

## Modélisation du moteur asynchrone à cage

Les principes généraux des commandes vectorielles des machines triphasées, synchrones et asynchrones, restent identiques mais avec des spécificités selon les technologies utilisées de construction et de régulation.

Ces contrôles permettent une amélioration du temps de réponse et la qualité du couple mais conduisent à des commandes relativement complexes c'est le cas d'une commande vectorielle d'une machine alimentées en tension et régulée en courant sur le référentiel de Park d-q. Pour cela, il faut aborder les deux types de modélisation, le modèle de la machine dans le référentiel de Park, qui sera utile pour la commande à flux orienté et le modèle d'état qui sera utilisé dans la synthèse des observateurs.

La modélisation est l'outil de la simulation, elle permet de prendre en charge d'une façon efficace, les problèmes qui traitent le comportement dynamique et la dépendance du temps, à l'aide d'une description paramétrique détaillée du processus. Un modèle de la machine est utilisé dans le but d'étudier les propriétés et les caractéristiques internes que présente la machine dans les différents régimes de fonctionnement, transitoire et permanent.

### Modélisation triphasée du moteur asynchrone

La machine asynchrone triphasée dont nous allons étudier la mise en équation correspond à la structure de principe représentée par la figure- 1, où les phases sont montées en étoile et sont accessibles par la plaque à bornes et mises en court-circuit pendant le régime permanent . L'angle  $\theta$  est l' écart angulaire entre une phase statorique et la phase rotorique correspondante.

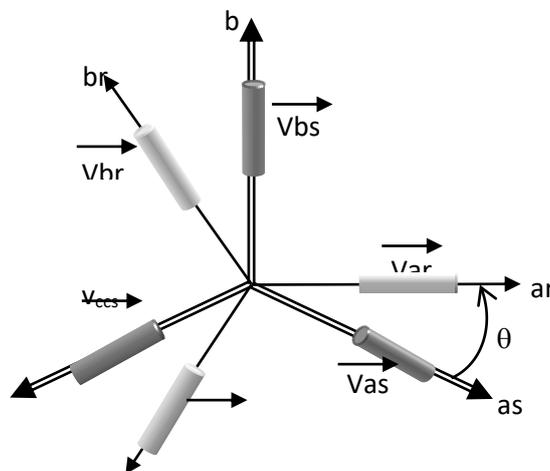


Fig. 1. Représentation schématique d'une machine asynchrone

Une bonne commande en boucle fermée doit s'appuyer sur un modèle mathématique du processus à régler ou à asservir. Dans ce cas on utilise un modèle de la machine asynchrone qui décrit le comportement dynamique des différentes grandeurs concernées par le système de contrôle (couple électromagnétique, flux magnétique, courants et tensions, etc.)

La mise sous forme d'un modèle mathématique n'est pas une opération simple, aussi on doit s'imposer quelques hypothèses simplificatrices:

- ❖ Absence de saturation dans le circuit magnétique.
- ❖ L'entrefer est d'épaisseur uniforme.
- ❖ La répartition des f.é.m. est parfaitement sinusoïdale
- ❖ L'effet de la température sur les résistances est négligeable
- ❖ Les pertes magnétiques sont négligeables
- ❖ Parfaite symétrie de construction
- ❖ Les inductances propres sont des constantes et les inductances mutuelles ne dépendent que de la position des enroulements
- ❖ Assimilation de la cage à un bobinage en court-circuit de même nombre de phases que le bobinage statorique
- ❖ L'hystérésis et les courants de Foucault sont négligeables
- ❖ L'effet de peau qui augmente les résistances et réduit les inductances est négligeable

Dans le cadre de ces hypothèses et pour une machine équilibrée et montée en étoile on distingue trois types d'équations qui définissent entièrement son comportement à savoir: les équations électriques, magnétiques et mécaniques.

### **Equations électriques :**

La loi de Faraday nous permet d'écrire l'équation suivante:

$$V = R.i + \frac{d}{dt} \Phi$$

En appliquant la loi de Faraday à chaque enroulement de la machine on obtient l'équation pour chaque phase comme suit:

## 1. Modèle électrique d'une phase :

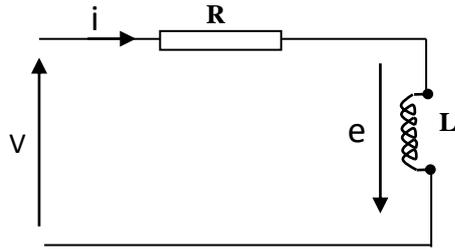


Fig.2. Modèle électrique d'une phase

$$\begin{cases} V = Ri - e \\ e = -\frac{d\phi}{dt} \\ V = Ri + \frac{d\phi}{dt} = Ri + L\frac{di}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

A partir de ce modèle on déduit l'ensemble des équations électriques de la machine:

### Les équations liées au stator :

$$\begin{cases} V_{as} = R_{as}i_{as} + \frac{d\phi_{as}}{dt} \\ V_{bs} = R_{bs}i_{bs} + \frac{d\phi_{bs}}{dt} \\ V_{cs} = R_{cs}i_{cs} + \frac{d\phi_{cs}}{dt} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} V_{as} \\ V_{bs} \\ V_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{as} & 0 & 0 \\ 0 & R_{bs} & 0 \\ 0 & 0 & R_{cs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{as} \\ \phi_{bs} \\ \phi_{cs} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ou bien:

$$[V_{sabc}] = [R_{sabc}][i_{sabc}] + \frac{d}{dt} [\phi_{sabc}] \quad (4)$$

### Les équations liées au rotor :

$$\begin{cases} V_{ar} = R_{ar}i_{ar} + \frac{d\phi_{ar}}{dt} = 0 \\ V_{br} = R_{br}i_{br} + \frac{d\phi_{br}}{dt} = 0 \\ V_{cr} = R_{cr}i_{cr} + \frac{d\phi_{cr}}{dt} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} V_{ar} \\ V_{br} \\ V_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ar} & 0 & 0 \\ 0 & R_{br} & 0 \\ 0 & 0 & R_{cr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{ar} \\ \phi_{br} \\ \phi_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[V_{rabc}] = [R_{rabc}][i_{rabc}] + \frac{d}{dt} [\phi_{rabc}] = [0] \quad (7)$$

Tel que :

$$R_{as} = R_{bs} = R_{cs} = R_s$$

$$R_{ar} = R_{br} = R_{cr} = R_r$$

$R_s$  : résistance propre d'une phase statorique;  $R_r$  : résistance propre d'une phase rotorique.

### Equations magnétiques:

Tenant compte des hypothèses que nous avons présenté ci-dessus, conduisent à des relations linéaires entre le flux et les courants, ceci d'une part, d'autre part, chaque flux comporte une interaction avec les courants de toutes les phases y compris la sienne, alors l'équations électromagnétique finalement aura l'allure suivante (exemple phase A statorique):

$$\phi_{as} = L_s \cdot I_{as} + m_s \cdot I_{bs} + m_s \cdot I_{cs} + m_1 \cdot I_{ra} + m_3 \cdot I_{rb} + m_2 \cdot I_{rc}; \quad (8)$$

Sachant que dans le moteur il y a 3 phases statorique et 3 trois phases rotoriques, les équations des flux en fonction des courants s'obtiennent à partir de la matrice des inductances. Celle-ci comporte 36 coefficients, non nuls, dont la moitié dépend du temps par l'intermédiaire de l'angle "électrique"  $\theta$ , qui est la

position de la phase rotorique (a) par rapport à la phase statorique (a). L'angle a pour expression:

$$\theta = p.\theta_m \quad (9)$$

où: p: nombre de paires de pôles magnétiques de la machine

$\theta_m$  : position mécanique du rotor par rapport au stator.

Donc la matrice des inductances est la suivante:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{as} \\ \varphi_{bs} \\ \varphi_{cs} \\ \varphi_{ar} \\ \varphi_{br} \\ \varphi_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & m_s & m_s & m_1 & m_3 & m_2 \\ m_s & L_s & m_s & m_2 & m_1 & m_3 \\ m_s & m_s & L_s & m_3 & m_2 & m_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & L_r & m_r & m_r \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_r & L_r & m_r \\ m_2 & m & m_1 & m_r & m_r & L_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{as} \\ I_{bs} \\ I_{cs} \\ I_{ar} \\ I_{br} \\ I_{cr} \end{bmatrix}; \quad (10)$$

où:  $L_s$  : inductance propre d'une phase statoriques;

$L_r$  : inductance propre d'une phase rotorique;

$m_s$  : inductance mutuelle entre deux phases statoriques

$m_r$  : inductance mutuelle entre deux phases rotoriques

$$m_1 = M \cos\theta; \quad m_2 = M \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right); \quad m_3 = M \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right).$$

M: étant la valeur maximale de l'inductance mutuelle entre une phase statorique et une autre rotorique.

La matrice des inductances (10) fait apparaitre quatre sous-matrices et peut être écrite de la manière qui suit:

$$\begin{bmatrix} \phi_s \\ \phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} \quad (11)$$

Telle que :  $[M_{sr}] = [M_{rs}]^t$

avec:

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L_s & m_s & m_s \\ m_s & L_s & m_s \\ m_s & m_s & L_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{os} + L_{os} & -\frac{L_{or}}{2} & -\frac{L_{os}}{2} \\ -\frac{L_{os}}{2} & L_{os} + L_{os} & -\frac{L_{os}}{2} \\ -\frac{L_{os}}{2} & -\frac{L_{os}}{2} & L_{os} + L_{os} \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$[L_r] = \begin{bmatrix} L_r & m_r & m_r \\ m_r & L_r & m_r \\ m_r & m_r & L_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{or} + L_{or} & -\frac{L_{or}}{2} & -\frac{L_{or}}{2} \\ -\frac{L_{or}}{2} & L_{or} + L_{or} & -\frac{L_{or}}{2} \\ -\frac{L_{or}}{2} & -\frac{L_{or}}{2} & L_{or} + L_{or} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$L_{os}, L_{or}$  : inductances de fuite d'une phase statorique et rotorique

$L_{os}, L_{or}$ : inductances d'entrefer statorique et rotorique

La matrice des inductances mutuelles et sa transposée,  $[M_{sr}] = [M_{rs}]^t$  sont représentées ci-dessous:

$$[M_{sr}] = [M_{rs}]^t = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\Pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\Pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{2\Pi}{3}) & \cos\theta & \cos(\theta + \frac{2\Pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\Pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\Pi}{3}) & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

Finalement nous avons:

$$[V_{sabc}] = [R_{sabc}] [I_{sabc}] + \frac{d}{dt} \left( [L_s] [I_{sabc}] + [M_{sr}] [I_{rabc}] \right) \quad (15)$$

$$[V_{rabc}] = [R_{rabc}] [I_{rabc}] + \frac{d}{dt} \left( [L_r] [I_{rabc}] + [M_{rs}] [I_{sabc}] \right) \quad (16)$$

### Equation mécanique :

l'équation fondamentale de la dynamique est:

$$C_{ém} - C_r = J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega \quad (17)$$

- pour une machine à 2P pôles (machine multipolaire) :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J} (C_e - C_r - f\Omega)$$

$$\Omega = \frac{C_{ém} - C_r}{Jp + f} \quad (18)$$

$J$  : moment d'inertie du rotor et des parties tournantes de la machine.

$P$  : nombre de paires de pôles.

$f$  : coefficient des frottements visqueux.

$C_e$  : couple électromagnétique.

$C_r$  : couple de charge.

$\Omega$  : vitesse rotorique du moteur.

$\omega_{méc}$  : vitesse mécanique du moteur.

Les équations précédentes permettent la modélisation de la machine dans le plan « a b c ». Elles peuvent être implantées dans un ordinateur. Par contre, vu la complexité (36 termes pour l'énergie magnétique) de ces équations non linéaires et multi-variables, il est très difficile d'en tirer des stratégies de commande.

### Modélisation de la machine dans un repère d,q:

Les équations (12) et (13) des matrices des inductances mutuelles étant à éléments non constants et les coefficients des équations (15) et (16) sont variables et donc la résolution particulièrement lors de l'étude des phénomènes transitoires. On utilise alors des transformations mathématiques qui permettent de décrire le comportement de la machine à

l'aide d'équations différentielles à coefficients constants. Les transformations utilisées doivent conserver la puissance instantanée et la réciprocité des inductances mutuelles. Ceci permet d'établir une expression du couple électromagnétique dans le repère correspondant au système transformé et qui reste variable pour la machine réelle.

L'utilisation de la transformation de Park, permet de contourner, dans un premier temps, ces problèmes et d'obtenir un système d'équations à coefficient constants ce qui facilite la résolution.

### **Transformation de Park:**

La transformation de Park consiste à remplacer les trois phases statoriques et rotoriques par un système diphasé d'axes d et q. Une matrice de Park  $P(\theta)$ , permet le passage des composantes  $X_{abc}$  du système triphasé aux composantes  $X_{d,q}$  tournant à une vitesse qui dépend des grandeurs statoriques ou rotoriques, soit:

$$\begin{bmatrix} X_d \\ X_q \end{bmatrix} = [P(\theta)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \end{bmatrix} \quad (19)$$

La figure.3 représente le schéma d'une machine asynchrone triphasée et sa machine biphasée équivalente issue de la transformation de Park.

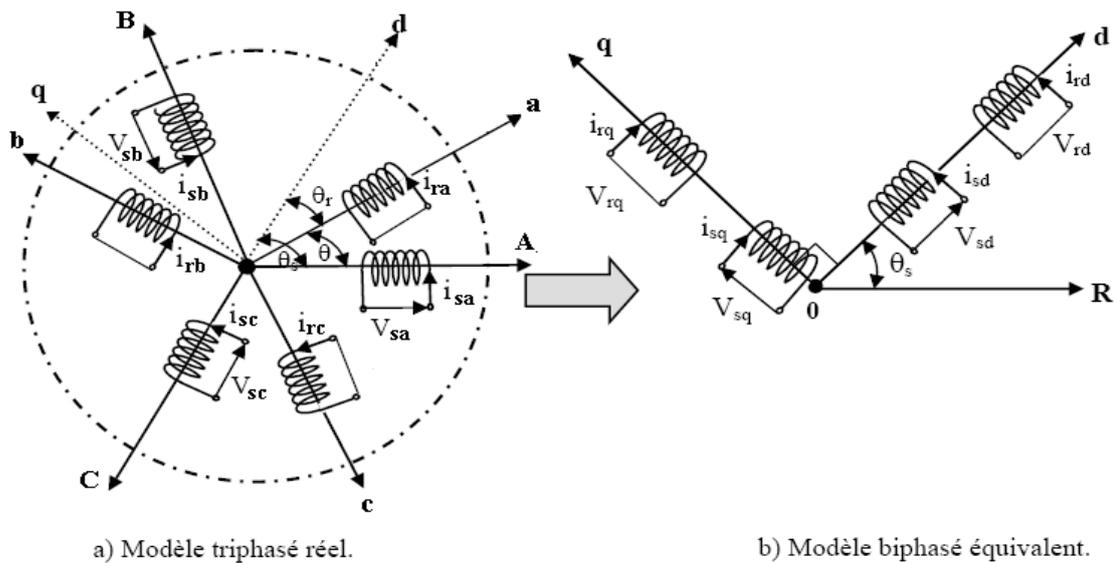


Fig.3. Représentation de la machine asynchrone triphasée et biphasée équivalente

où:  $\theta_s$ : angle entre l'axe direct et l'axe statorique

$\theta_r$ : angle entre l'axe direct et l'axe rotorique

$\theta$  : angle entre l'axe de référence statorique et rotorique.

Pour obtenir donc un système d'équations à coefficients constants, on transforme les trois phases d'axes fixes du stator, comme il est indiqué sur la figure.3, en enroulements équivalents formés de deux bobinages d'axes en quadrature d,q tournant à la vitesse angulaire:

$$\omega_s = \frac{d}{dt} \theta_s$$

De même, pour le rotor aux enroulements a, b, et c, on substitue d,q, tournant à la vitesse:

$$\omega_r = \frac{d}{dt} \theta_r$$

Par rapport au rotor dont la vitesse est  $\omega$ .

La matrice de transformation de Park qui assure l'invariance de la puissance instantanée est la suivante:

$$[P(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

et sa matrice inverse:

$$[P(\theta)]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Finalement on peut écrire:

$$[V_{abc}] = [P(\theta)] [V_{dqo}]$$

La transformation de Park normalisée, appliquée aux courants, tensions et flux, et faisant intervenir l'angle entre l'axe des enroulements et l'axe "d" s'écrit en matricielle:

$$\begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_s \\ \omega_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r \\ \omega_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} \quad (23)$$

### Choix des référentiels:

Il existe différentes possibilités concernant le choix de l'orientation du repère d'axes (d,q), l'étude analytique du moteur asynchrone à l'aide des composantes de Park nécessite l'utilisation d'un repère qui permet de simplifier au maximum les expressions analytiques.

En pratique, Le référentiel est le système "od", "oq" associé à sa vitesse de rotation et il existe trois choix importants possibles et ils se font selon les objectifs de l'application.

Le glissement de vitesse angulaire  $\omega$  est défini par:

$$\omega = \omega_s - \omega_r$$

Parmi les relations que venons d'exposer, les seules dont la transformation soit affectée par le choix du référentiel sont les expressions (22) et (23).

\* En faisant une transformation de Park d'angle  $\theta_s$  (où  $\theta_s$  est l'angle électrique entre l'axe "d" et le stator) pour les grandeurs statoriques, on obtient les grandeurs statoriques  $V_{sd}$ ,  $V_{sq}$ ,  $I_{sd}$  et  $I_{sq}$  relatives aux deux enroulements fictifs  $S_d$  et  $S_q$  tournant à la vitesse angulaire de  $d\theta_s/dt$  par rapport au stator.

\* En faisant une transformation de Park d'angle  $\theta_r$  (où  $\theta_r$  est l'angle électrique entre le rotor et le stator) pour les grandeurs rotoriques, on obtient les courants rotoriques  $I_{rd}$  et  $I_{rq}$  dans les enroulements fictifs  $R_d$  et  $R_q$  tournant à la vitesse angulaire  $d\theta_r/dt$  par rapport au rotor.

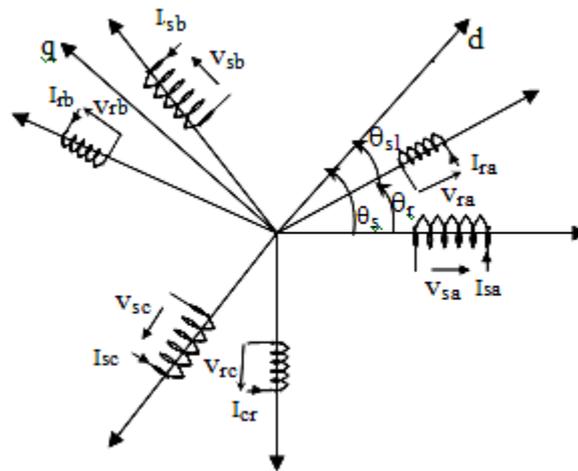


Fig. 4. Définition des angles entre les différents repères quadratiques

On cherche évidemment à ce que  $R_d$  et  $R_q$  tournent à la même vitesse que  $S_d$  et  $S_q$ , pour cela il

faut que: 
$$\theta_s = \theta_r + \theta_{sl} \quad (24)$$

où  $\theta_{sl}$  est l'angle électrique entre l'axe "d" et le rotor.

Les choix possibles, de manière à remplir la condition (24) et ainsi permettre un autopilotage réalisant l'orientation du repère, nous avons:

✚ Repère lié au stator (étude des grandeurs statoriques) et se traduit par les conditions:

$$\frac{d\theta_s}{dt} = 0$$

$$\omega_{sl} = \frac{d\theta_{sl}}{dt} = -\omega_r$$

Les équations électriques dans ce cas prennent la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_r \\ -\omega_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} \quad (26)$$

✚ Repère lié au rotor(étude des grandeurs rotoriques) et se traduit par les conditions:

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_r$$

$$\omega_{sl} = \frac{d\theta_{sl}}{dt} = 0$$

Et les équations seront:

$$\begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r \\ \omega_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} \quad (28)$$

✚ Repère lié au champ tournant(étude de la commande) et se traduit par les conditions:

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_s$$

$$\omega_{sl} = \frac{d\theta_{sl}}{dt} = \omega_s - \omega_r$$

Et les équations auront l'allure suivante:

$$\begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_s \\ \omega_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{sl} \\ \omega_{sl} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} \quad (30)$$

où:  $\omega_s$ : est la pulsation statorique

$\omega_r$ : est la pulsation mécanique

$\omega_{sl}$ : est la pulsation de glissement.

Ce référentiel est le seul qui n'introduise pas de simplification dans la transformation des équations (matrices) (22) et (23), il est souvent utilisé pour résoudre les problèmes de commande.

### Modélisation de la machine alimentée en courant

Pour une machine asynchrone triphasée alimentée en courant, les courants statoriques ( $I_{ds}, I_{qs}$ ), la vitesse de glissement ( $\omega_{sl}$ ) sont considérées comme variables de commande. Le couple résistant ( $C_r$ ) comme perturbation. On choisira le référentiel lié au champ tournant, le modèle de la machine asynchrone triphasée alimentée en courant est représenté par les équations (11), (17) et (23) en supposant que  $V_{dr} = 0$  et  $V_{qr} = 0$ .

#### Equations d'état:

Un système quelconque peut être décrit par différentes variables d'état. Pour une machine asynchrone alimentée en courant, nous pouvons choisir  $(\varphi_{dr}, \varphi_{qr}, \Omega_r)$ ,  $(I_{dr}, I_{qr}, \Omega_r)$  ou  $(\varphi_{ds}, \varphi_{qs}, \Omega_r)$  comme variables d'état.

Considérons tout d'abord les flux rotoriques ( $\varphi_{dr}, \varphi_{qr}$ ) et la vitesse mécanique ( $\Omega_r$ ) comme variables d'état, après arrangement des équations (11), (17) et (23) on aura:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_r} & \omega_{sl} \\ -\omega_{sl} & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Lm}{T_r} \\ \frac{Lm}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} \quad (31)$$

où:  $L_m$ : inductance mutuelle cyclique entre stator et rotor

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}, \quad T_s = \frac{L_s}{R_s} \quad : \text{constante de temps rotorique et statorique}$$

#### Equations mécaniques:

$$\begin{cases} C_e = \frac{p.L_m}{L_r} (\varphi_{dr} I_{qs} - \varphi_{qr} I_{ds}) \\ J \frac{d\Omega_r}{dt} = C_e - C_r - f\Omega_r \end{cases} \quad (32)$$

Choisissons ensuite les courants rotoriques ( $I_{dr}$ ,  $I_{qr}$ ) et la vitesse ( $\Omega_r$ ) comme variables d'état, après arrangement des équations (11), r(17) et (23), nous obtenons:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_r} & \omega_{sl} \\ -\omega_{sl} & \frac{-1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-L_m}{L_r} & 0 \\ 0 & \frac{-L_m}{L_r} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_m}{L_r} \omega_{sl} \\ \frac{-L_m}{L_r} \omega_{sl} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Les équations mécaniques sont identiques à celles données par les formules (32).

Nous pouvons aussi choisir les flux statoriques ( $\varphi_{ds}$ ,  $\varphi_{qs}$ ) et la vitesse mécanique ( $\Omega_r$ ) comme variables d'état, aussi après arrangement des mêmes équations (décrites ci-dessus) on aura:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_r} & \omega_{sl} \\ -\omega_{sl} & \frac{-1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma.L_s & 0 \\ 0 & \sigma.L_s \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_s}{T_r} & -\sigma.L_s \omega_{sl} \\ \sigma.L_s \omega_{sl} & \frac{L_s}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\sigma = 1 - \frac{M_{sr}^2}{L_s . L_r}$$

**Equations mécaniques:**

$$\begin{cases} C_e = p(\varphi_{ds} I_{qs} - \varphi_{qs} I_{ds}) \\ J \frac{d\Omega_r}{dt} = C_e - C_r - f\Omega_r \end{cases} \quad (35)$$

Ce modèle sera utilisé pour simuler la commande vectorielle indirecte.

### Modélisation de la machine alimentée en tension

Pour une machine asynchrone triphasée alimentée en tension, les tensions statoriques ( $V_{ds}$ ,  $V_{qs}$ ) et la vitesse du champ tournant ( $\omega_s$ ) sont considérées comme variables de commande, le couple résistant ( $C_r$ ) comme perturbation. Nous choisissons le référentiel lié au

champ tournant, le modèle de la machine asynchrone triphasée alimentée en tension est déduit des équations (11), (17), (23), (29) et (30) en supposant que:  $V_{dr} = 0$ ,  $V_{qr} = 0$ .

### Equations d'état:

Nous pouvons choisir les courants statoriques, les courants rotoriques et la vitesse mécanique ( $I_{ds}$ ,  $I_{qs}$ ,  $I_{dr}$ ,  $I_{qr}$ ,  $\Omega_r$ ) ou bien les flux statoriques, les flux rotoriques et la vitesse mécanique ( $\varphi_{ds}$ ,  $\varphi_{qs}$ ,  $\varphi_{dr}$ ,  $\varphi_{qr}$ ,  $\Omega_r$ ) ou bien les flux statoriques, les courants statoriques et la vitesse mécanique ( $\varphi_{ds}$ ,  $\varphi_{qs}$ ,  $I_{ds}$ ,  $I_{qs}$ ,  $\Omega_r$ ) comme variables d'état.

Considérons tout d'abord les courants statoriques et rotoriques avec la vitesse mécanique ( $I_{ds}$ ,  $I_{qs}$ ,  $I_{dr}$ ,  $I_{qr}$ ,  $\Omega_r$ ) comme variables d'état, nous aurons:

### Equations électriques:

$$\frac{dX}{dt} = A.X + B.U \quad (36)$$

avec:

$$X = \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \\ I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sigma T_s} & 1 + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega_r & \frac{L_m}{\sigma L_s T_r} & \frac{L_m}{\sigma L_s} \omega_r \\ -(1 + \frac{1-\sigma}{\sigma} \omega_r) & \frac{-1}{\sigma T_s} & -\frac{L_m}{\sigma L_s} \omega_r & \frac{L_m}{\sigma L_s T_r} \\ \frac{L_m}{\sigma L_r T_s} & -\frac{L_m}{\sigma L_r} \omega_r & \frac{-1}{\sigma T_s} & 1 - \frac{1}{\sigma} \omega_r \\ \frac{L_m}{\sigma L_r} \omega_r & \frac{L_m}{\sigma L_r T_s} & -1 + \frac{1}{\sigma} \omega_r & \frac{-1}{\sigma T_s} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ -\frac{L_m}{\sigma L_s L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Les équations mécaniques sont données par les expressions (32).

Choisissons ensuite les flux statoriques, les flux rotoriques et la vitesse mécanique (  $\varphi_{ds}, \varphi_{qs}, \varphi_{dr}, \varphi_{qr}, \Omega_r$  ) comme variables d'état, alors toujours selon les mêmes expressions déjà utilisées nous obtenons:

### Equations électriques:

$$\frac{dX}{dt} = A.X + B.U \quad (40)$$

avec:

$$X = \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \\ \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma.T_s} & \omega_s & \frac{L_m}{\sigma.L_r.T_s} & 0 \\ -\omega_s & -\frac{1}{\sigma.T_s} & 0 & \frac{L_m}{\sigma.L_r.T_s} \\ \frac{L_m}{\sigma.T_r.L_s} & 0 & -\frac{1}{\sigma.T_r} & \omega_{sl} \\ 0 & \frac{L_m}{\sigma.T_r.L_s} & -\omega_{sl} & -\frac{1}{\sigma.T_r} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

### Equations mécaniques:

$$\begin{cases} C_e = \frac{p.L_m}{\sigma.L_s.L_r} (\varphi_{qs}.\varphi_{dr} - \varphi_{ds}.\varphi_{qr}) \\ J \frac{d\Omega_r}{dt} = C_e - C_r - f.\Omega_r \end{cases} \quad (44)$$

Choisissons enfin les flux statoriques, les courants statoriques et la vitesse mécanique (  $\varphi_{ds}, \varphi_{qs}, I_{ds}, I_{qs}, \Omega_r$  ) comme variables d'état, on a donc:

### Equations électriques:

$$\frac{dX}{dt} = A.X + B.U \quad (45)$$

avec:

$$X = \begin{bmatrix} \varphi_{ds} \\ \varphi_{qs} \\ I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_s & -R_s & 0 \\ -\omega_s & 0 & 0 & -R_s \\ \frac{1}{\sigma T_r L_s} & \frac{1}{\sigma L_s} \omega_r & -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_r} \right) & \omega_{sl} \\ -\frac{1}{\sigma L_s} \omega_r & \frac{1}{\sigma T_r L_s} & -\omega_{sl} & -\frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_r} \right) \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Les équations mécaniques sont données par les expressions (35).

### Modèle de la MAS dans le repère $\alpha, \beta$ :

Pour cette étude, nous choisissons un repère (d, q) lié au stator ou ( $\alpha, \beta$ ). Donc, on prend en considération:

$$\omega_r = 0 \text{ et } \omega_s = -\omega$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} I_{s\alpha} \\ \frac{d}{dt} I_{s\beta} \\ \frac{d}{dt} \phi_{r\alpha} \\ \frac{d}{dt} \phi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left( \frac{R_s}{L_s \sigma} + \frac{(1-\sigma)}{T_r \sigma} \right) & 0 & \frac{(1-\sigma)}{T_r L_m \sigma} & \frac{(1-\sigma)}{L_m \sigma} \omega \\ 0 & -\left( \frac{R_s}{L_s \sigma} + \frac{(1-\sigma)}{T_r \sigma} \right) & -\frac{(1-\sigma)}{L_m \sigma} \omega & \frac{(1-\sigma)}{T_r L_m \sigma} \\ \frac{L_m}{T_r} & 0 & \frac{1}{T_r} & -\omega \\ 0 & \frac{L_m}{T_r} & \omega & \frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \\ \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s \sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s \sigma} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{s\alpha} \\ V_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (49)$$