

Imagerie et Vision Industrielle

Chapitre 5

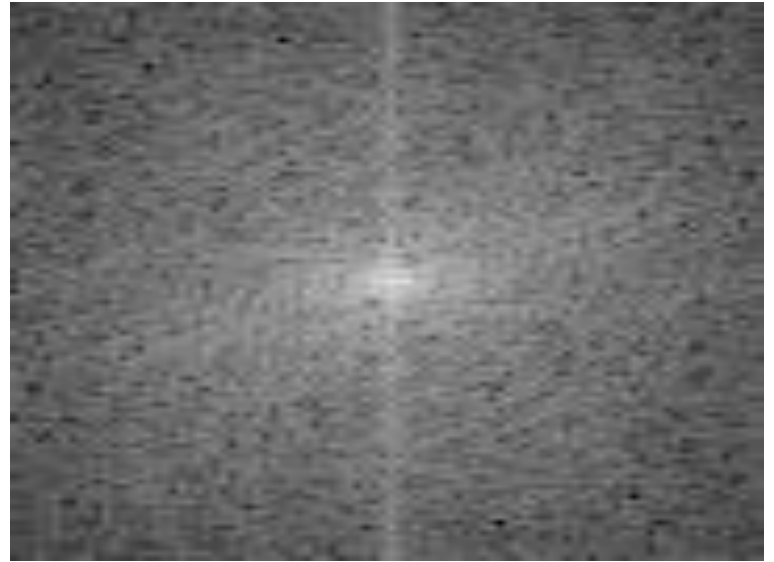
Traitement d'Image:

Introduction au Filtrage d'Image Fréquentiel

La Transformée de Fourier



Jean Baptiste Joseph Fourier



Comment peut-on améliorer une telle image?



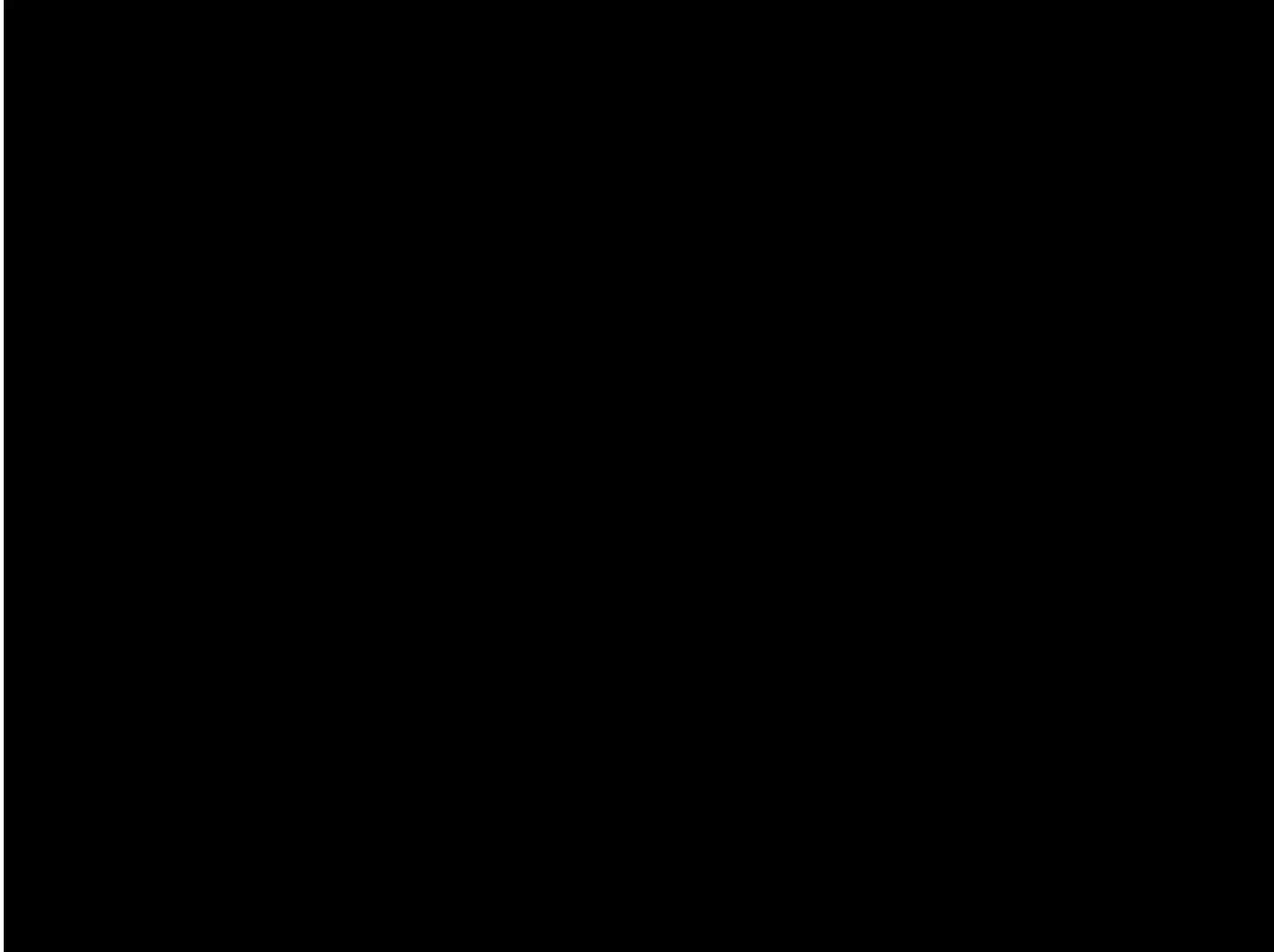
Solution: Image Representation

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 8 & 7 \\ \hline 0 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} = 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + 1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \\
 + 3 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + 5 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \dots$$



$$\begin{array}{c} = 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{Horizontal stripes} \\ \hline \end{array} + 23 \begin{array}{|c|} \hline \text{Vertical stripes} \\ \hline \end{array} + \\
 + 10 \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagonal stripes (top-left to bottom-right)} \\ \hline \end{array} + 7 \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagonal stripes (top-right to bottom-left)} \\ \hline \end{array} + \dots$$

Vidéo: Traitement optique de la TF



Introduction à la Transformée de Fourier et le Domaine Fréquentiel

- La TF **mono-dimensionnelle** et son inverse

- TF (**cas continu**)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad \text{where } j = \sqrt{-1}$$

- TF Inverse :

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

- La TF **bi-dimensionnelle** et son inverse

- TF (**cas continu**)

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

- TF Inverse :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

Introduction à la Transformée de Fourier et le Domaine Fréquentiel

- La TF Discrète **mono-dimensionnelle** et son inverse
 - TFD (**cas discret**)

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad \text{for } u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- TFD Inverse :

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad \text{for } x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Introduction à la Transformée de Fourier et le Domaine Fréquentiel

- $F(u)$ en coordonnées polaires :

$$F(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$$

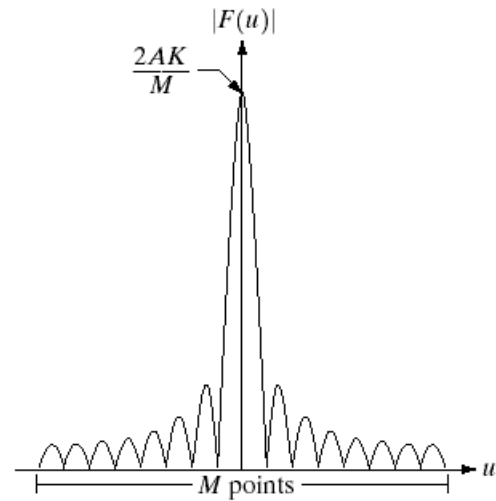
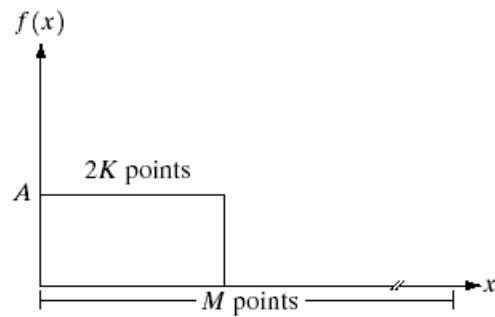
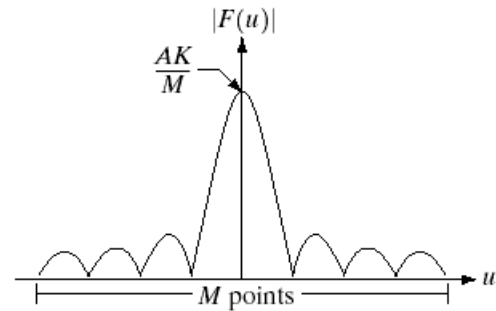
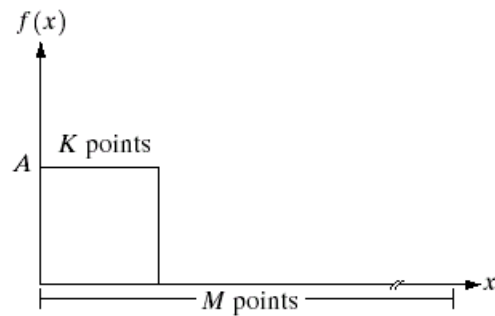
$$\text{où } |F(u)| = \left[R^2(u) + I^2(u) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{spectre d'amplitude})$$

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right] \quad (\text{spectre de phase})$$

- $R(u)$: la partie réelle de $F(u)$
- $I(u)$: la partie imaginaire de $F(u)$
- Spectre de Puissance:

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

Exemple de Transformée de Fourier 1-D



Introduction à la Transformée de Fourier 2-D et le Domaine Fréquentiel

- Spectre de Fourier 2-D, angle de phase , et spectre de puissance définis par :

$$|F(u, v)| = \left[R^2(u, v) + I^2(u, v) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{spectre})$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right] \quad (\text{angle de phase})$$

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v) \quad (\text{spectre de puissance})$$

- $R(u, v)$: partie réelle de $F(u, v)$
- $I(u, v)$: partie imaginaire de $F(u, v)$

Introduction à la Transformée de Fourier 2-D et le Domaine Fréquentiel

- Propriétés de la transformée de Fourier :

$$\mathfrak{I}\left[f(x, y)(-1)^{x+y}\right] = F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right) \quad (\text{décalage})$$

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (\text{valeur moyenne})$$

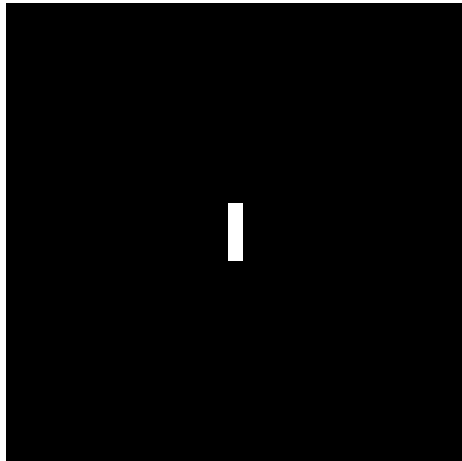
$$F(u, v) = F^*(-u, -v) \quad (\text{conjugué symétrique})$$

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (\text{symétrique})$$

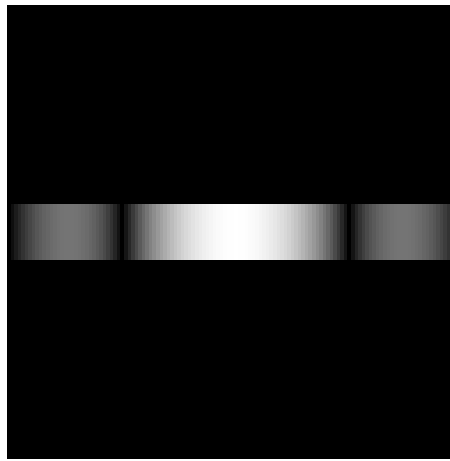
La TFD 2-D et son Inverse

La TFD 2-D $\mathbf{F(u,v)}$ peut être obtenue par:

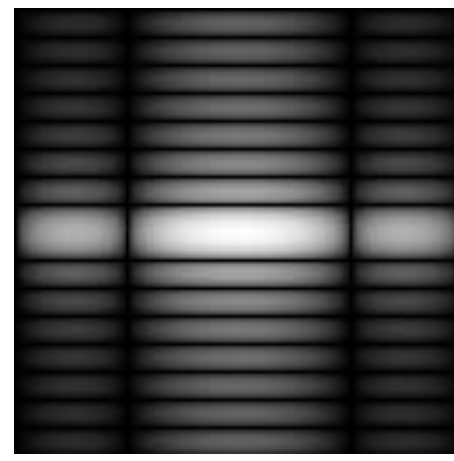
1. calculer la TFD 1-D pour chaque ligne de l'image $\mathbf{f(x,y)}$, $\rightarrow \mathbf{F(u,y)}$,
2. calculer la TFD 1-D pour chaque colonne de $\mathbf{F(u,y)}$ $\rightarrow \mathbf{F(u,v)}$



(a) $\mathbf{f(x,y)}$



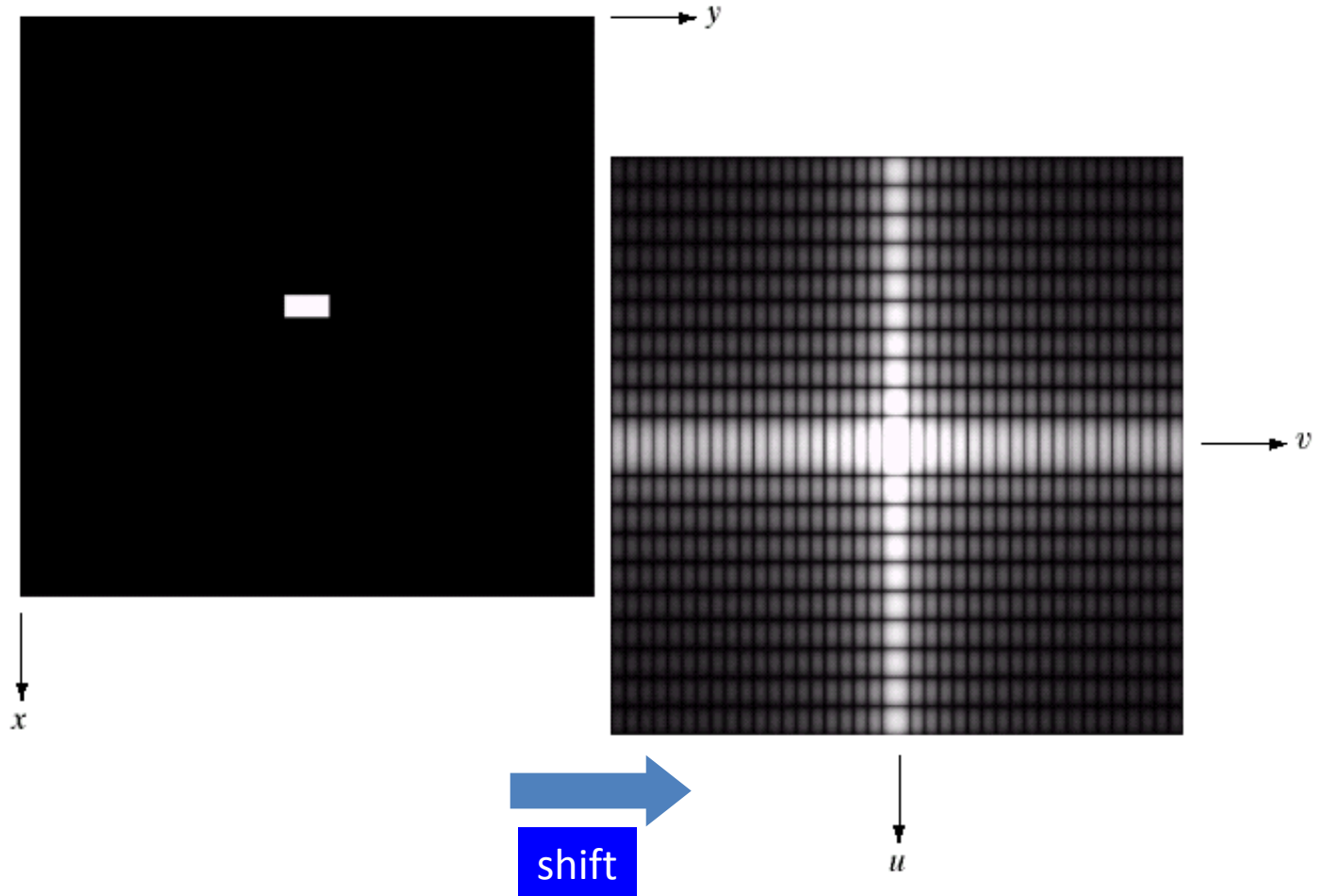
(b) $\mathbf{F(u,y)}$



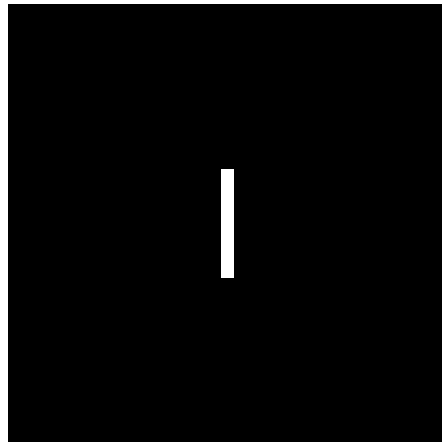
(c) $\mathbf{F(u,v)}$

La TFD 2-D et son Inverse

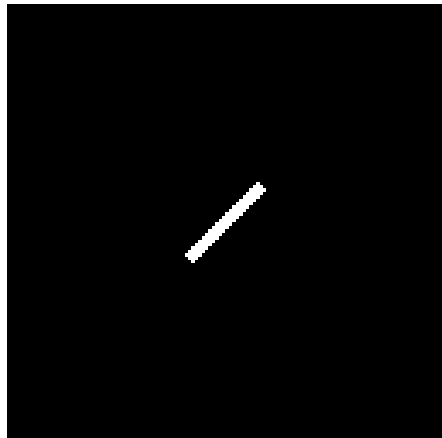
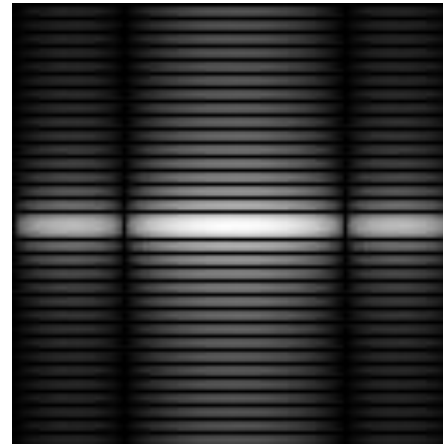
- a) Image d'un rectangle blanc 20×40 sur fond noir 512×512
- b) Spectre de Fourier centré



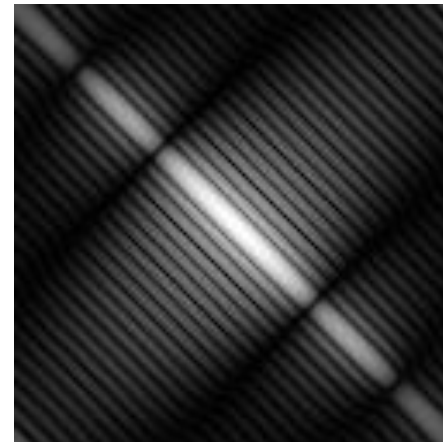
La Propriété de Rotation de la TFD 2-D



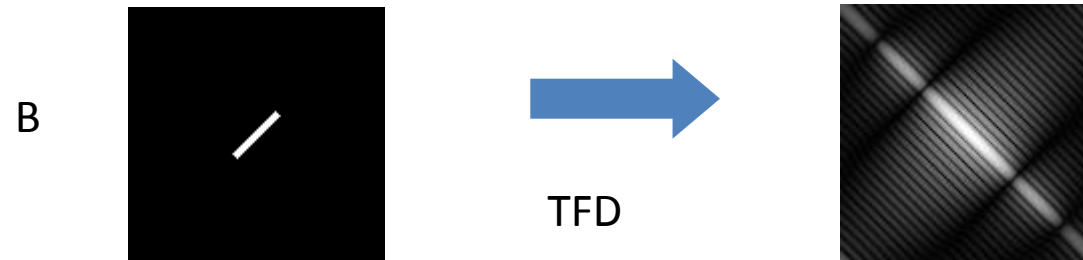
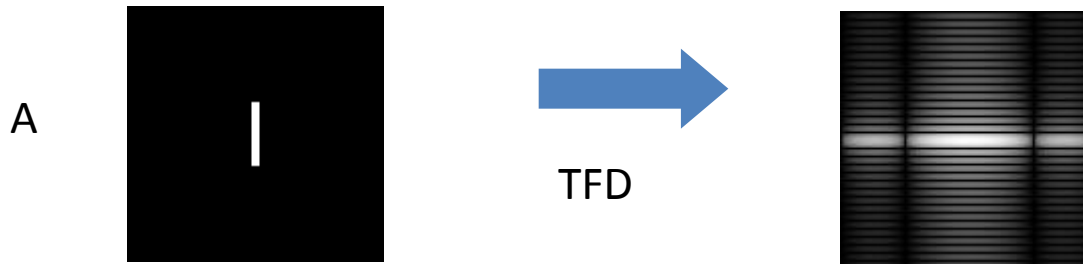
TFD



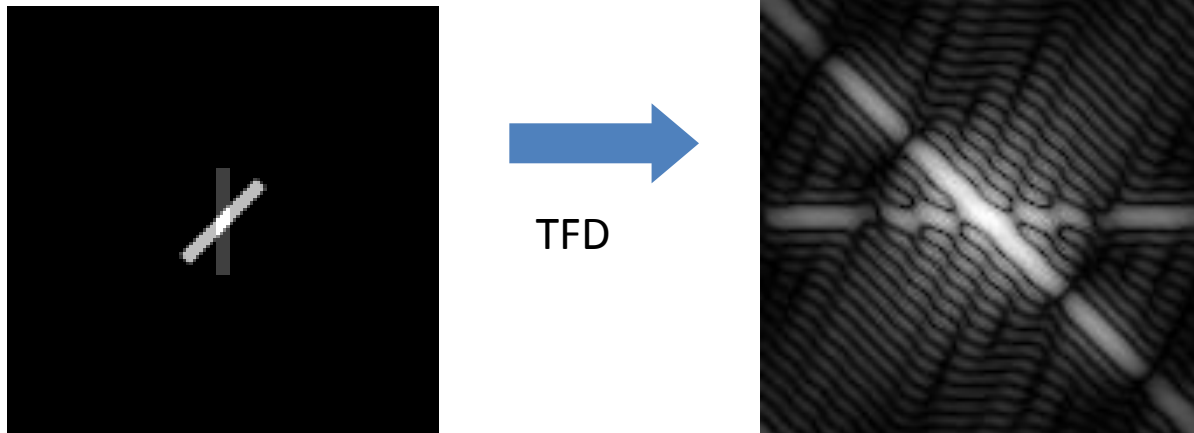
TFD



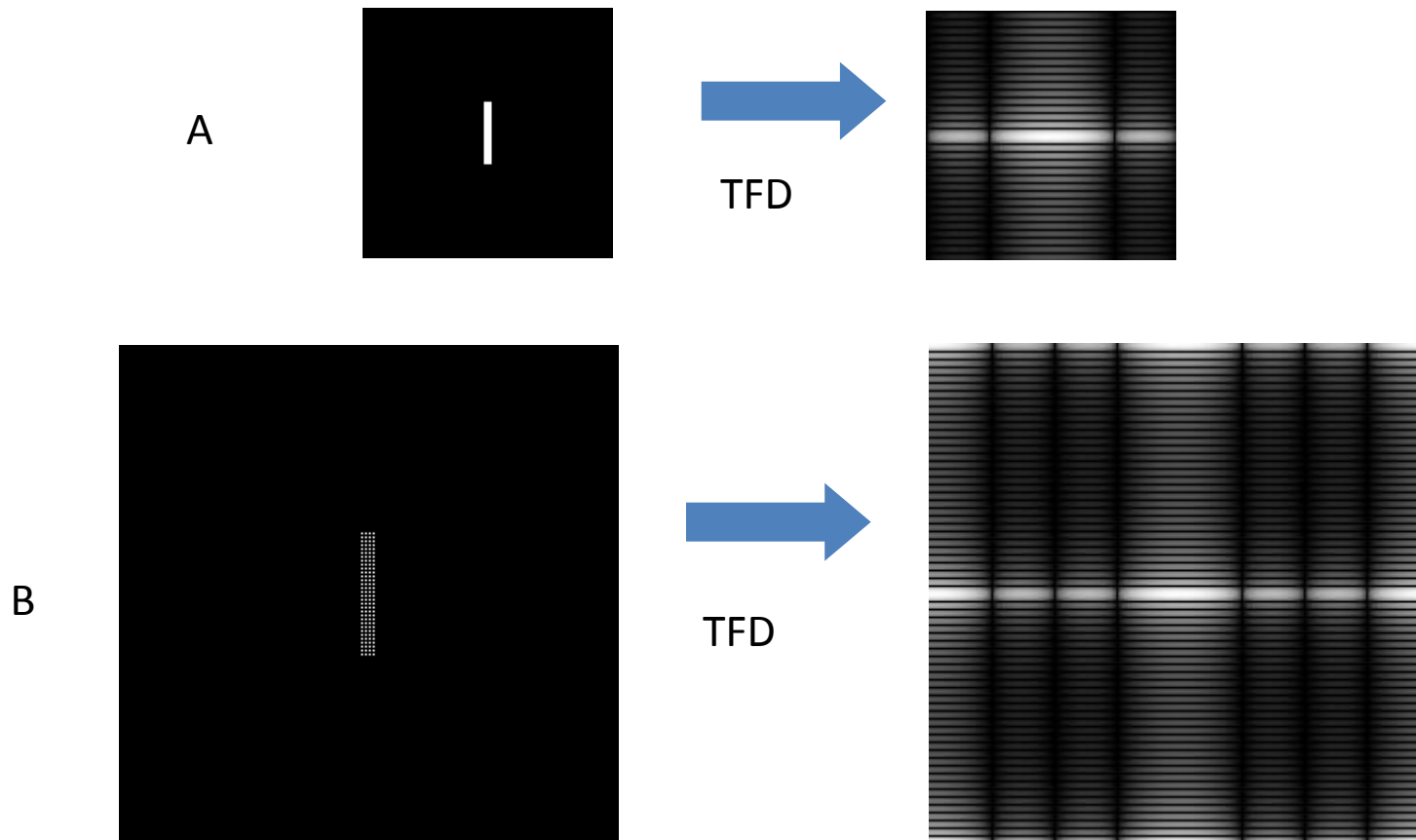
La Propriété de Linéarité de la TFD



$$0.25 * A \\ + 0.75 * B$$



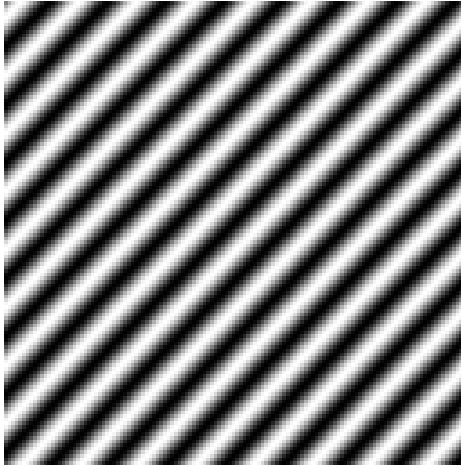
La Propriété d'expansion de TFD 2-D



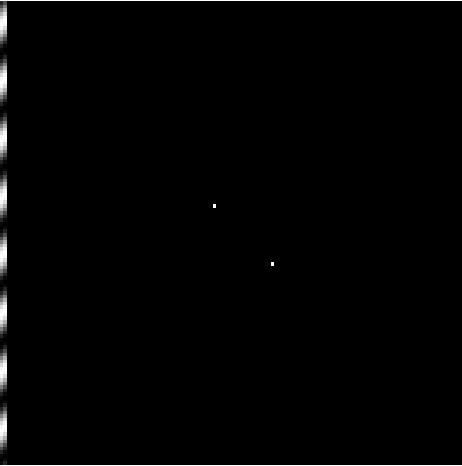
Augmenter l'image original par un facteur de n ($n=2$), remplissant les nouvelles valeurs par des **zéros**, résulte en une même TFD.

La TFD 2-D pour Différentes Fonctions

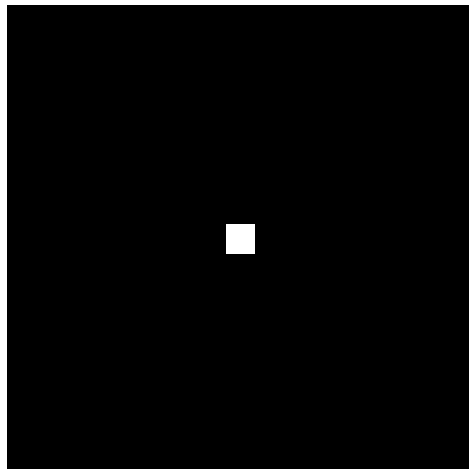
Onde Sinus



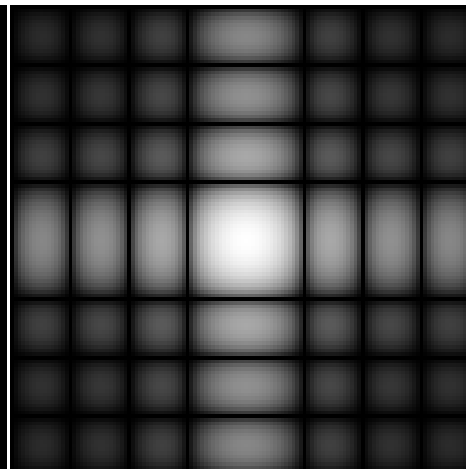
Sa TFD



Rectangle

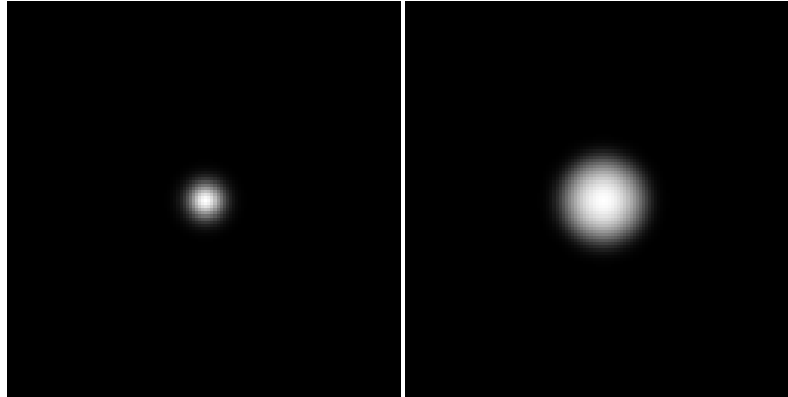


Sa TFD



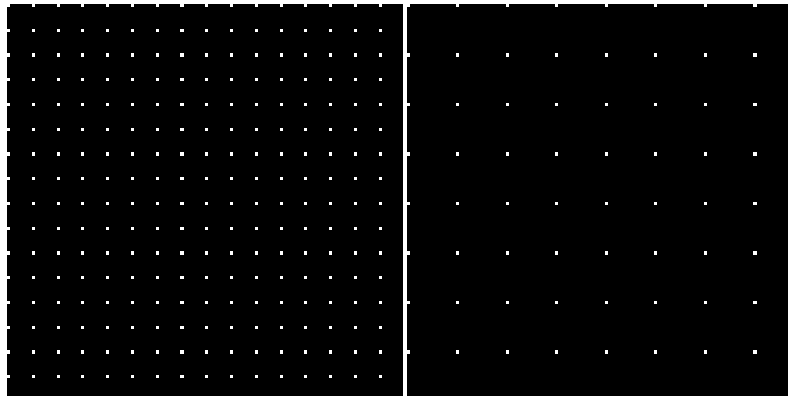
La TFD 2-D pour Différentes Fonctions

2D Gaussienne



Sa TFD

Impulsions



Sa TFD

Phase et Amplitude

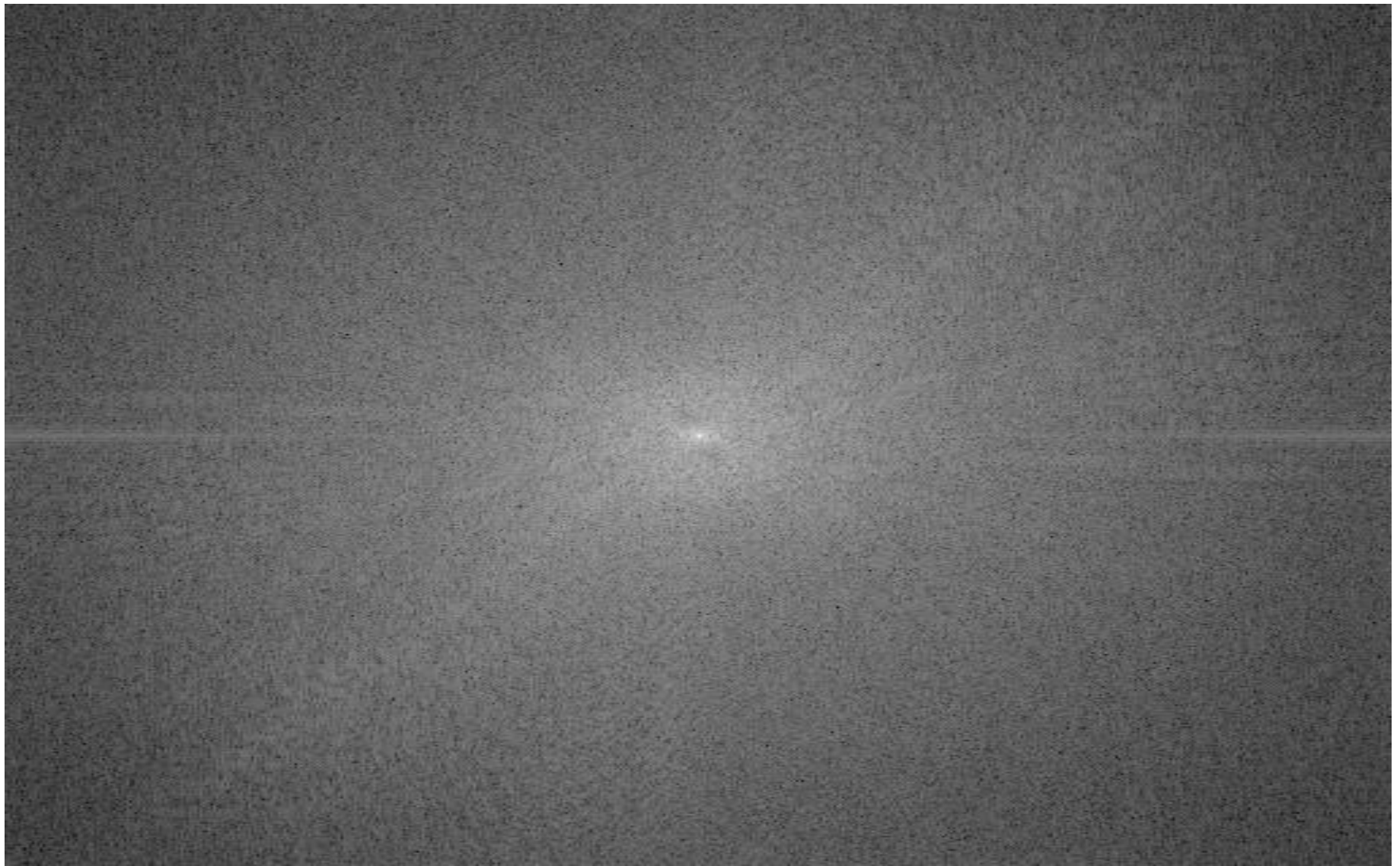
- **Fait Curieux:**

- Toutes les images naturelles possèdent à peu près le même spectre d'amplitude
- Ainsi, la phase semble très importante

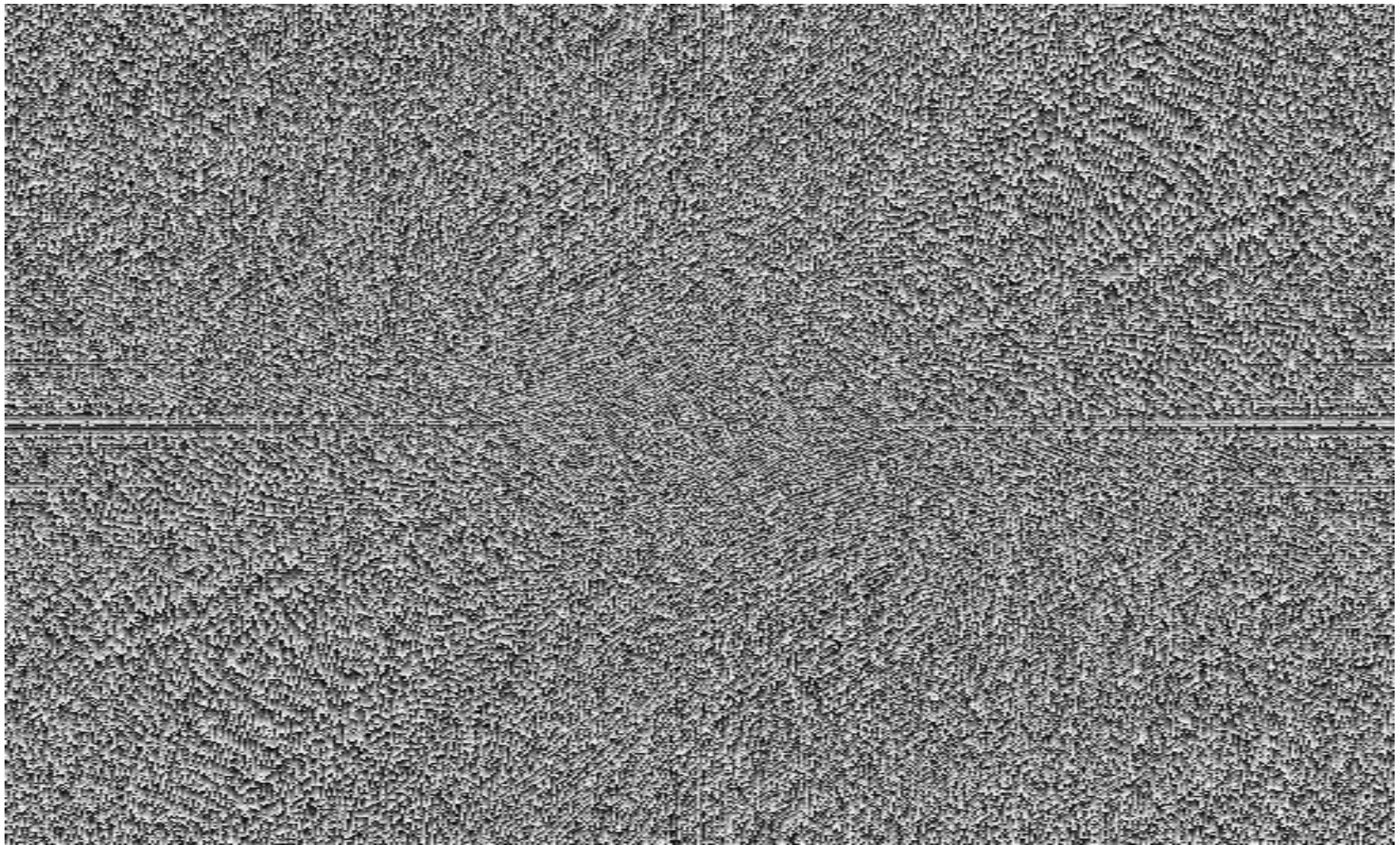
- **Démonstration:**

- Prendre deux images, interchanger leur spectre de phase , calculer la TF inverse – Que serait le résultat ?



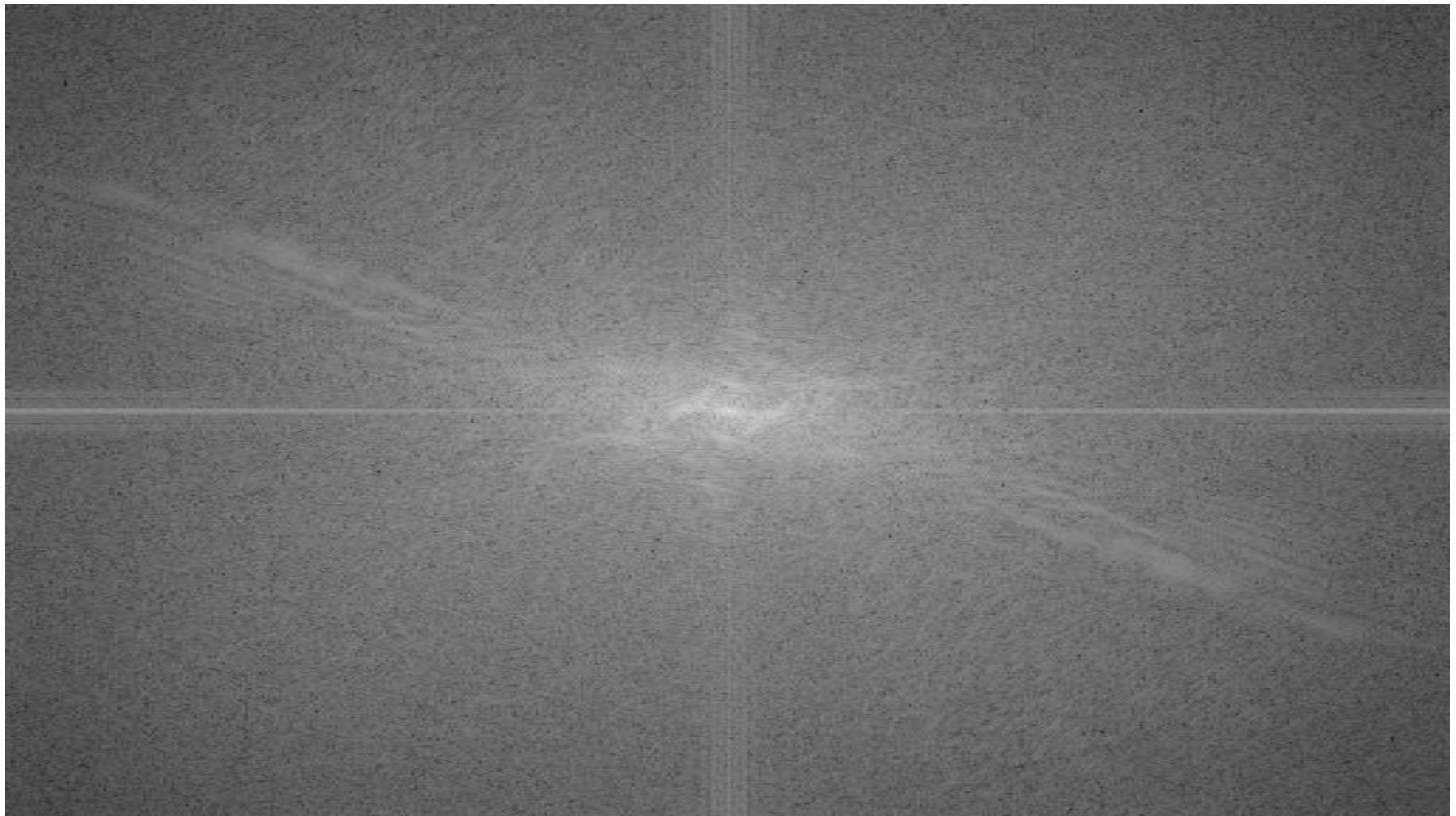


Spectre d'amplitude du guépard

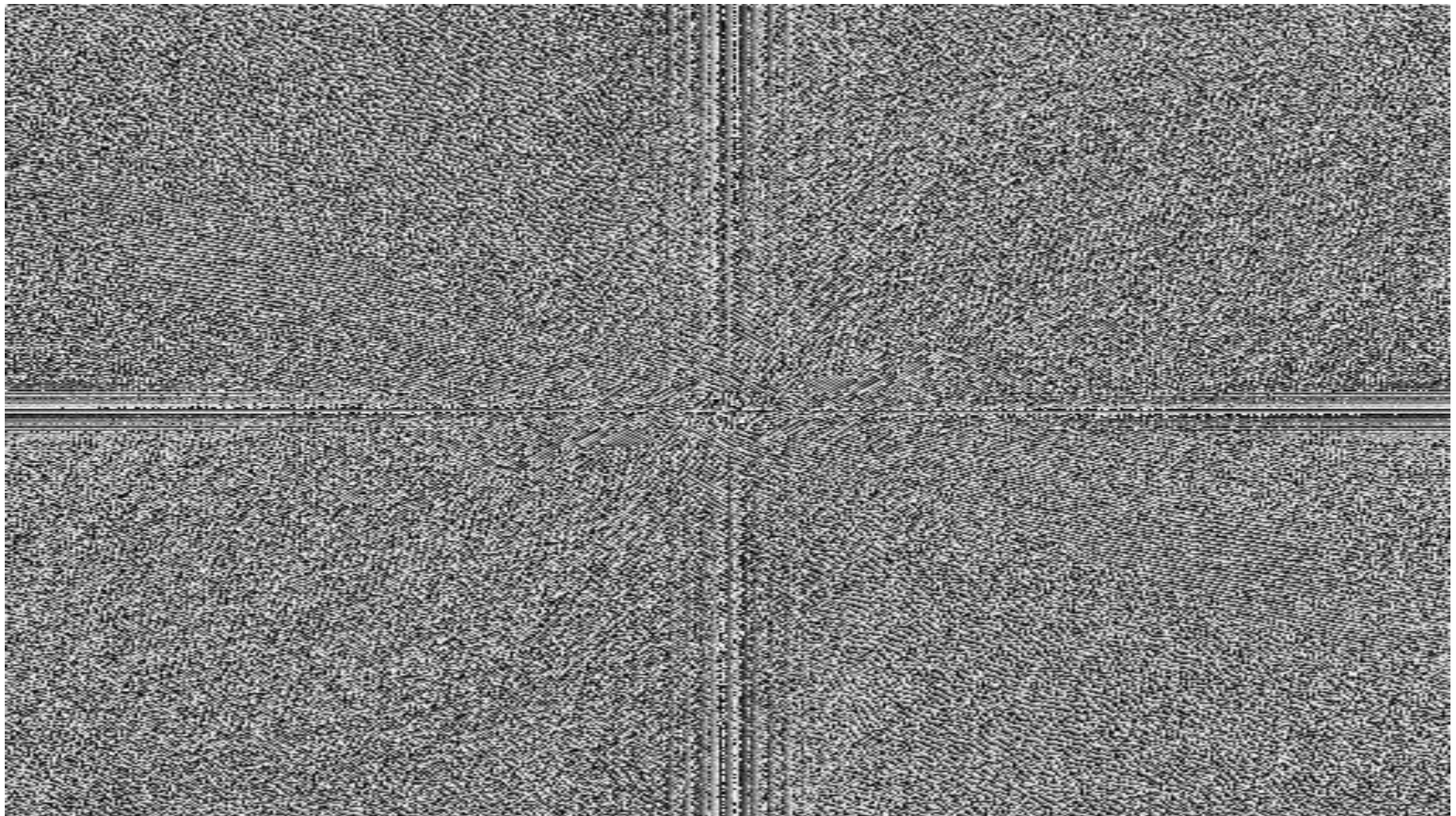


Spectre de phase du guépard

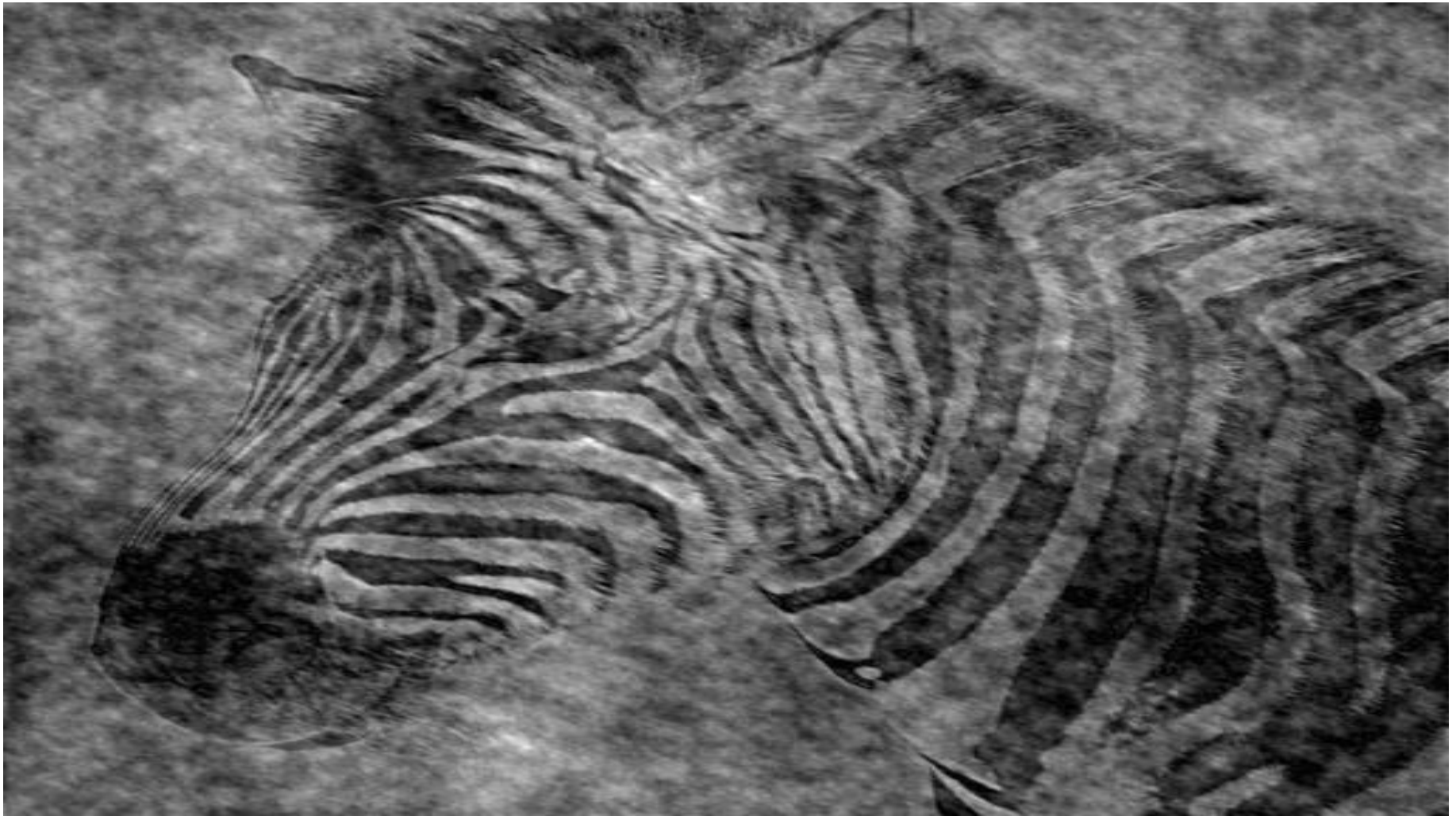




Spectre d'amplitude du zèbre



Spectre de phase du zèbre

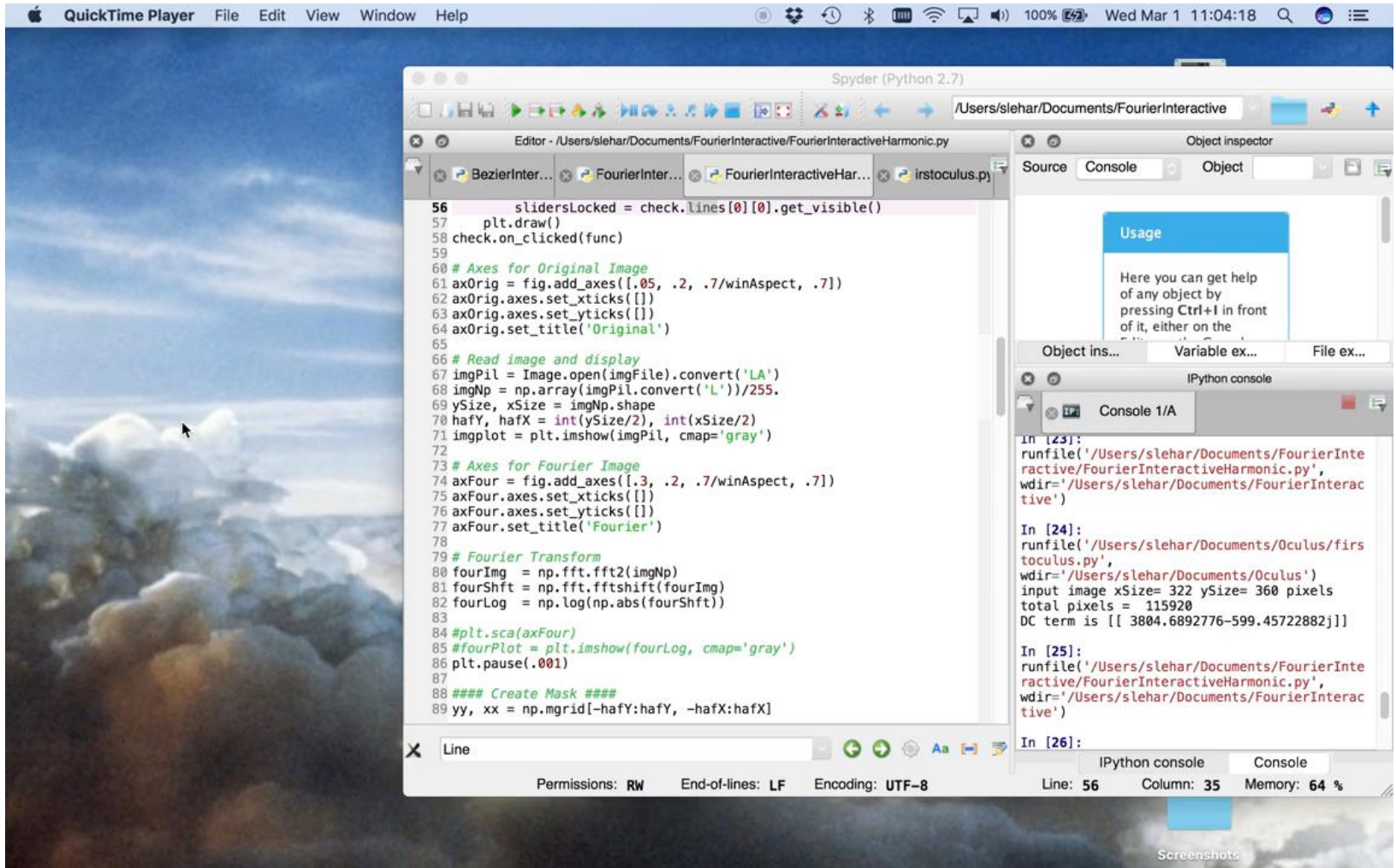


Reconstruction avec phase du zèbre,
+ amplitude du guépard



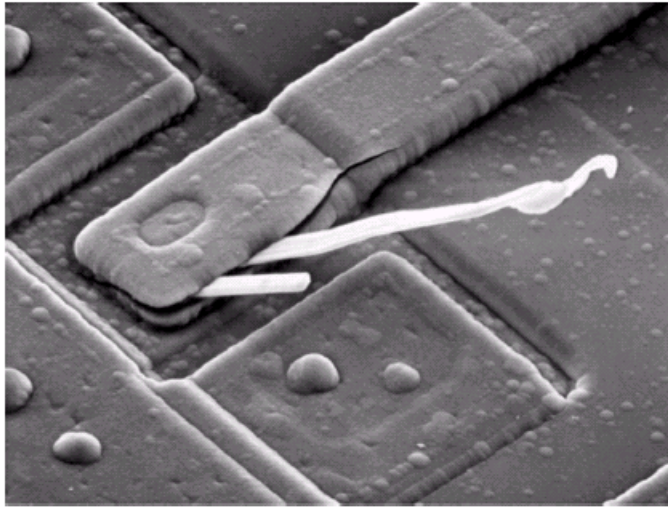
Reconstruction avec phase du guépard,
+ amplitude du zèbre

Manipulation de la TF 2-D

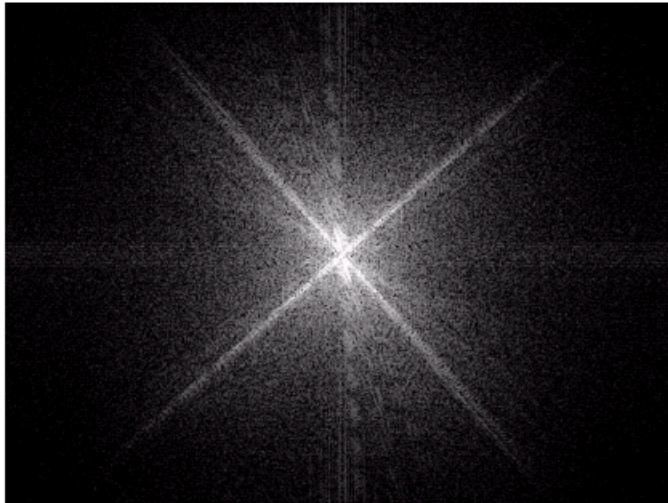


Filtrage dans le Domaine Fréquentiel

Microscopie
électronique à
balayage

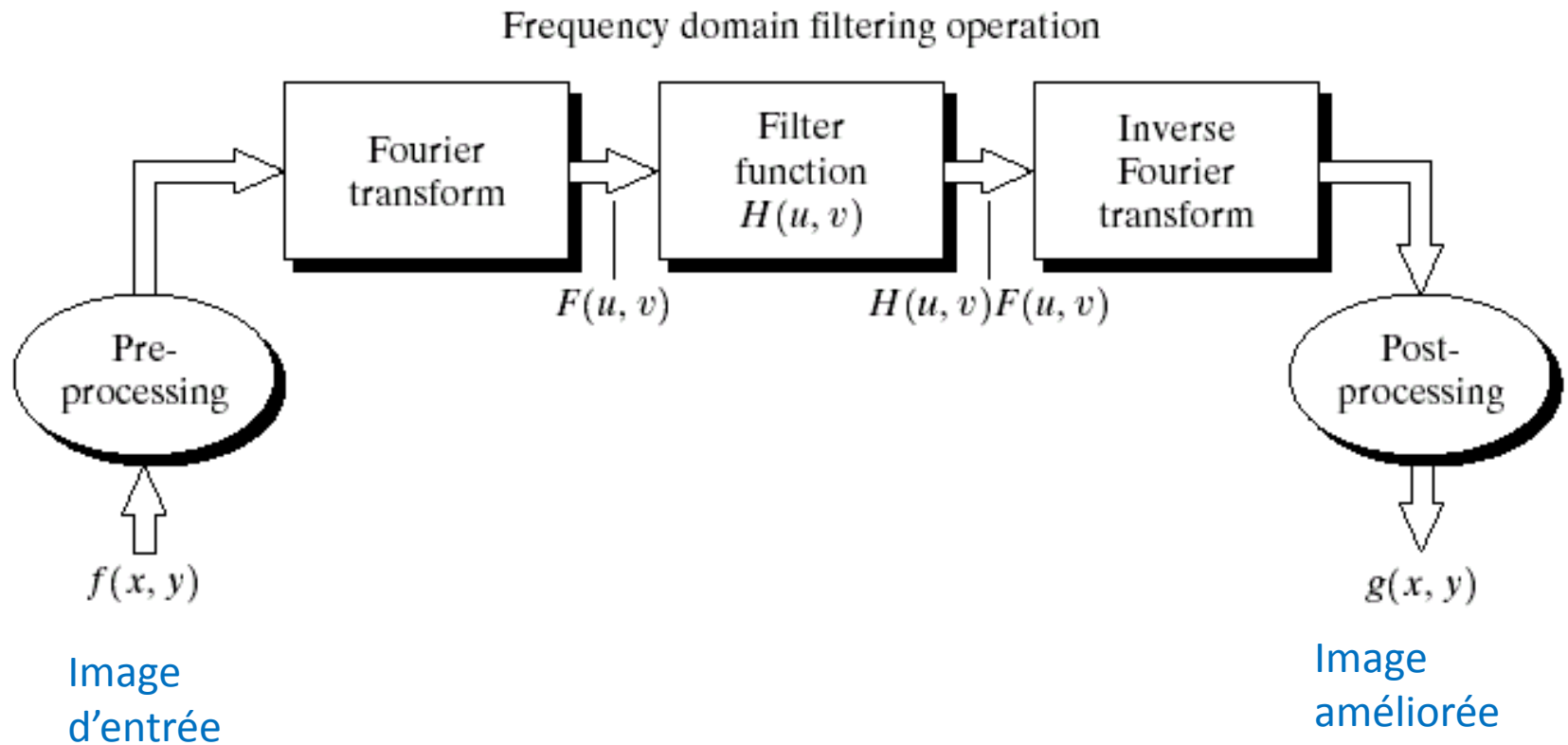


a) Image d'un
circuit intégré
défectueux



b) Sa Transformée
de Fourier

Schéma de Base du Filtrage Fréquentiel



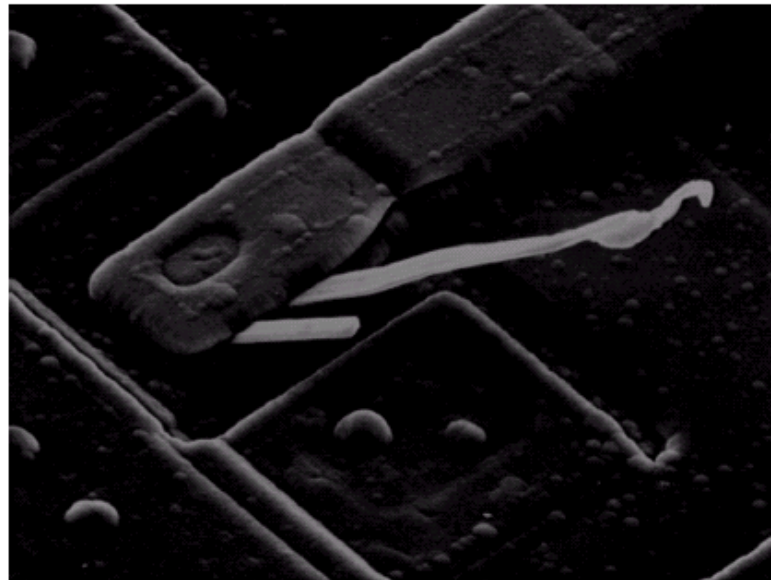
Quelques Filtres de Base et Leurs Fonctions

- Multiplier toutes les valeurs de $F(u,v)$ par la fonction du filtre (notch filter):

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u,v) = (M/2, N/2) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

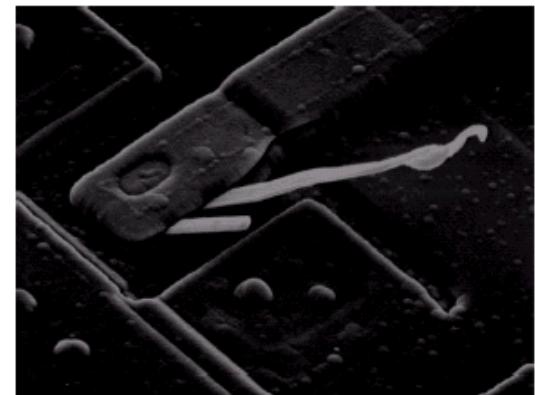
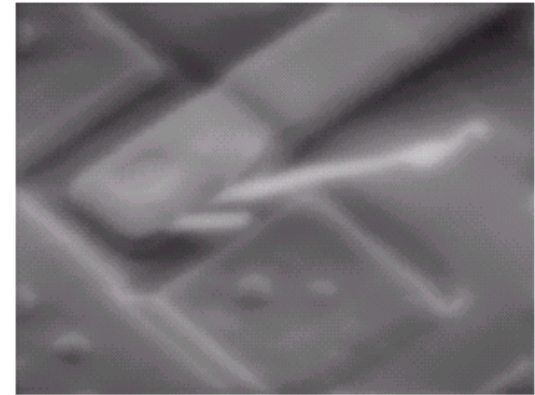
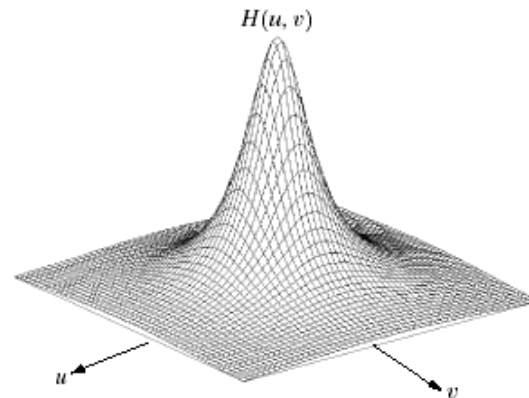
- Ce filtre a pour effet de mettre $F(0,0)$ égale à zero (force la valeur moyenne d'une image à zero) et laisse tous les autres composantes fréquentielles inchangées de la TF.

Résultat du
filtrage de
l'image

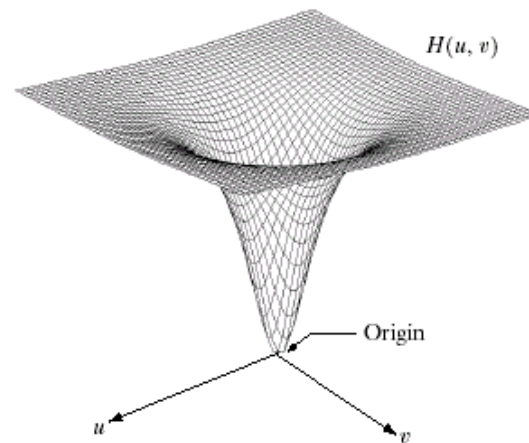


Quelques Filtres de Base et Leurs Fonctions

Filtre passe-bas



Filtre passe-haut

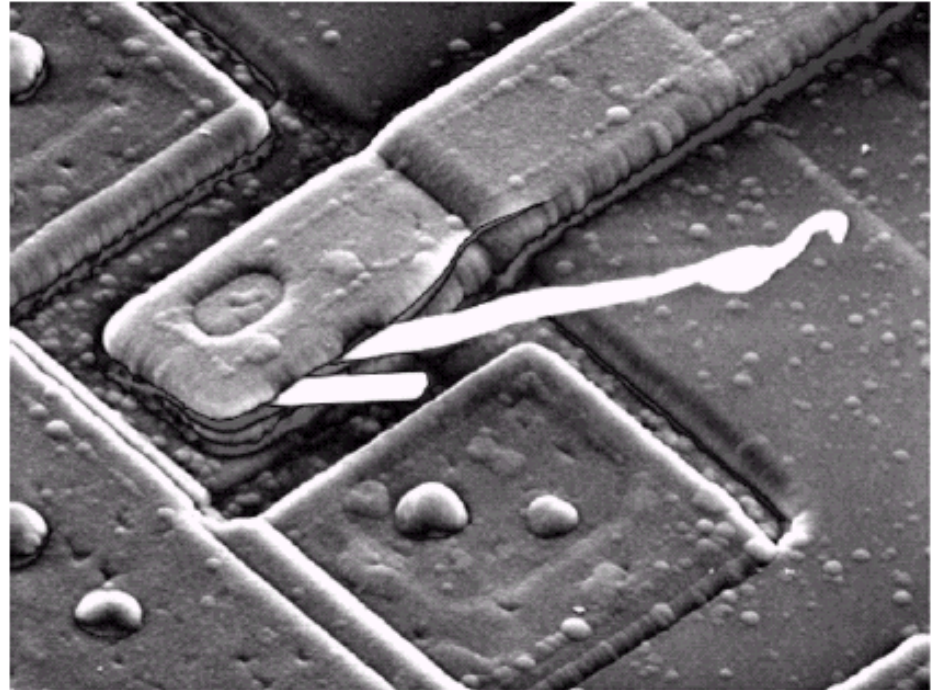


a	b
c	d

FIGURE 4.7 (a) A two-dimensional lowpass filter function. (b) Result of lowpass filtering the image in Fig. 4.4(a). (c) A two-dimensional highpass filter function. (d) Result of highpass filtering the image in Fig. 4.4(a).

Quelques Filtres de Base et Leurs Fonctions

Résultat du Filtrage
passe-haut



Correspondance entre Filtrage dans le Domaine Spatial et Fréquentiel

- Théorème de la Convolution:
 - La convolution discrète de deux fonctions $f(x,y)$ and $h(x,y)$ de taille $M \times N$ est définie par:

$$f(x,y) * h(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m, y-n)$$

- Soit $F(u,v)$ et $H(u,v)$ les transformées de Fourier de $f(x,y)$ et $h(x,y)$, alors

$$f(x,y) * h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

$$f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) * H(u,v)$$

Correspondance entre Filtrage dans le Domaine Spatial et Fréquentiel

- Soit $H(u)$ un filter Gaussien de fonction définie dans le domaine fréquentiel par l'équation

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2}$$

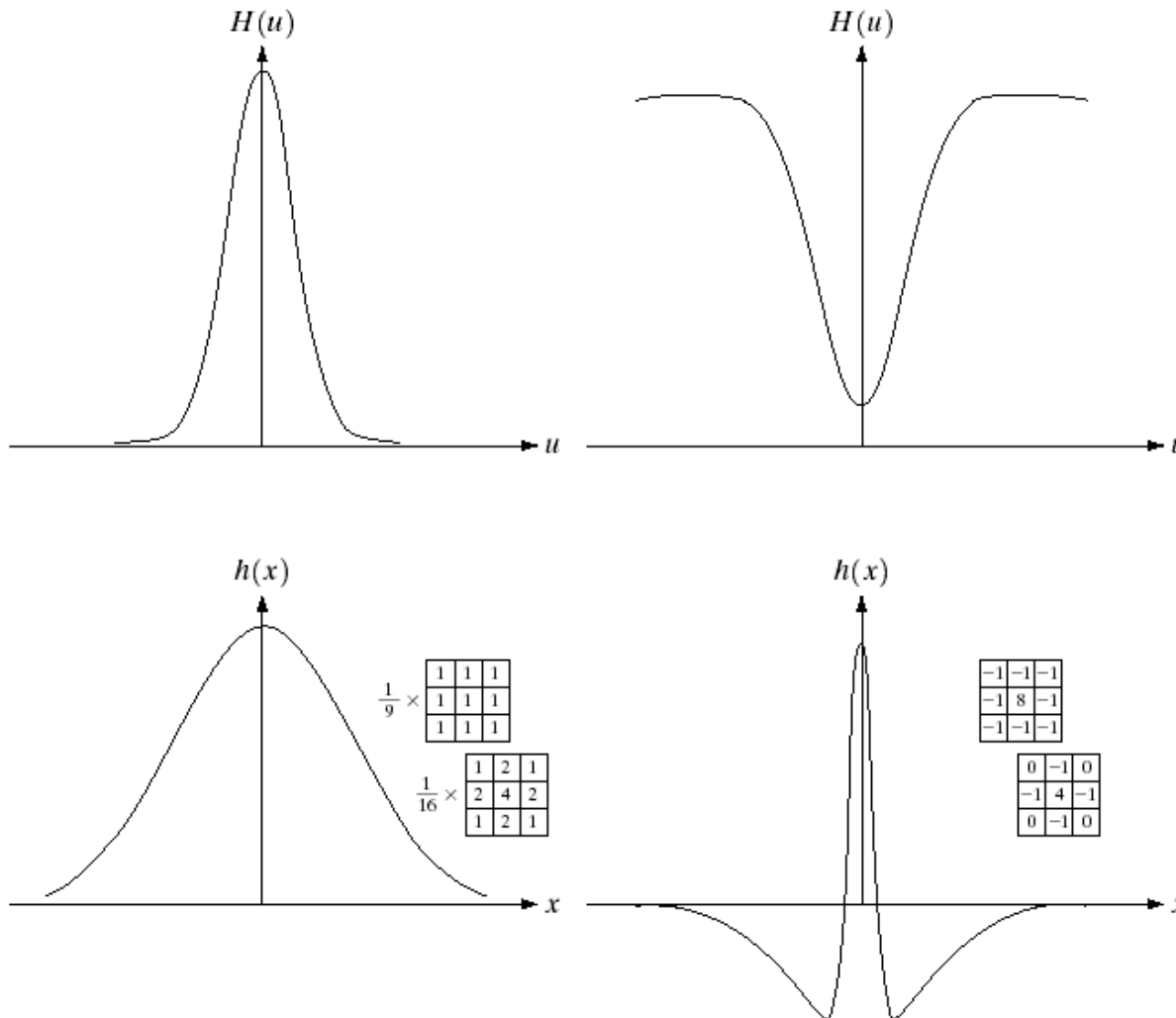
σ : l'écart-type de la Gaussienne .

- Le filtre correspondant dans le domaine spatial est:

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$$

- Noter: La TF directe et inverse d'une Gaussienne sont toutes les deux des **fonctions gaussiennes réelles**,

Correspondance entre Filtrage dans le Domaine Spatial et Fréquentiel



- a) Filtre gaussien passe-bas
- b) Filtre gaussien passe-haut
- c) Filtre spatial passe-bas équivalent
- d) Filtre spatial passe-haut équivalent

Correspondance entre Filtrage dans le Domaine Spatial et Fréquentiel

- Fonctions gaussiennes : à valeurs réelles; pas de valeurs complexes.
- De plus, les valeurs sont toujours positives. Convoluer une image avec une Gaussienne, ne produit jamais de valeurs négatives.
- Une importante relation entre les largeurs d'une fonction Gaussienne et sa TF . Si on prend une fonction de largeur plus petite, la largeur de sa TF devient plus large. Ceci est contrôlé par la variance σ^2 .
- Cette propriété rend le filtre Gaussien très utile pour un filtrage passe-bas d'une image. La quantité du flou est contrôlé par σ^2 . On peut l'implémenter aussi bien dans le domaine spatial que fréquentiel.

Filtres de Lissage dans le Domaine fréquentiel

- Le modèle de base d'un filtrage dans le domaine fréquentiel:

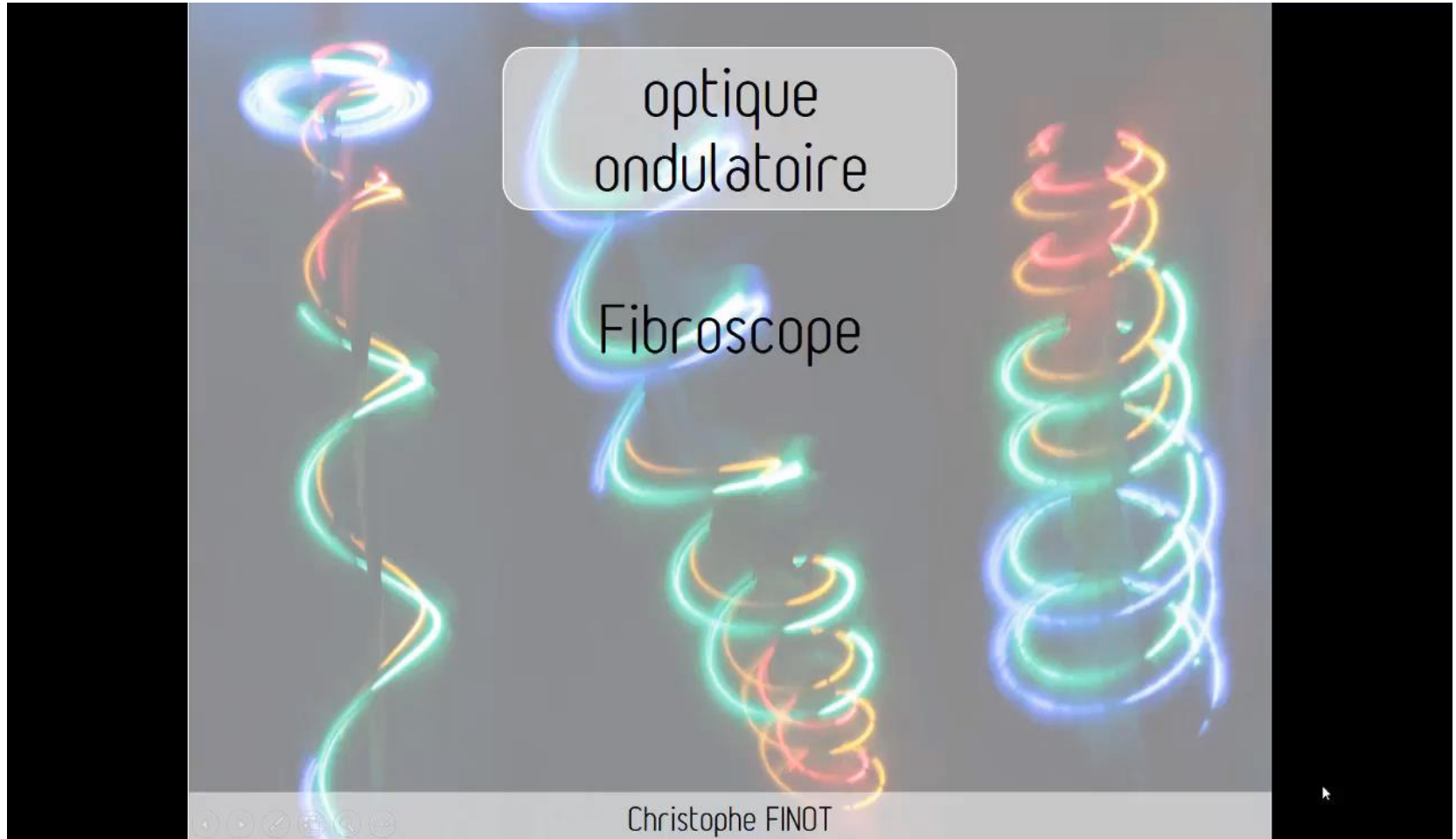
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

ici $F(u, v)$: la transformée de Fourier de l'image à lisser

$H(u, v)$: la fonction de transfert du filtre

- Le lissage est fondamentalement une opération de filtrage passe-bas dans le domaine fréquentiel.
- Il y'a plusieurs formes standards de filtres passe-bas.
 - Filtre passe-bas idéal
 - Filtre passe-bas de Butterworth
 - Filtre passe-bas Gaussien

Exemple d'application



Filtres Passe-bas Idéaux

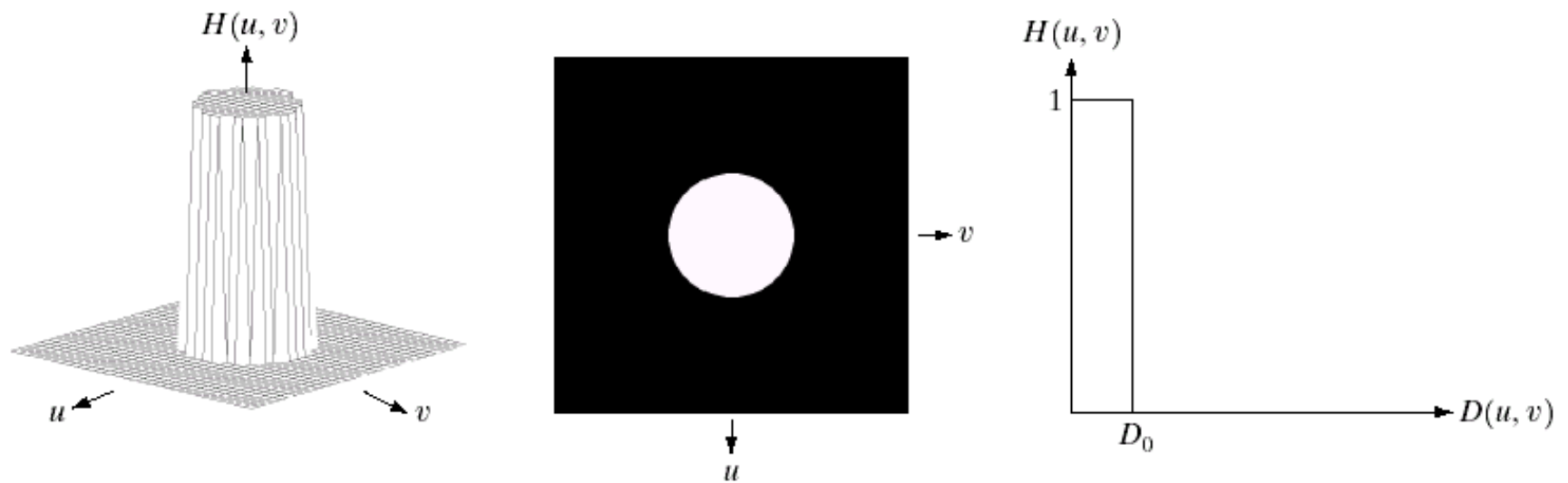
- Le filtre passe-bas le plus simple est un filtre qui supprime toutes les composantes hautes fréquences de la TF situées à une distance supérieure d'une distance spécifique D_0 à partir de l'origine.
- La fonction de transfert d'un filtre passe-bas idéal est :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

où $D(u, v)$: la distance du point (u, v) au centre du rectangle des fréquences

$$D(u, v) = \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

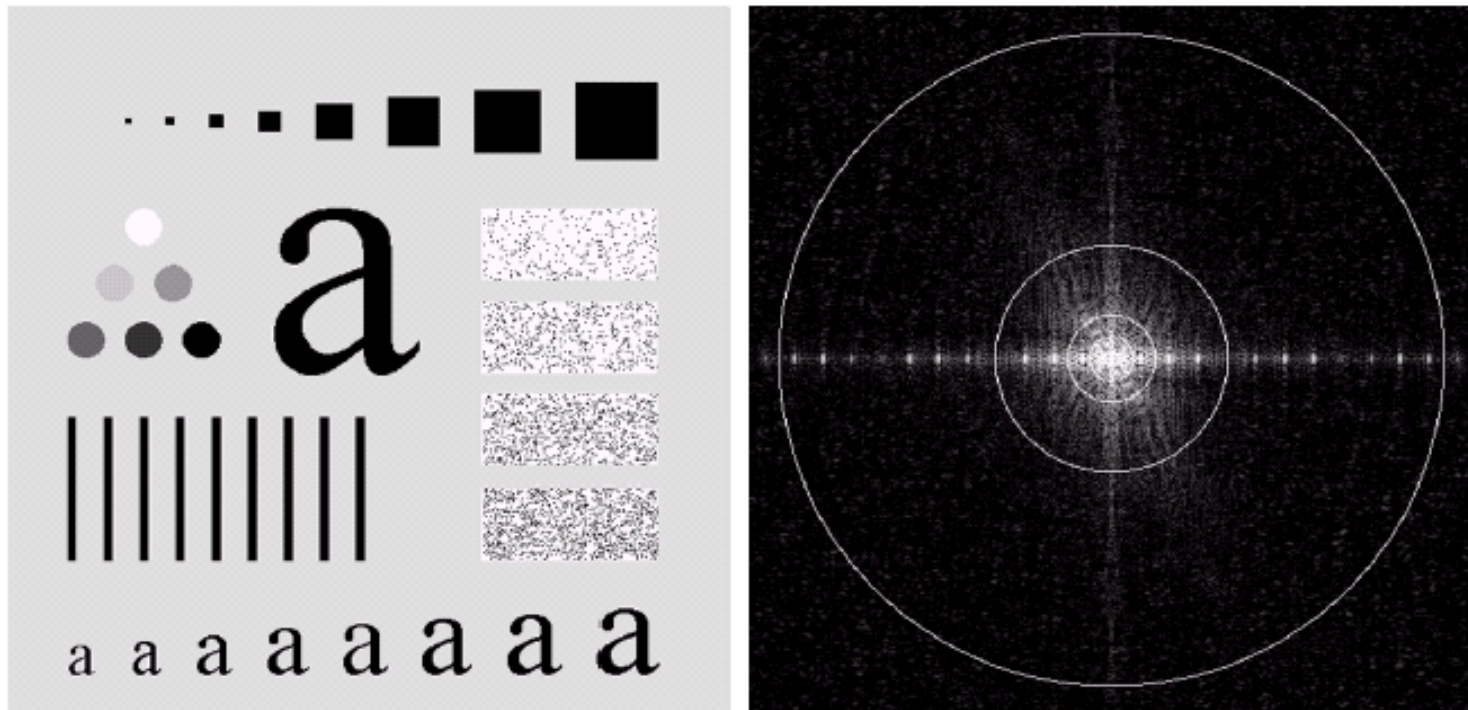
Filtres Idéaux Passe-bas



a b c

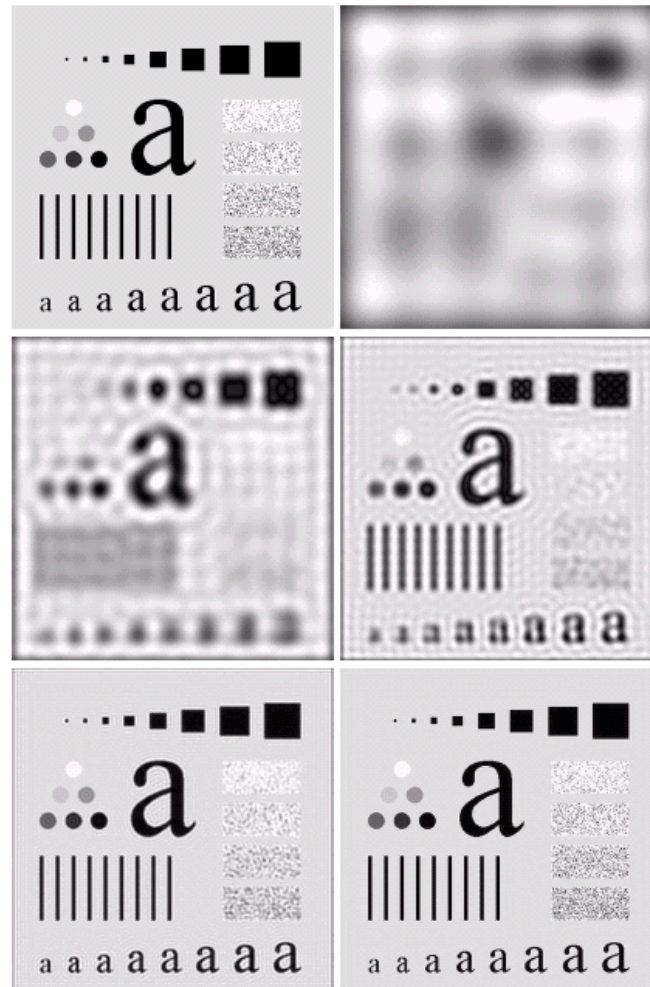
FIGURE 4.10 (a) Perspective plot of an ideal lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

Filtres Idéaux Passe-bas



(a) An image of size 500×500 pixels and (b) its Fourier spectrum. The superimposed circles have radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, which enclose 92.0, 94.6, 96.4, 98.0, and 99.5% of the image power, respectively.

Filtres Passe-bas Idéaux



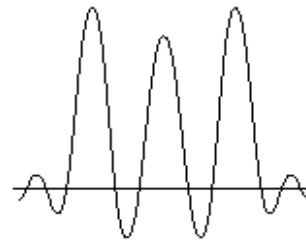
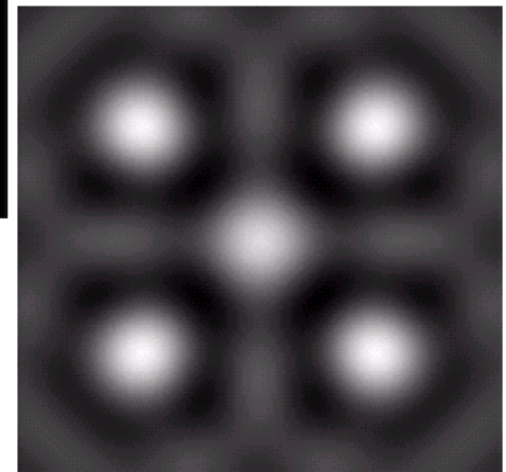
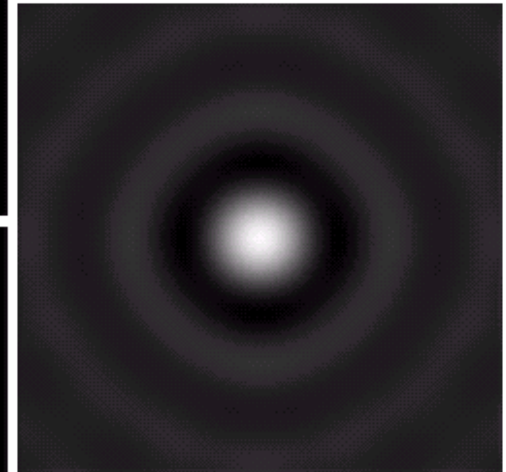
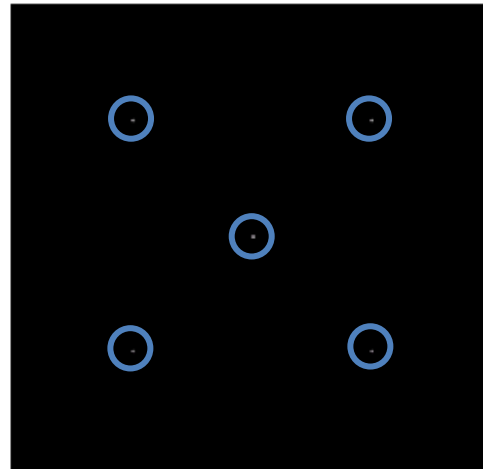
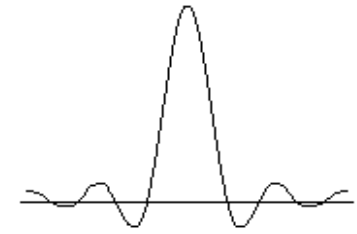
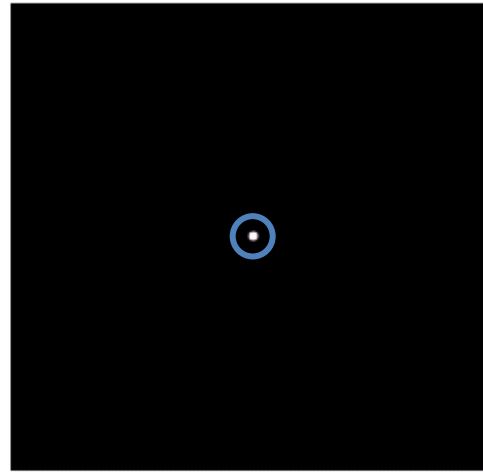
a	b
c	d
e	f

(a) Original image. (b)–(f) Results of ideal lowpass filtering with cutoff frequencies set at radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, respectively. The power removed by these filters was 8, 5.4, 3.6, 2, and 0.5% of the total, respectively.

Un autre exemple d'un filtre Idéal Passe-bas

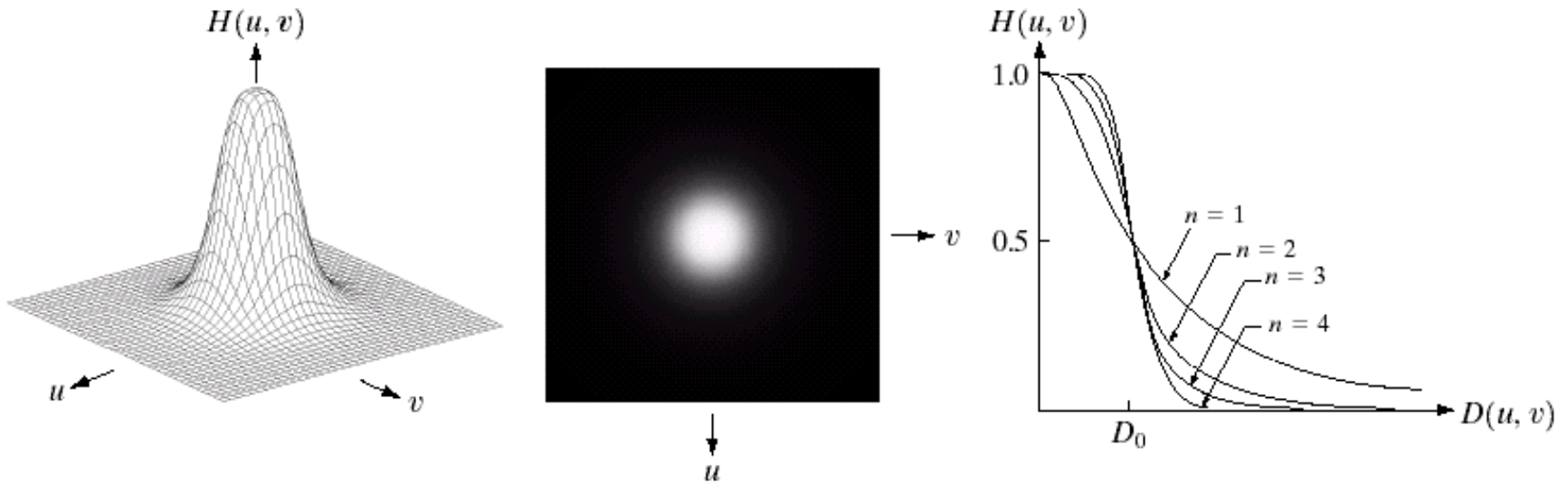
(a) A frequency-domain
ILPF of radius 5. (b) Corresponding
spatial filter. (c) Five impulses in the
spatial domain, simulating the values
of five pixels. (d) **Convolution of (b)
and (c) in the spatial domain.**

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$



Filtres de Butterworth Passe-bas d'ordre n

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$



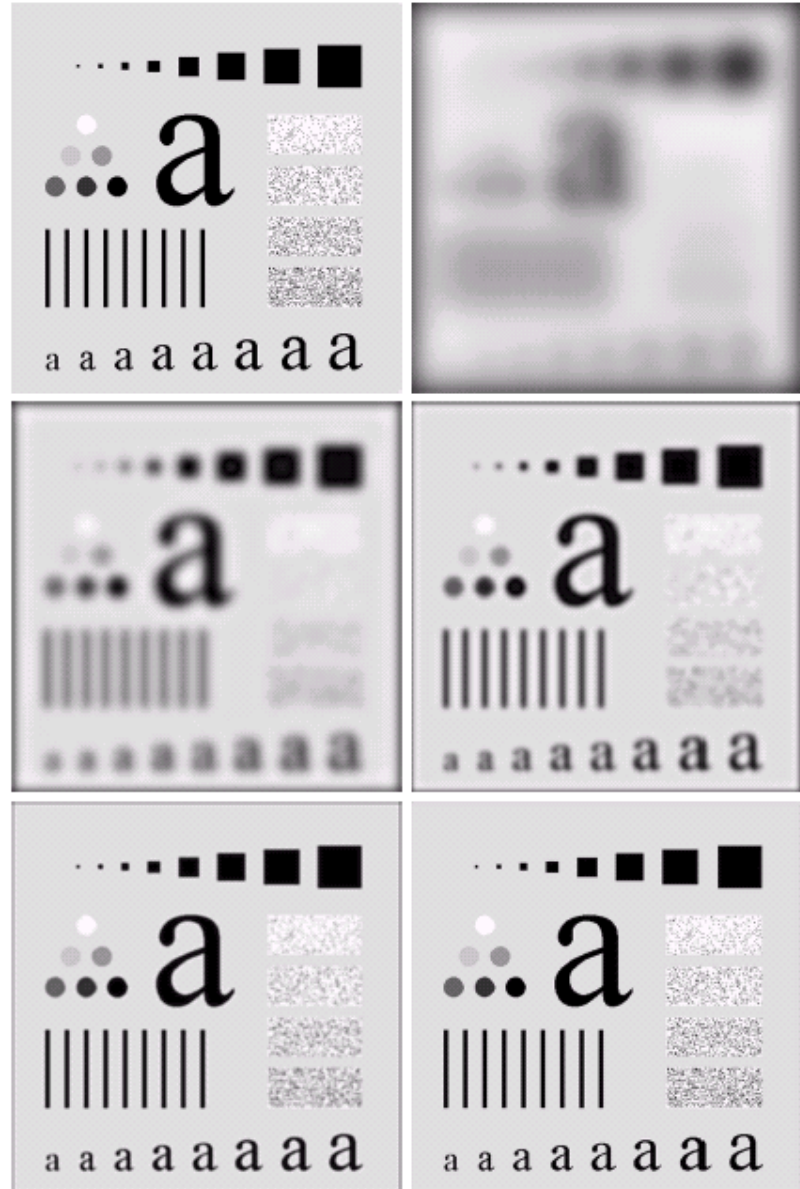
a b c

(a) Perspective plot of a Butterworth lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Filtres de Butterworth Passe-bas

Ordre du filtre:
 $n=2$

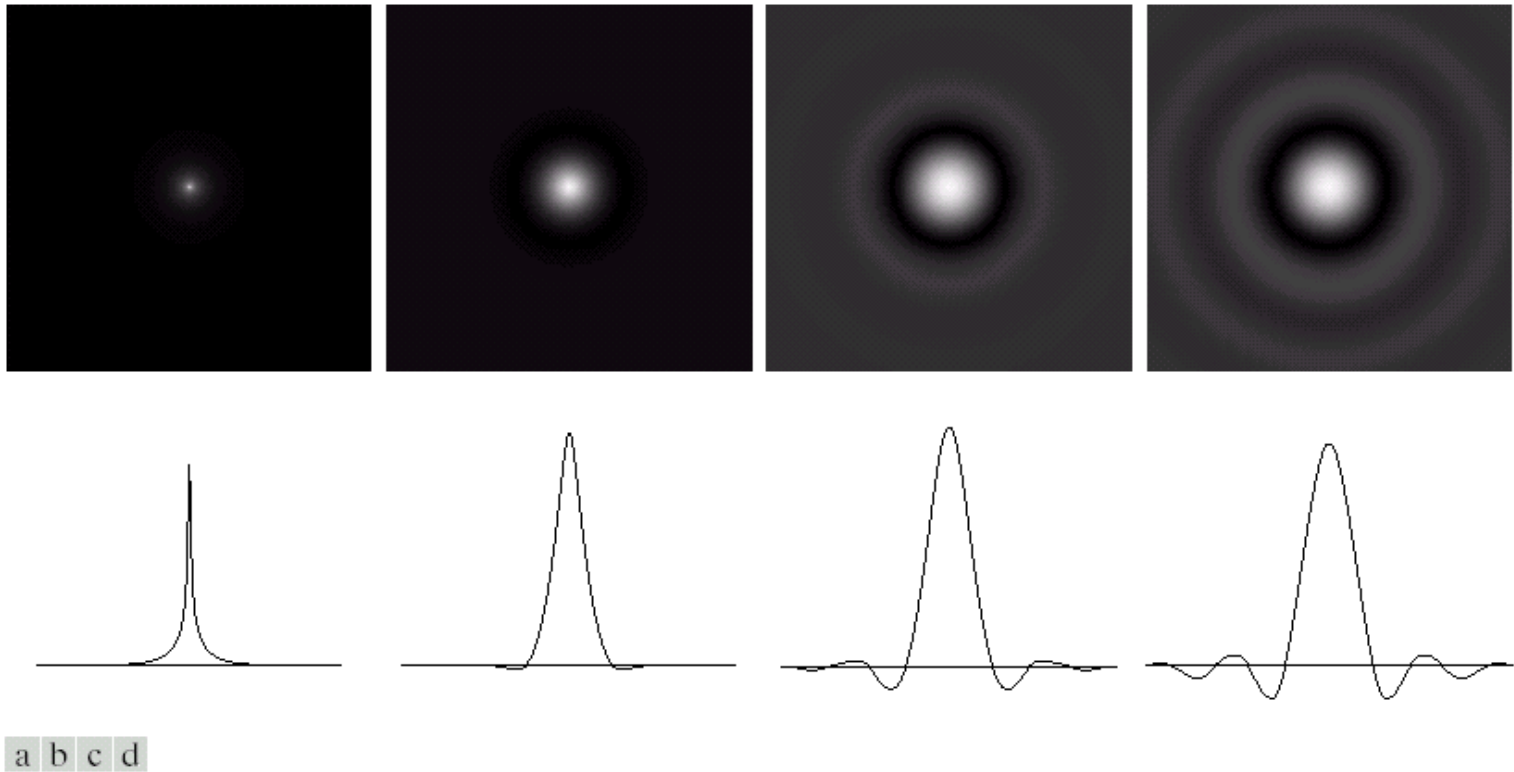
Diamètre du filtre:
 $D_0=5,15,30,80,\text{and } 230$



a b
c d
e f

Filtres de Butterworth Passe-bas

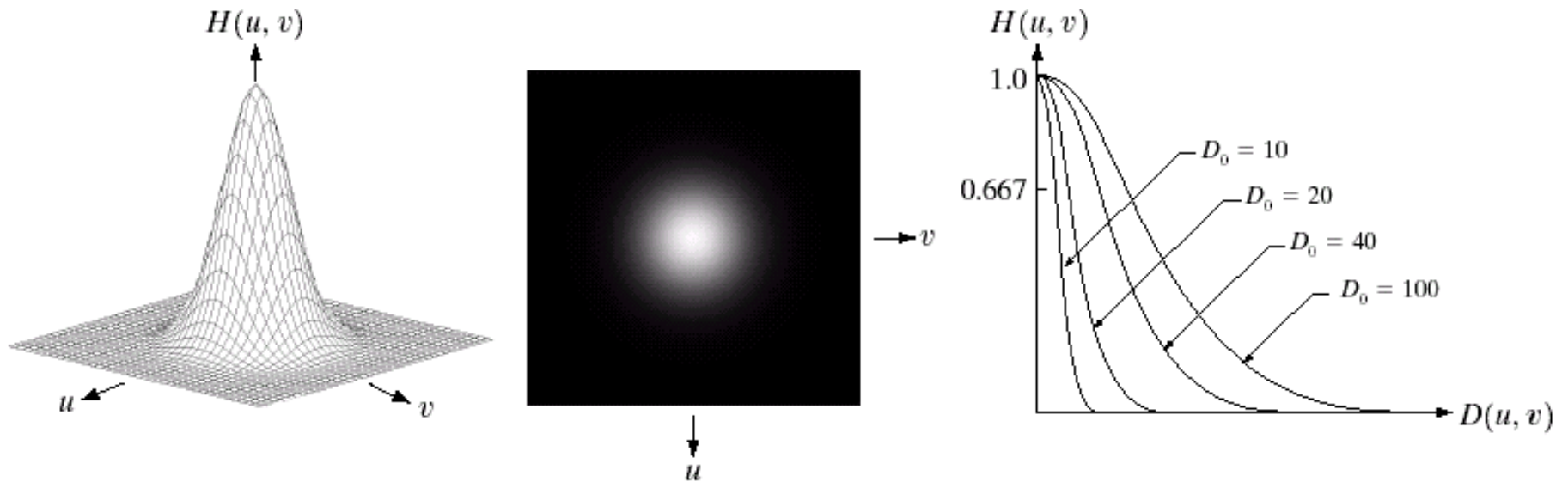
Representation Spatiale



(a)–(d) Spatial representation of BLPFs of order 1, 2, 5, and 20, and corresponding gray-level profiles through the center of the filters (all filters have a cutoff frequency of 5). Note that ringing increases as a function of filter order.

Filtres Gaussiens Passe-bas

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$



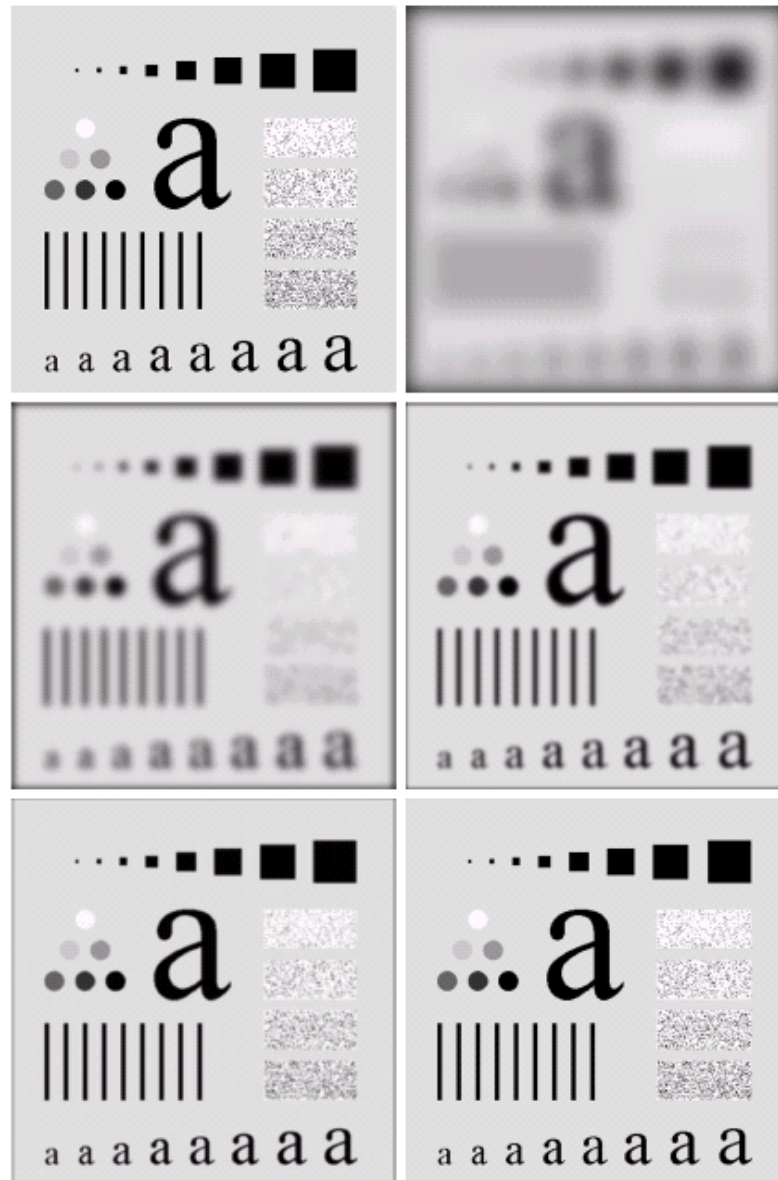
a b c

(a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0 .

Filtres Gaussiens Passe-bas

Diamètre du filtre:

$D_0=5,15,30,80,and $230$$



Autres Exemples de Filtrage passe-bas

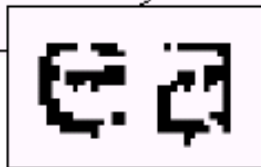
a b

a) Texte (résolution faible)

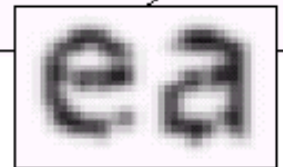
Noter les segments de lettres coupés,

b) Résultat après filtrage

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



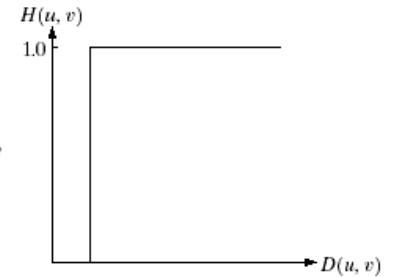
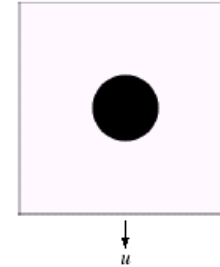
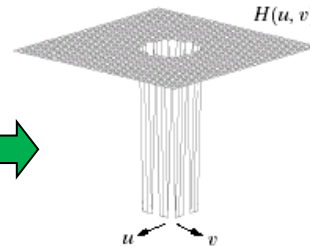
Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Filtres Passe-hauts (affûtage): Domaine Fréquentiel

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

filtre passe-haut idéal

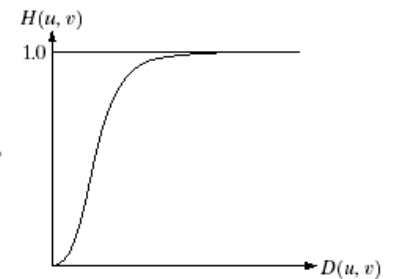
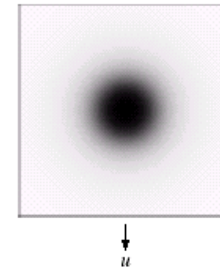
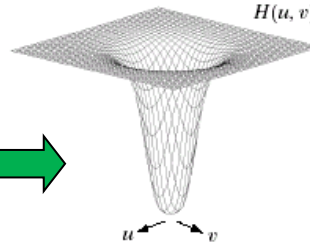


$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

Filtre passe-haut de Butterworth



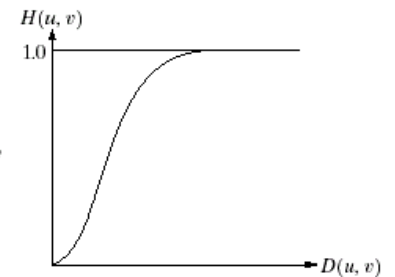
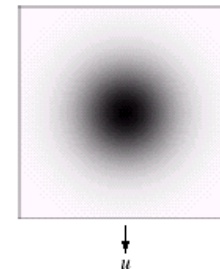
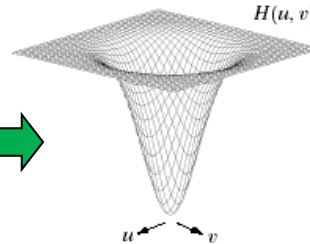
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$



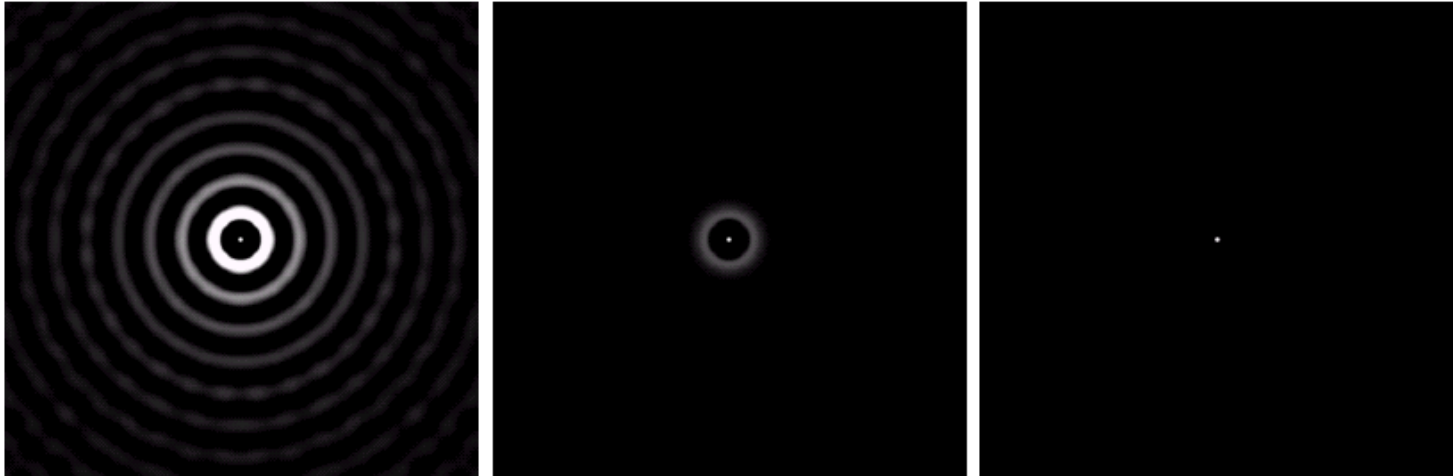
Filtre passe-haut Gaussien



$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$



Représentations Spatiales des Filtres Passe-hauts

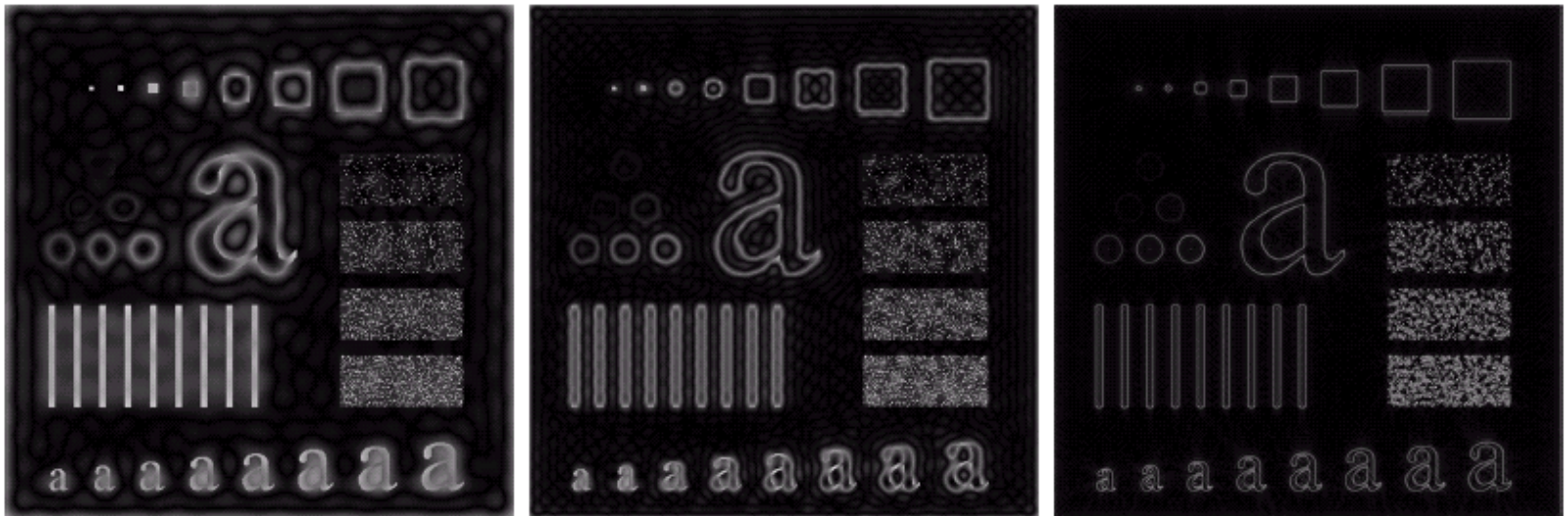


a b c

Spatial representations of typical (a) ideal, (b) Butterworth, and (c) Gaussian frequency domain highpass filters, and corresponding gray-level profiles.

Filtre Passe-haut Idéal

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

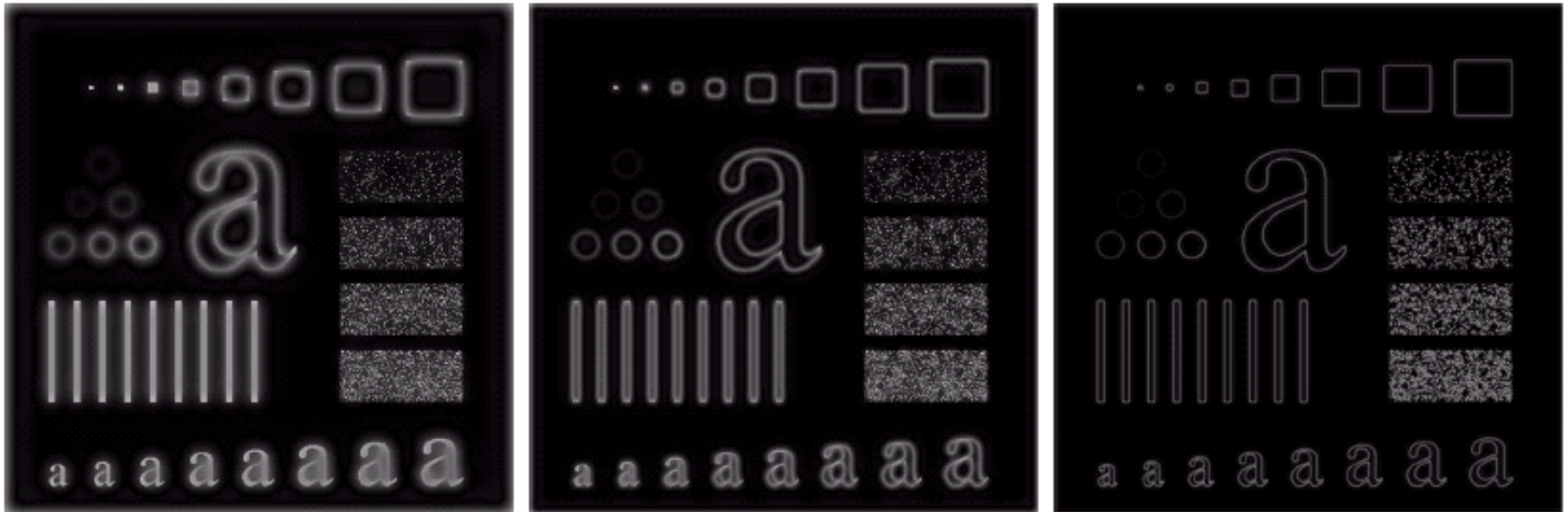


a b c

Results of ideal highpass filtering the image in Fig. 4.11(a) with $D_0 = 15$, 30, and 80, respectively. Problems with ringing are quite evident in (a) and (b).

Filtres de Butterworth Passe-haut

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$



a b c

Results of highpass filtering the image in Fig. 4.11(a) using a BHPF of order 2 with $D_0 = 15$, 30, and 80, respectively. These results are much smoother than those obtained with an ILPF.

Filtre Gaussien Passe-haut

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$



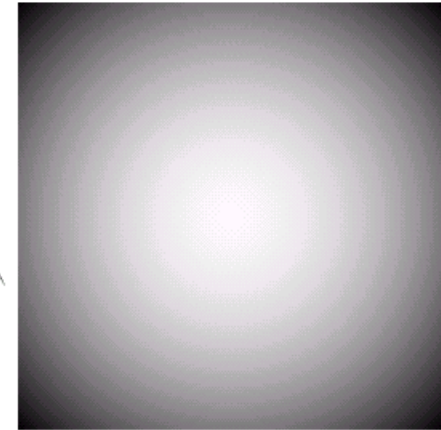
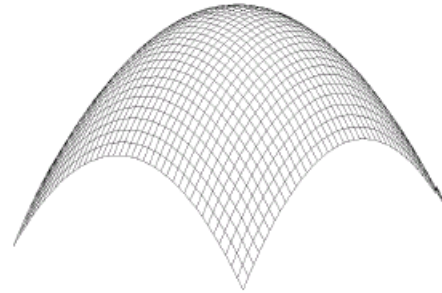
a b c

Results of highpass filtering the image of Fig. 4.11(a) using a GHPF of order 2 with $D_0 = 15$, 30, and 80, respectively. Compare with Figs. 4.24 and 4.25.

Le Laplacien dans le Domaine Fréquentiel

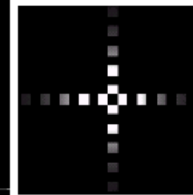
- Le filtre Laplacien

$$H(u, v) = -(u^2 + v^2)$$



- Décalage du centre:

$$H(u, v) = -\left[\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2 \right]$$



0	1	0
1	-4	1
0	1	0



- a) Image
- b) Résultats d'Images filtrées par le Laplacien

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

où

$\nabla^2 f(x, y)$: le Laplacien - image filtrée dans le domaine spatial

Affichage seulement

