Application à la résolution des équations différentielles :

Supposons, par exemple que nous désirions résoudre l'équation différentielle suivante :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

La méthode pour rechercher la solution s'énonce comme suit :

1 – traduction des équations temporelles dans l'espace de la place en utilisant le tableau des propriétés fondamentales de la transformation de laplace.

2 – recherche de la solution par simple calcul algébrique.

3 – traduction de la solution dans le temps à l'aide du tableau des transformations des fonctions les plus souvent utilisées.

Souvent le résultat trouvé en 2 n'est pas directement lisible dans le tableau des transformées de Laplace. Souvent c'est un quotient de polynôme en s. La traduction dans l'espace temps à partir du tableau est difficile, voir impossible. On préfère donc décomposer la solution en une somme de fonctions connues.

$$\frac{Num(s)}{Den(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s + p_i} \qquad (3)$$

Où :

p_i : sont les racines des dénominateurs.

Chacun des termes de la somme (3) se trouve dans le tableau des transformées des fonctions usuelles et ont sait que la somme est conservée par la transformée de Laplace. On obtient donc une expression temporelle sous forme de combinaison linéaire de signaux simples.

Exemple 1 :
Soit à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = \frac{3}{2}\sin 2t$$

avec :

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 2$$

En utilisant la transformation de Laplace, on obtient :

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{3}{s^2+4}$$

$$Y(s)\left[s^2+1\right] - s - 2 = \frac{3}{s^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2+1} + \frac{3}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}$$

On décompose le deuxième rapport de $Y(s)$ en éléments simples :

$$\frac{3}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)} = \frac{A_1}{s^2+1} + \frac{A_2}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}$$

On obtient :

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}$$

A partir de la table des transformées de Laplace, on obtient :

$$
{}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \ \text{os}\, t
$$

$$
?^{-1}\left[\frac{3}{s^2+1}\right] = \ \sin t
$$

$$
{}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\ \text{in}\, 2t
$$

Finalement :

$$
y(t) = \cos t + 3\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t
$$

Exemple 2 :
Soit à résoudre le système d'équations suivante :

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx(t)}{dt} \ = \ 2y(t) \ + \ \cos(t) \\
\dfrac{dy(t)}{dt} = \ -x(t) \ + \sin(t)
\end{cases}
$$

Avec :

$x(0) = 1$

$y(0) = 1$

On écrit d'abord le système dans le domaine de Laplace :

$$
\begin{cases}
sX(s) \ - \ x(0) \ = \ 2Y(s) \ + \ \dfrac{s}{s^2+1} \\
sY(s) \ - \ y(0) \ = \ -\mathrm{X}(s) \ + \ \dfrac{1}{s^2+1}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
sX(s) \ - \ 1 \ = \ 2Y(s) \ + \ \dfrac{s}{s^2+1} \\
sY(s) \ - \ 2 \ = \ -\mathrm{X}(s) \ + \ \dfrac{1}{s^2+1}
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{s+4}{s^2+2} + \dfrac{1}{s^2+1} \\ Y(s) = \dfrac{2s-1}{s^2+2} \end{cases}$$

En décomposant $X(s)$ en éléments simples, on obtient :

$$X(s) = \frac{s}{s^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{s^2+1}$$

Selon la table de Laplace on obtient :

$$x(t) = \cos\sqrt{2}\, t + 2\sqrt{2}\, \sin\sqrt{2}\, t + \sin t$$

D'une manière analogue, on détermine $y(t)$:

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+2} - \frac{1}{s^2+2} = \frac{2s}{s^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{1}{s^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \frac{2s}{s^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{s^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

D'où :

$$y(t) = 2\cos\sqrt{2}\, t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}\, t$$

Exemple 3 :

Soit à résoudre :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4e^{2t}$$

Avec :

$$y(0) = -3$$

$$y'(0) = 5$$

Sous forme de Laplace, on aura :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{'}(0) - 3sY(s) + y(0) + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$s^2Y(s) + 3s - 5 - 3sY(s) - 9 + 2Y(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$Y(s)\left[s^2 - 3s + 2\right] + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{4}{\left(s^2-3s+2\right)\left(s-2\right)} + \frac{14-3s}{s^2-3s+2} = -\frac{3s^2+20s-24}{\left(s-1\right)\left(s-2\right)^2}$$

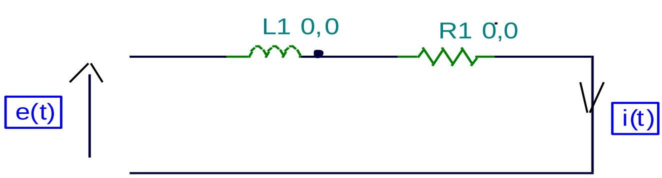
$$= \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{\left(s-2\right)^2}$$

En utilisant la table de Laplace:

$$y(t) = ?^{-1}\left[\frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{\left(s-2\right)^2}\right] = - \quad e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

Exemple 4 :

On veut conna î re le courant $i(t)$ d'un circuit RL auquel on applique une tension $e(t) = A_0u(t)$.



On écrit b d'abord l'équation du circuit :

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri\ (t)\ =e\ (t)$$

On l'a traduit dans l'espace de Laplace :

$$LsI(s)+RI(s)=E(s)$$

Avec:

$$E(s)=\frac{A_0}{s}$$

On exprime le courant en fonction de la tension :

$$I(s)=\frac{1}{Ls+R}E(s)=\frac{A_0}{s\left(Ls+R\right)}=\frac{A_0}{R}\frac{b_0}{\left(s-b_0\right)}$$

A l'aide du tableau de Laplace, on obtient :

$$i(t)=\frac{A_0}{R}\left(1-e^{-b_0t}\right)$$

Forme générale de la fonction de transfert :

L'une des propriétés fondamentales de la transformation de Laplace est qu'elle permet de caractériser tout système ou élément linéaire par une fonction caractéristique dans le domaine s, ce qui est impossible avec les équations temporelles.

On considère un système linéaire dont les grandeurs d'entrées et de sorties sont liées par une équation différentielle à coefficients constants, soit :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + ... + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) =$$
$$a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + ... + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

Où : $a_0, ..., a_n$ $et\, b_0, ..., b_m$ étant des constantes.

Si l'on admet que le système est initialement au repos, en utilisant les propriétés de la transformation de Laplace, il vient :

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + ... + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) =$$
$$b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + ... + b_1 X(s) + b_0 X(s)$$

En mettant $Y(s)\ et\ X(s)$ en facteur :

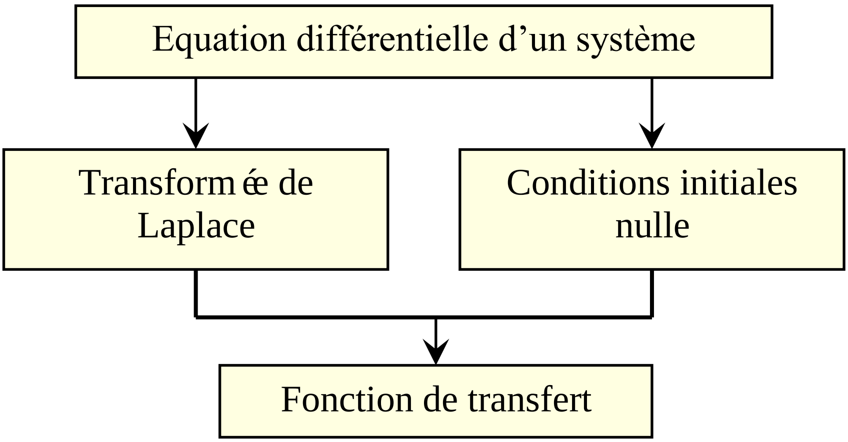
$$Y(s)\left[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0\right] = X(s)\left[b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 + b_0\right]$$

D'où l'on tire immédiatement un rapport de deux polynômes de la variable s :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{Q(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{j=0}^{n} a_j s^j}$$

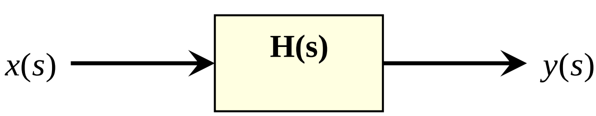
$H(s)$ est appelée transmittance ou fonction de transfert. C'est un rapport de deux polynômes $N(s)$ et $Q(s)$ lorsque les conditions initiales sont nulles.
Par conséquent :



Ainsi, le quotient des grandeurs de sortie et d'entrée exprimées dans l'espace de Laplace est appelé fonction de transfert. Sa valeur est obtenue par le quotient des polynômes en s formés par les coefficients de l'équation caractéristique.

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Cette expression permet de représenter graphiquement la relation de cause à effet entre ces deux variables



Déterminant les racines des polynômes du numérateur $N(s)$ et du dénominateur $Q(s)$, la fonction de transfert s'écrit :

$$H(s) = k\frac{(s-z_1)(s-z_2).........(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2).........(s-p_n)} = k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

Où :

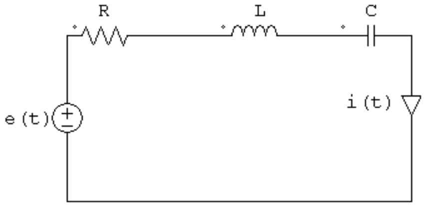
$k = \frac{b_m}{a_n}$

- Les z_i sont appelés les zéros de la fonction de transfert
- Les p_j appelés les pôles de la fonction de transfert

Dans un système physique, le degré m du polynôme dénominateur sera toujours supérieur ou égal au degré n du polynôme numérateur.

Remarque :
Les fonctions de transfert ne sont pas toutes des expressions algébriques rationnelles.

Exemple 1 :
On veut déterminer la fonction de transfert du réseau électrique RLc , on suppose que le courant $i(t)$ est la grandeur de sortie et la tension $e(t)$ est la grandeur d'entrée.



L'équation qui caractérise la relation entre la tension e (t) et le courant i(t) s'écrit :

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + R(t)i(t) + \frac{1}{c}\int i(t)dt$$

Sous forme de Laplace, on aura :

$$E(s) = LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{cs} I(s)$$

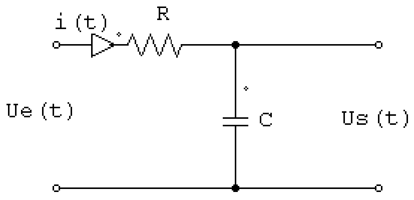
Alors:

$$E(s) = I(s)\left[Ls + R + \frac{1}{cs} \right]$$

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{cs}}$$

Exemple 2 :
Soit le réseau électrique suivant, on désire déterminer la fonction de transfert sachant que :
$u_e(t)$ est le signal d'entrée et $u_s(t)$ est le signal de sortie.



Soit :

$$u_e(t) = Ri(t) + u_s(t)$$
$$u_s(t) = \frac{1}{c} \int i(t) dt$$

Sous la forme de Laplace :

$$U_e(s) = RI(s) + U_s(s)$$
$$U_s(s) = \frac{1}{cs} I(s) \Rightarrow I(s) = U_s cs$$

Par consequent,

$$U_e(s) = RcsU_s(s) + U_s(s)$$
$$U_e(s) = U_s(s)\left[Rcs + 1\right]$$
$$H(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{Rcs+1}$$

Dans le cas où le système ne part pas du repos, on est amené à appliquer le théorème de la dérivation sous sa forme générale, cela donne :

$$U_s(s) = H(s)U_e(s) + V_s(s)$$

Où: $V_s(s)$: terme complémentaire dû aux conditions initiales.

Différentes formes d'écriture de la fonction de transfert :

Selon les besoins des calculs des systèmes, on utilisera des formes de fonction de transfert mieux adaptées, qui se prête facilement à l'analyse temporelle ou fréquentiel des systèmes asservis.
Soit la fonction de transfert d'un système sous la forme initiale suivante :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} \qquad (4)$$

S'il y a un pôle à l'origine de multiplicité α, on peut modifier la représentation (4)
Comme suit :

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 + b_0}{\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0\right)s^\alpha} = \frac{N(s)}{s^\alpha Q(s)}$$

On conclue que le système décrit par la fonction de transfert $H(s)$ compte α intégration.

1) Forme de Bode :
On exprime d'abord les racines de chaque polynôme :

$$H(s)=k\frac{(s-z_1)(s-z_2).........(s-z_m)}{s^{\alpha}(s-p_1)(s-p_2).........(s-p_n)};\quad avec\quad k=\frac{b_m}{a_n}$$

Lorsque les racines des polynômes sont réelles, on met en facteur les coefficients de chaque polynôme et on exprime leurs constantes de temps.

$$H(s)=\frac{k\prod_{i=1}^{m}-z_i\prod_{i=1}^{m}\left(-\frac{s}{z_i}+1\right)}{s^{\alpha}\prod_{j=1}^{n}-p_j\prod_{j=1}^{m}\left(-\frac{s}{p_j}+1\right)}$$

Si l'on pose :

$$k_B=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(-p_j)}$$

$$H(s)=\frac{k_B}{s^{\alpha}}\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(-\frac{s}{z_i}+1\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(-\frac{s}{p_j}+1\right)}$$

En posant : $\tau_{N_i}=-\frac{1}{z_i}\quad et\quad \tau_{D_j}=-\frac{1}{p_j}$ les constantes de temps.

La forme de Bode de la fonction de transfert :

$$H(s)=\frac{k_B}{s^{\alpha}}\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1+s\tau_{N_i}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1+s\tau_{D_j}\right)} \qquad (5)$$

Avec :

k_B : est appelé gain de Bode est par définition le coefficient du numérateur de (5). C'est le gain du système en régime permanent.

2) forme d'Evans :

Pour cette forme, on met en évidence les coefficients supérieurs de chaque polynôme et on exprime leurs racines :

$$H(s)=k\frac{(s-z_1)(s-z_2).........(s-z_m)}{s^{\alpha}(s-p_1)(s-p_2).........(s-p_n)};\quad avec \quad k=\frac{b_m}{a_n}$$

$$H(s)=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)s^{\alpha}}$$

Exemple :

Soit le système décrit par l'équation différentielle du 1er ordre suivante :

$$b_1\frac{dy(t)}{dt}+b_0y(t)=a_0x(t)$$

Sous l'espace de Laplace :

$$b_1 sY(s) + b_0 Y(s) = a_0 X(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_0}{b_0 + b_1 s}$$

α = 0 : aucune intégration

Posons :

$k = \frac{a_0}{b_1}$, il devient :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{\frac{b_0}{b_1} + s}$$

On note l'existence d'une seule racine au dénominateur (1 pôle) :

$$p_1 = -\frac{b_0}{b_1}$$

La fonction de transfert sous forme d'Evans sera :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{s - p_1}$$

A présent le gain de Bode k_B :

$$H(s) = \frac{k}{(-p_1)\left(1 - \frac{s}{p_1}\right)}$$

Soit: $k_B = \frac{k}{p_1} = \frac{a_0}{b_0}$: gain de Bode

Et : $\tau_1 = \dfrac{1}{s_1}$: constant du temps du système :

La fonction de transfert sous la forme de Bode sera :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k_B \frac{1}{1 + s\tau_1}$$

Transformation des schémas fonctionnels :

Habituellement, les systèmes asservis sont représentés par des schémas fonctionnels assez compliqués, il peut comporter un nombre important de blocs et de boucles. Pour construire la réponse à une entrée test et analyser l'évolution du système, il est important de préciser la fonction de transfert qui relie d'une part la grandeur principale de sortie et la grandeur principale d'entrée.

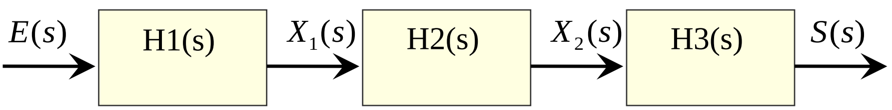
De ce fait, on est amené à appliquer un certain nombre de règles permettant de simplifier le schéma fonctionnel.

La forme canonique des schémas fonctionnels est un moyen de réduire ces derniers en un schémas beaucoup plus simple à étudier tout en utilisant les lois d'associations des éléments reliés soit en série, soit en parallèle. Cette forme nous permet d'obtenir une fonction de transfert du système sous une forme simple et facile à étudier.

En pratique, il existe trois modes de connexion des éléments composant le système asservi.

Connexion en série :

On appelle connexion en série, un système composé de plusieurs éléments tell que la sortie de l'un constitue l'entrée du suivant.



Chaque élément est caractérisé par sa fonction de transfert :

$$H_1(s) = \frac{X_1}{E(s)} \quad ; \quad H_2(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \quad ; \quad H_3(s) = \frac{S(s)}{X_2(s)}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} X_1(s) &= H_1(s) \cdot E(s) && (1) \\ X_2(s) &= H_2(s) \cdot X_1(s) && (2) \\ S(s) &= H_3(s) \cdot X_2(s) && (3) \end{aligned}$$

En remplaçant (1) dans (2)

$$X_2(s) = H_2(s) \cdot H_1(s) \cdot E(s) \qquad (4)$$

Puis (4) dans (3) on obtient:

$$S(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s) \cdot E(s)$$

D'où la fonction de transfert reliant l'entrée principale à la sortie principale :

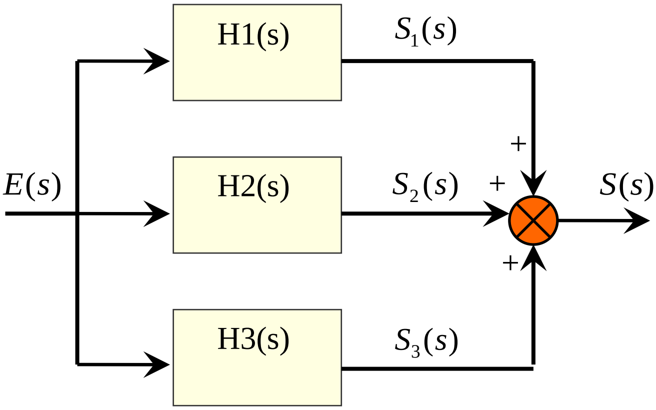
$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s)$$

La fonction de transfert d'un système composé de plusieurs éléments en série est le produit de toutes les fonctions de transfert des éléments en série.

$$H(s) = \prod_{i=1}^{n} H_i(s)$$

Connexions en parallèle :

On appelle une connexion en parallèle, un système composé de plusieurs éléments de telle sorte que la grandeur d'entrée est la même pour tout les éléments et la grandeur de sortie est la somme des grandeurs de sortie de chaque élément.



Chaque élément est caractérisé par sa fonction de transfert :

$$H_1(s) = \frac{S_1(s)}{E(s)}$$

$$H_2(s) = \frac{S_2(s)}{E(s)}$$

$$H_3(s) = \frac{S_3(s)}{E(s)}$$

On peut écrire :

$$S_1(s) = H_1(s) \cdot E(s)$$

$$S_2(s) = H_2(s) \cdot E(s)$$

$$S_3(s) = H_3(s) \cdot E(s)$$

La sortie principale est déterminée par la relation suivante:

$$
\begin{aligned}
&S(s) = S_1(s) + S_2(s) + S_3(s) \\
&D'o?: \\
&\qquad S(s) = H_1(s) \cdot E(s) + H_2(s) \cdot E(s) + H_3(s) \cdot E(s)
\end{aligned}
$$

La fonction de transfert sera égal à :

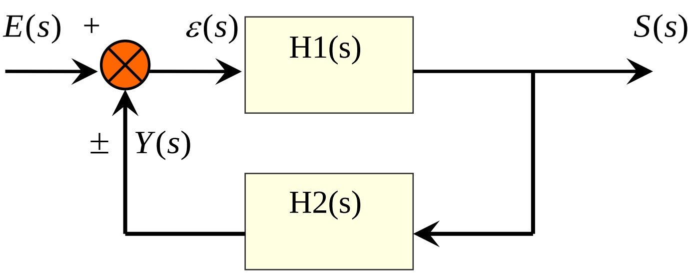
$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)$$

Par conséquent, la fonction de transfert d'un système composé de plusieurs éléments en parallèles est la somme des fonctions de transfert de chaque élément.

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n} H_i(s)$$

Connexion en opposition parallèle :

Soit le schéma fonctionnel représentant une connexion en opposition parallèle.



La connexion en opposition parallèle est composée principalement par une chaîne d'action et une chaîne de réaction (positive ou négative).
Où :
$H_1(s)$: est la fonction de transfert de la chaîne d'action

$H_2(s)$: est la fonction de transfert de la chaîne de réaction.

Les fonctions de transfert de chaque élément sont :

$$H_1(s) = \frac{S(s)}{\varepsilon(s)}$$
$$H_2(s) = \frac{Z(s)}{S(s)}$$
$$et \;\; \varepsilon(s) = E(s) \pm Z(s)$$

On peut écrire :

$$S(s) = H_1(s) \cdot \varepsilon(s) \qquad (a)$$
$$\varepsilon(s) = E(s) \pm Z(s) \qquad (b)$$
$$Z's) = H_2(s) \cdot S(s) \qquad (c)$$

En remplaçant (c) dans (b) puis (a) dans (b), on obtient:

$$S(s) = H_1(s)\left[E(s) \pm \left(H_2(s) \cdot S(s)\right)\right]$$

La fonction de transfert du système sera égale à :

$$S(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{H_2(s)}{1 \mp H_1(s) \cdot H_2(s)}$$

t

Nous remarquons que le numérateur est composé essentiellement des fonctions de transfert de la chaîne d'action ou directe et le dénominateur forme une somme entre l'unité et la fonction de transfert de la chaîne ouverte de ce système lorsque la chaîne de retour est de signe négative.

Toute fois, lorsque la chaîne de retour est positive, le dénominateur sera plutôt la différence entre ces deux termes.

La forme générale de la fonction de transfert d'une connexion en opposition parallèle sera :

$$H(s)=\frac{S(s)}{E(s)}=\frac{D(s)}{1\mp T(s)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}H_{iaction}(s)}{1\mp\prod_{i=1}^{n}H_{iaction}(s)\cdot\prod_{j=1}^{m}H_{jretour}(s)}$$

$D(s)$: Fonction de transfert de la chaîne directe

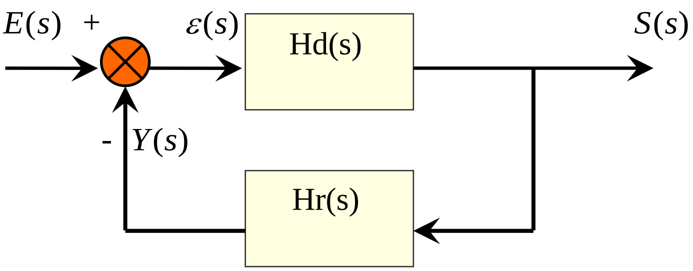
$T(s)$: Fonction de transfert du système ouvert

$H_{iaction}(s)$: Les fonctions de transfert des éléments en série de la chaîne d'action.

$H_{jretour}(s)$: Les fonctions de transfert des éléments en série de la chaîne de retour.

Réduction d'un système en un système à retour unitaire :

Généralement, l'étude d'un système asservi se ramène à celle d'un système à retour unitaire. Habituellement la mesure de la grandeur de sortie est modifiée par une certaine fonction de transfert $H_r(s)$ différente de l'unité.



Avec :

$$H(s)=\frac{S(s)}{E(s)}=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)\cdot H_2(s)} \qquad (1)$$

L'intérêt de dette considération résulte dans la possibilité de rendre cette structure de système à retour non unitaire en un système à retour unitaire.

L'expression (1) peut être écrite de la manière suivante :

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)\cdot H_2(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{H_2(s)}$$

$$d'o?:$$

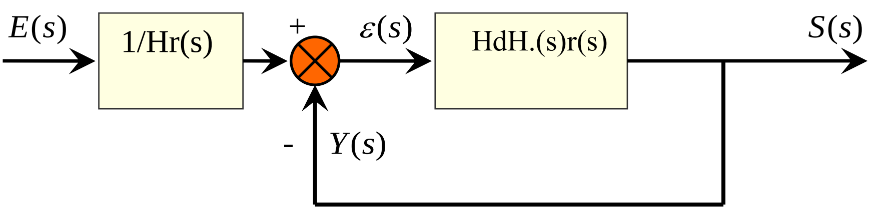
$$H(s) = \left[\frac{H_1(s)\cdot H_2(s)}{1 + H_1(s)\cdot H_2(s)}\right] \cdot \frac{1}{H_2(s)}$$

$$avec: \quad H(s) = H_d(s)\cdot H_b(s)$$

$$H_d(s) = \frac{H_1(s)\cdot H_2(s)}{1 + H_1(s)\cdot H_2(s)}$$

$$et \;\; H_b(s) = \frac{1}{H_2(s)}$$

Graphiquement, on obtient.

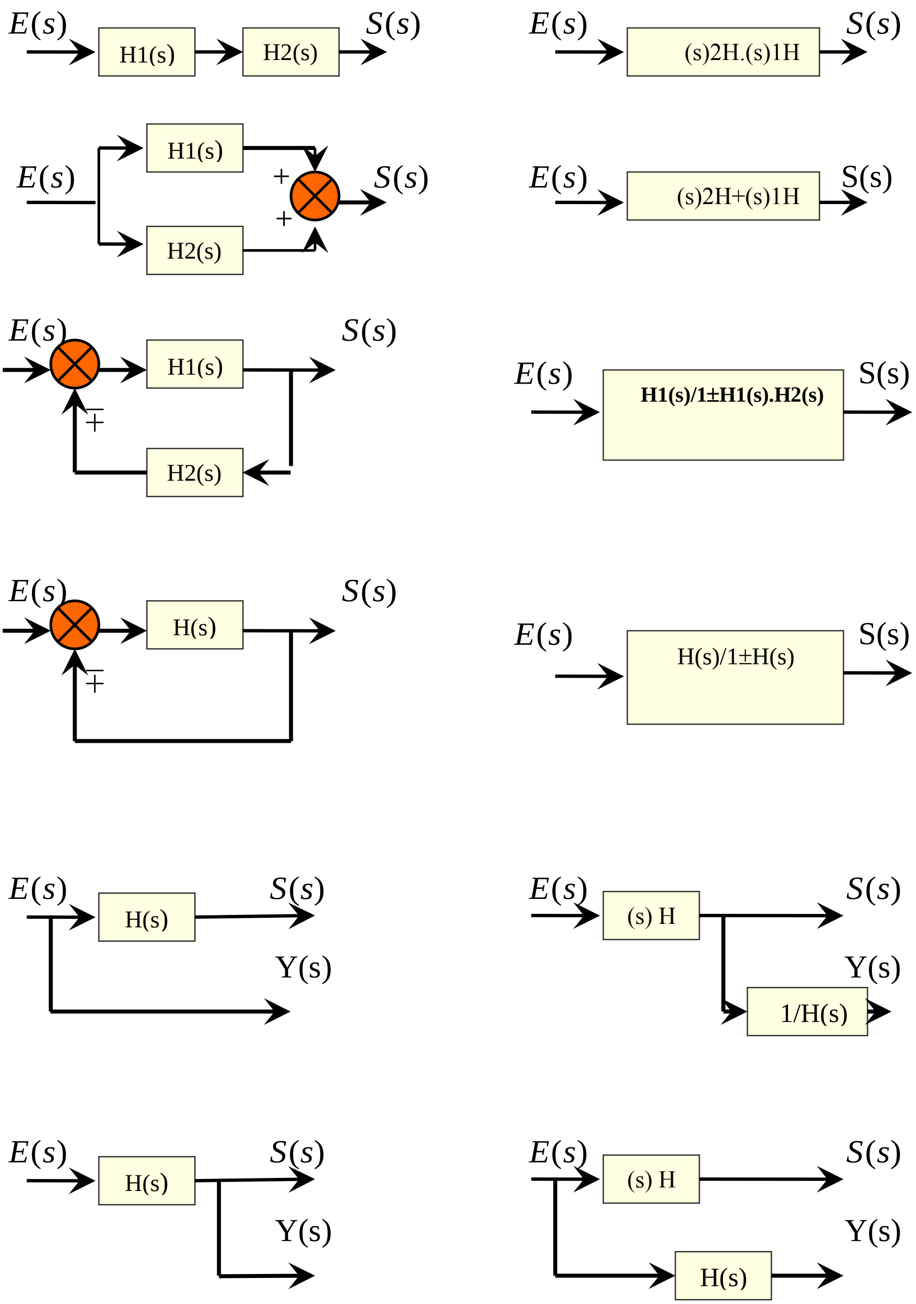


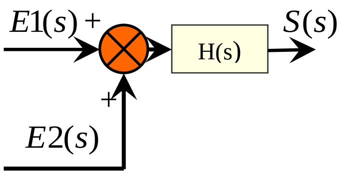
Les deux fonctions de transfert des deux schémas fonctionnels fig30 et 31 sont exactement identiques.

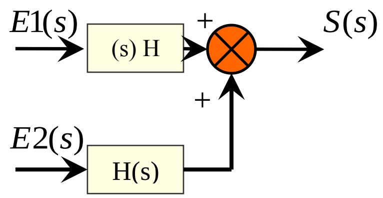
Les règles sur les schémas fonctionnels :

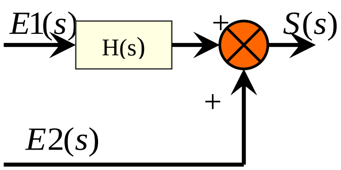
En pratique, il faut toujours veiller à réduire les schémas fonctionnels compliqués en une représentation la plus simple possible.

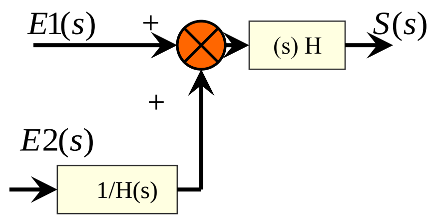
Nous représentons ci dessous quelques règles de simplification des schémas fonctionnels.

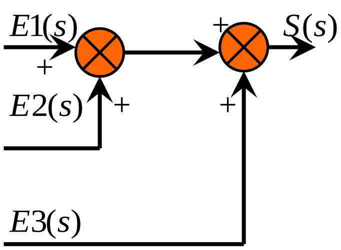


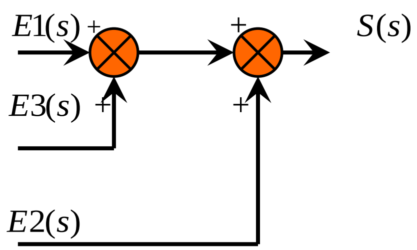

E1(s) +
H(s)
S(s)
+
E2(s)

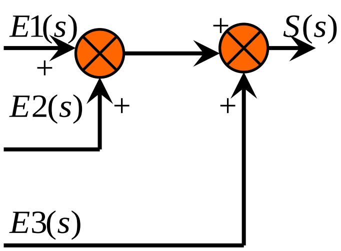

E1(s)
(s) H
+
S(s)
+
E2(s)
H(s)

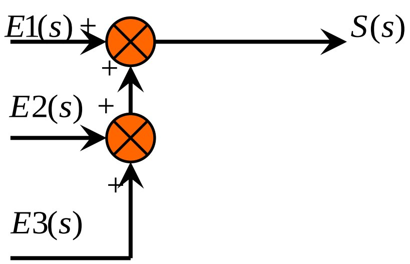

E1(s)
H(s)
+
S(s)
+
E2(s)


E1(s)
+
(s) H
S(s)
+
E2(s)
1/H(s)

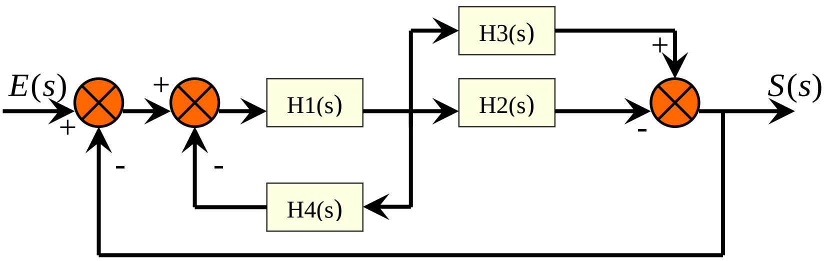

E1(s)
+
+
S(s)
E2(s)
+
+
E3(s)


E1(s) +
+
S(s)
E3(s)
+
+
E2(s)

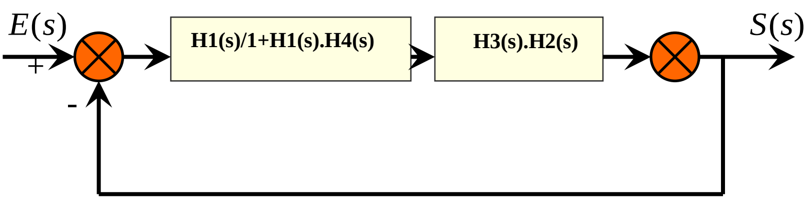

E1(s)
+
+
S(s)
E2(s)
+
+
E3(s)


E1(s) +
S(s)
+
E2(s)
+
+
E3(s)

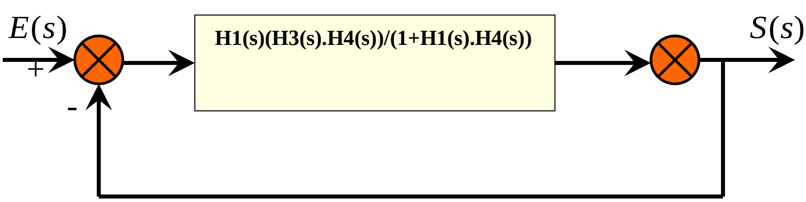
Exemple 1:
On désire ramener le schéma fonctionnel suivant à la forme la plus simple:



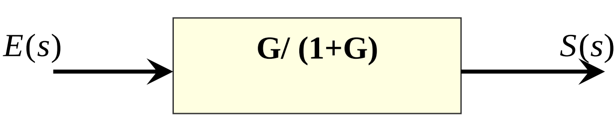
Etape1 :
Il faut toujours commencer par simplifier les boucles intérieures pour arriver aux boucles extérieures.



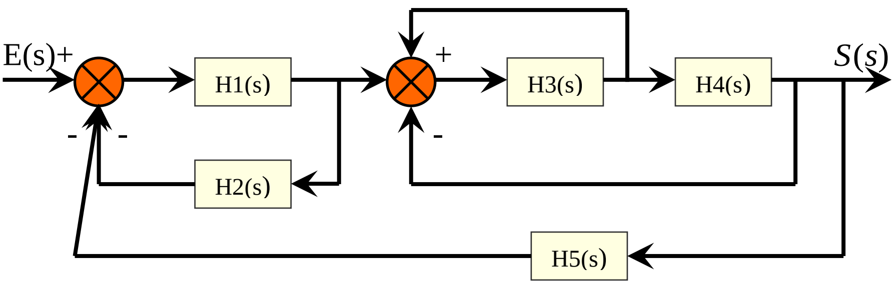
Etape2 :



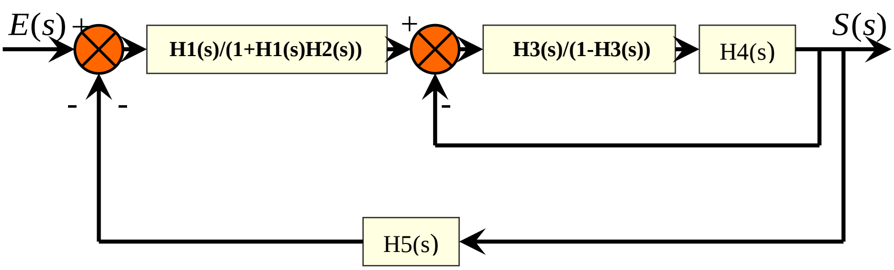
Etape3 :



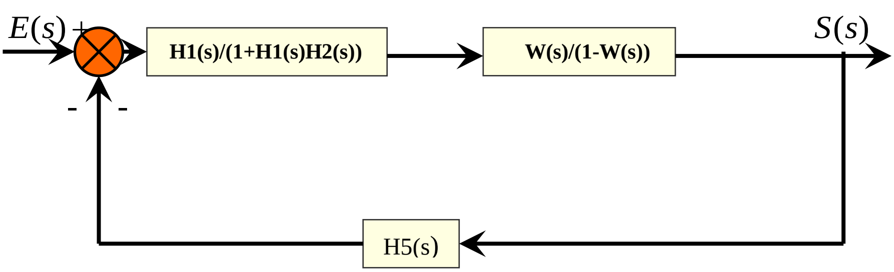
Exemple 2 :
On désire mettre le schéma fonctionnel suivant sous la forme canonique.



Etape1 :



Etape2 :



Etape3 :

$$E(s) \longrightarrow \boxed{\mathbf{G(s).W(s)/\ (1+G(s)W(s)H5(s))}} \longrightarrow S(s)$$

La fonction de transfert du système :

$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \frac{G(s).W(s)}{1 + G(s)W(s)H5(s)}$$