rugosité relative, arbitrairement choisie égale à, de telle sorte que l’écoulement qui s’y produit soit en régime turbulent rugueux ou soit supposé être comme tel.

La rugosité relative arbitrairement choisie est obtenue pour diverses valeurs de la rugosité absolue  et du diamètre.

Puisque l’écoulement est ou supposé être en régime turbulent rugueux, le coefficient de frottement est donc régi par la relation de *Nikuradse* pour et, soit :

 (1.1)

En substituant dans la relation (1.1) la valeur choisie, le coefficient de frottement prend alors la valeur constante :



soit :

 (1.2)

L’écoulement turbulent rugueux se produisant dans la conduite de référence est donc caractérisé par un coefficient de frottement constant égal à 1/16. Cet écoulement est également régi par la relation de *Darcy-Weisbach*, exprimant le gradient de la perte de charge linéaire :

 (1.3)

En substituant la relation (1.2) dans la relation (1.3), il vient que :

 (1.4)

Nous pouvons déduire de la relation (1.4) que le diamètre du modèle rugueux de référence est :

 (1.5)

Pour la conduite rugueuse de référence, le nombre de *Reynolds* s’écrit :

 (1.6)

En éliminant le débit entre les relations (1.5) et (1.6), nous obtenons :

 (1.7)

Le tableau 2.1 résume les caractéristiques géométriques de la conduite rugueuse de référence et hydrauliques de l’écoulement qui s’y produit.

**Tableau 1.1** : Caractéristiques géométriques de la conduite rugueuse de référence et hydrauliques de l’écoulement

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Paramètre** | **Symbole** | **Relation** |
| Diamètre |  | (1.5)  |
| Rugosité absolue |  | - |
| Gradient de la perte de charge |  | (1.4) |
| Débit volume |  | - |
| Coefficient de frottement |  |  |
| Nombre de *Reynolds* |  | (1.6), (1.7) |

**I.3. Calcul de l’écoulement turbulent par le**

 **modèle rugueux de référence**

Dans le présent paragraphe, l’écoulement turbulent en conduite sous pression est calculé en ayant recours aux caractéristiques de l’écoulement dans la conduite rugueuse de référence.

Il s’agit d’établir principalement les relations permettant de déterminer le débit volume écoulé par une conduite circulaire sous pression, le diamètre interne de celle-ci ainsi que le gradient de la perte de charge linéaire. Il s’agit donc de répondre aux trois classes de problèmes de l’écoulement turbulent. Cependant, des relations intéressantes seront également proposées pour le calcul des caractéristiques de l’écoulement telles que le nombre de *Reynolds *et le coefficient de frottement, lorsque l’un des trois paramètres,  et  n’est pas connu.

**I.3.1. Le débit volume *Q* est inconnu**

I.3.1.1. **Expression du nombre de *Reynolds***

Il s’agit d’établir l’expression du nombre de *Reynolds *caractérisant l’écoulement turbulent dans une conduite circulaire sous pression écoulant un débit volume inconnu. Les paramètres connus du problème sont le diamètre de la conduite, le gradient de la perte de charge linéaire, la rugosité absolue  et la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Assumons les égalités suivantes :  et. Autrement dit, nous affectons au modèle rugueux de référence le même diamètre que celui de la conduite ainsi que le même gradient de la perte de charge linéaire. Sous ces conditions, il est évident que les débits volume et les nombres de *Reynolds* sont différents, soient  , . La relation (1.4) devient alors :

 (1.8)

D’autre part, la relation (1.6) devient, pour:

 (1.9)

De même que la relation (1.7) s’écrit, pour  et:

 (1.10)

Puisque et, alors la relation de *Darcy-Weisbach* permet d'écrire :



soit :

 (1.11)

Désignons par la quantité figurant dans la relation (1.11), soit :

 (1.12)

La relation (1.11) s'écrit donc :

 (1.13)

La relation (1.13) indique que le débit volume écoulé par une conduite circulaire sous pression est égal au débit écoulé par le modèle rugueux de référence corrigé par les effets d'un facteur. Celui-ci peut donc être considéré comme étant le facteur de correction des débits volume.

D’autre part, l'écoulement dans la conduite étudiée est caractérisé par le nombre de *Reynolds* :

 (1.14)

Ainsi, le rapport entre les relations (1.9) et (1.14) mène à écrire que :



Or, selon la relation (1.13), le rapport  n’est autre que le facteur de correction des débits volume. Ainsi :

 (1.15)

La relation (1.15) traduit le fait que le nombre de *Reynolds* *R* caractérisant l’écoulement dans une conduite circulaire sous pression est égal au nombre de *Reynolds* caractérisant l’écoulement dans le modèle rugueux de référence, corrigé par les effets du facteur de correction des débits volume.

Rappelons la relation de *Colebrook-White* exprimant le coefficient de frottement *f* :

 (1.16)

En remplaçant dans la relation (1.16) le coefficient de frottement *f* ainsi que le nombre de *Reynolds* *R* par leur expression respective (1.12) et (1.15), il vient que :



d’où :

 (1.17)

Nous pouvons conclure que le facteur de correction des débits est fonction de la rugosité relative de la conduite et du nombre de *Reynolds* caractérisant l’écoulement dans le modèle rugueux de référence.

La relation (1.17) est applicable dans tous les domaines de l’écoulement turbulent (lisse, de transition et rugueux), pour toute valeur deet .

Pour le domaine de l’écoulement lisse correspondant à ou pour celui de l’écoulement pratiquement lisse correspondant à, la relation (1.17) s’écrit :

 (1.18)

Par contre, pour le domaine turbulent rugueux correspondant à ou à, la relation (1.17) devient :

 (1.19)

La relation (1.17) est représentée graphiquement dans le système d’axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 1.1.

Nous pouvons clairement observer, de gauche vers la droite, sur le diagramme de la figure 1.1, les trois domaines de l’écoulement turbulent : le domaine lisse représentée par la courbe correspondant à, le domaine de transition et le domaine turbulent rugueux correspondant à une variation quasi horizontale de.

Dans le domaine lisse, le facteur de correction des débits volume augmente avec l’accroissement du nombre de *Reynolds* . Dans le domaine de transition,  augmente également avec l’accroissement de, pour une valeur fixée de la rugosité relative. Par contre,  diminue avec l’accroissement de, pour une valeur fixée du nombre de *Reynolds*.



**Figure 1.1** : Variation du facteur de correction des débits en fonction du nombre de *Reynolds*, pour diverses valeurs de.

(⎯) Courbe limite pratique entre les domaines de transition

et turbulent rugueux

Sur le diagramme de la figure 1.1, nous avons fait figurer la courbe limite pratique séparant les domaines de transition et turbulent rugueux. La courbe est représentée en trait continu et a été tracée en admettant que si les relations (1.17) et (1.19) donnent d’écart entre les valeurs calculées de, alors l’écoulement peut être étudié avec suffisamment de précision dans le domaine turbulent rugueux. Ceci peut se traduire par l’égalité suivante :

 (1.20)

Le facteur de correction figurant dans le membre gauche de la relation (1.20) est donné par la relation (1.19), tandis que  figurant dans le membre droit de la relation (1.20) est donné par la relation (1.17). Ainsi :



Après simplifications et réarrangements, l’égalité précédente conduit à écrire que :

 (1.21)

La courbe limite pratique entre les domaines d’écoulement de transition et turbulent rugueux a alors été tracée après avoir effectué les calculs suivants :

1. Une valeur de la rugosité relativeest fixée.
2. Le nombre de *Reynolds* est alors calculé selon la relation (1.21).
3. Avec les valeurs données de et de , la relation (1.17) permet de calculer le facteur de correction des débits volume.

Nous avons regroupé dans le tableau 1.2 les valeurs de obtenues selon les étapes de calcul précédemment indiquées, pour quelques valeurs arbitrairement choisies de la rugosité relative.

**Tableau 1.2** : Valeurs du facteur et de calculées selon les relations

(1.17) et (1.21) respectivement, pour quelques valeurs de 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Selon la relation (1.21), si le nombre de *Reynolds* est tel que :

  (1.22)

alors l’écoulement peut être étudié, avec suffisamment de précision dans le domaine turbulent rugueux. Autrement dit, si l’inégalité (1.22) est satisfaite, alors le couple de valeurs sera matérialisé par un point situé sur la courbe ou à droite de la courbe limite pratique séparant les domaines de transition et turbulent rugueux (Figure 1.1).

Pour déterminer l’expression recherchée du nombre de *Reynolds R*, il faut éliminer le facteur de correction entre les relations (1.15) et (1.17), soit :

 (1.23)

Nous obtenons ainsi l’expression du nombre de *Reynolds R* caractérisant l’écoulement turbulent dans une conduite circulaire sous pression, en fonction de la rugosité relative de celle-ci et du nombre de *Reynolds* caractérisant l’écoulement dans le modèle rugueux de référence.

La relation (1.23) est évidemment applicable dans tout le domaine de l’écoulement turbulent correspondant à et.

Pour le domaine lisse ou pratiquement lisse, correspondant à ou à, la relation (1.23) s’écrit :

 (1.24)

Pour le domaine turbulent rugueux, correspondant à ou à, la relation (1.23) devient :

 (1.25)

Nous avons représenté dans le système d’axes de coordonnées à divisions logarithmiques de la figure 1.2, la variation de *R* en fonction de selon la relation (1.23), pour les valeurs extrêmes et  de la rugosité relative. Les courbes obtenues sont donc des courbes enveloppes extrêmement plates, entre lesquelles se situent les courbes qui correspondent à l’intervalle.



**Figure 1.2** : Variation de selon la relation (1.23), pour les valeurs extrêmes et  de la rugosité relative.

Les étapes suivantes indiquent la voie à suivre pour calculer le nombre de *Reynolds R*, même si le débit volume écoulé par la conduite est inconnu. Les données du problème sont : le diamètre *D* de la conduite, le gradient *J* de la perte de charge linéaire, la rugosité absolue et la viscosité cinématique  du liquide en écoulement.

1. A partir des valeurs connues de  et de , calculer la rugosité relative.
2. Les valeurs connues des paramètres *D*, *J* et permettent le calcul du nombre de *Reynolds* par application de la relation (1.10).
3. Les valeurs ainsi déterminées de et de mènent au calcul aisé du nombre de *Reynolds* *R* de l’écoulement par application de la relation (1.23).
4. Le couple de valeurs calculées de et de se matérialise, sur la figure 1.1, par un point qui permet de se prononcer sur la nature du régime de l’écoulement.

***Exemple d’application 1.1.***

Soit une conduite circulaire en charge de diamètre interne, caractérisée par une rugosité absolue  et écoulant un débit volume d’un liquide de viscosité cinématique sous un gradient de la perte de charge linéaire.

Quelle est la nature du régime de l’écoulement ? Calculer la valeur du nombre de *Reynolds R*. Quelle est la valeur du facteur de correction des débits volume  ? Déduire la valeur du coefficient de frottement *f*.

***Exemple d’application 1.2.***

Soit une conduite circulaire en charge de diamètre interne, caractérisée par une rugosité absolue  et écoulant un débit volume d’un liquide de viscosité cinématique sous un gradient de la perte de charge linéaire.

Quelle est la nature du régime de l’écoulement ? Calculer la valeur du nombre de *Reynolds R*. Quelle est la valeur du facteur de correction des débits volume ? Déduire la valeur du coefficient de frottement.

I.3.1.2. **Expression du coefficient de frottement**

Même si la valeur du débit volume n’est pas une donnée du problème, la valeur exacte du coefficient de frottement peut être calculée, à condition que les paramètres,, et soient connus.

Pour établir l’expression du coefficient de frottement, il suffit d’éliminer le facteur de correction des débits volumeentre les relations (1.12) et (1.17), soit :



ou bien :

 (1.26)

La relation (1.26) est applicable dans tout le domaine de l’écoulement turbulent, pour  et  . Le nombre de *Reynolds* est calculé selon la relation la relation (1.10) pour les valeurs connues des paramètres, et.

***Exemple d’application 1.3.***

Reprenons les données de l’exemple d’application 1.2 qui sont :

, , , 

Quelle est la valeur du coefficient de frottement  ?

I.3.1.3. **Expression du débit volume** ***Q***

 L’expression du débit volume écoulé par une conduite sous pression peut être déterminée après avoir éliminé le facteur de correction des débits volumedes relations (1.13) et (1.17), soit :

 (1.27)

Dans la relation (1.27), le débit volume est donné par la relation (1.8), soit :

 (1.28)

Le débit volume est donc bien défini par les seuls paramètres et.

Les relations (1.27) et (1.28) permettent d’écrire que :

 (1.29)

En termes adimensionnels, la relation (1.29) peut être écrite sous la forme :

 (1.30)

Or, la quantité est par définition la conductivité relative de la conduite. Par suite, la relation (1.30) s’écrit :

  (1.31)

L’expression du débit volume peut être également déduite des relations (1.14) et (1.23), soit :



ou bien :

 (1.32)

Rappelons que le nombre de *Reynolds* figurant dans la relation (1.32) est donné par la relation (1.10), pour les valeurs connues des paramètres, et.

La relation (1.32) est la relation générale qui permet le calcul du débit volume *Q* dans une conduite circulaire en charge. Elle est applicable à l’ensemble du domaine de l’écoulement turbulent, correspondant à et .

Pour le domaine lisse ou pratiquement lisse correspondant à ou à, la relation (1.32) s’écrit :

 (1.33)

Pour le domaine turbulent rugueux correspondant à ou à, la relation (1.33) devient :

 (1.34)

***Exemple d’application 1.4***

Quel est le débit volume d’un liquide de viscosité cinématique écoulé par une conduite circulaire sous pression caractérisée par un diamètre interne et une rugosité absolue, sous un gradient de la perte de charge linéaire  ? Quelle est la nature du régime de l’écoulement ?

***Exemple d’application 1.5.***

Quel est le débit volume d’un liquide de viscosité cinématique écoulé par une conduite circulaire sous pression caractérisée par un diamètre interneet une rugosité absolue, sous un gradient de la perte de charge linéaire  ? Quelle est la nature du régime de l’écoulement ?