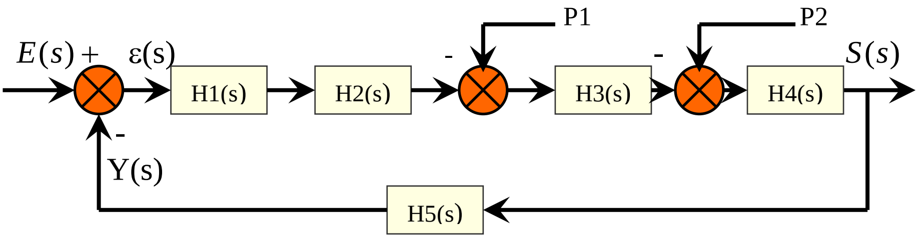
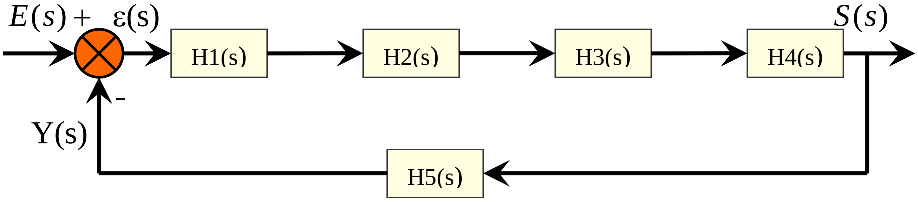
Chapitre III : Fonction de transfert d'un système asservi

Jusqu'à présent, nous avons supposé étudier la réponse des systèmes asservis par rapport à l'entrée principale. Dans ces conditions, on a considéré que les perturbations sont nulles. On a symbolisé le système par un schéma fonctionnel oú on ne fait figurer aucune perturbations. Par conséquent, il faut distinguer l'analyse du système par rapport à l'entrée principale ou par rapport à la perturbation. Selon le principe de superposition, on peut étudier le fonctionnement du système en considérant séparément chaque signal d'entrée. Lorsqu'on considère la perturbation comme signal d'entrée, on suppose dans ce cas, l'entrée principal comme nulle. Soit le schéma fonctionnel représentant un système asservi quelconque figure suivante.



Analyse selon l'entrée principale:

Si l'on vent étudier la réponse du système asservi relative à l'entrée principale $E(s)$. On considère dans ce cas les perturbations P_1 et P_2 nulles. Le schéma fonctionnel deviendra comme suit.

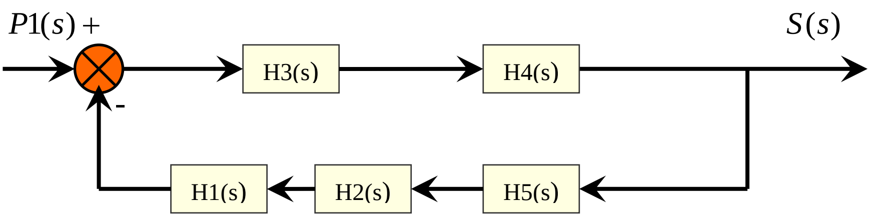


Dans ces conditions et à la lumière des règles de transformation des schémas fonctionnels, la fonction de transfert relative à l'entrée principale sera égale à :

$$H(s) = \frac{H_1(s).H_2(s).H_3(s).H_4(s)}{1 + H_1(s).H_2(s).H_3(s).H_4(s).H_5(s)}$$

Analyse selon la perturbation:

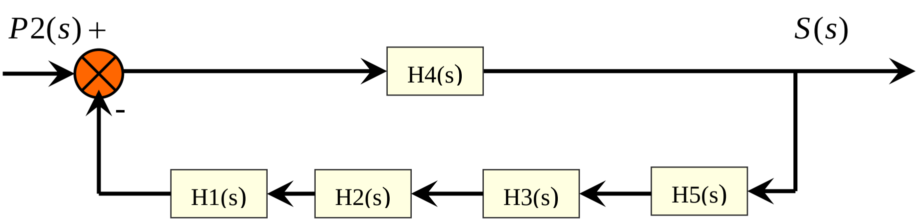
Si l'on veut à présent étudier la réponse du système relative à la perturbation P_1, on considère dans ce cas, l'entrée principale $E(s)$ et la deuxième perturbation P_2 nulle. Le schéma fonctionnel deviendra comme suit.



La fonction de transfert relative à la perturbation sera :

$$H(s) = \frac{H_3(s).H_4(s)}{1 + H_1(s).H_2(s).H_3(s).H_4(s).H_5(s)}$$

D'une manière analogue, si on veut étudier la réponse relative à la deuxième perturbation P_2, on considère alors que l'entrée principale $E(s)$ et la première perturbation $P_1(s)$ comme nulles. Le schéma fonctionnel deviendra :

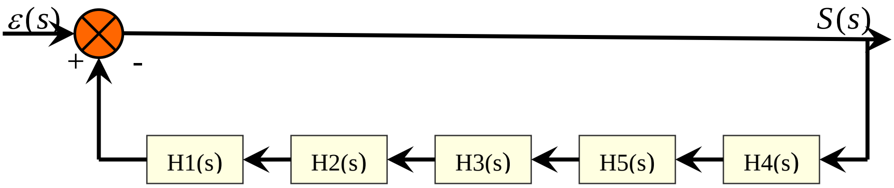


La fonction de transfert sera :

$$H(s)=\frac{H_4(s)}{1+H_1(s).H_2(s).H_3(s).H_4(s).H_5(s)}$$

Analyse selon l'erreur:

Nous allons maintenant déterminer la réponse du système en considérant comme sortie principale l'erreur $\varepsilon(s)$. Le schéma fonctionnel sera comme suit.



La fonction de transfert sera égale à:

$$H(s)=\frac{1}{1+H_1(s).H_2(s).H_3(s).H_4(s).H_5(s)}$$

On peut remarquer que toutes les fonctions de transfert possédant le même dénominateur : $1+H_1(s).H_2(s).H_3(s).H_4(s).H_5(s)$

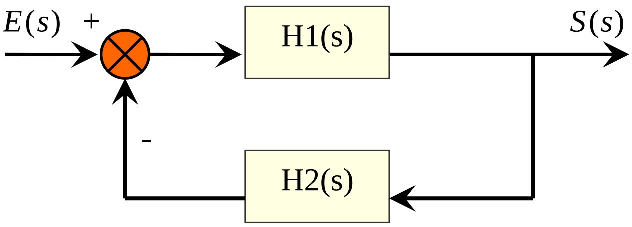
Ceci caractérise les propriétés propres du système quelque soient les signaux d'entrées. En autre l'équation :

$$1+H_1(s).H_2(s).H_3(s).H_4(s).H_5(s)$$

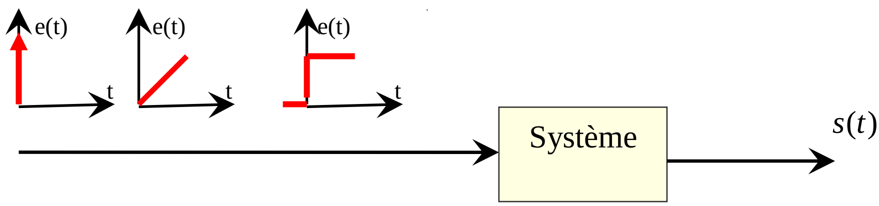
Est appelée équation caractéristique du système asservi

Relation entre la fonction de transfert et les réponses aux entrées tests :

Considérons le système asservi représenté par le schéma fonctionnel suivant.



On veut étudier maintenant la réponse du système relative à l'entrée principale pour les différentes entrées d'essai.



Où:

$$H(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s).H_2(s)}$$

a) utilisons d'abord comme signal d'entrée, l'échelon unité :

$$e(t)=u(t)=1$$

$$H(s)=\frac{S(s)}{E(s)} \quad avec: E(s)=U(s)=\frac{1}{s}$$

$$S(s)=H(s).E(s)=\frac{H(s)}{s} \Rightarrow H(s)=s.S(s)$$

Ce résultat montre que la fonction de transfert n'est que la transformée de Laplace de la dérivée de la réponse unitaire.

b) d'une manière analogue, utilisons l'impulsion unité comme entrée d'essai :

$$e(t) = \delta(t)$$
$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} \quad avec : E(s) = \delta(s) = 1$$
$$S(s) = H(s).E(s) \Rightarrow H(s) = S(s)$$

Pour une impulsion unité, la fonction de transfert n'est que la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

c) utilisons à présent le signal rampe comme entrée d'essai :

$$e(t) = r(t) = t$$
$$H(s) = \frac{S(s)}{E(s)} \quad avec : E(s) = R(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$S(s) = H(s).E(s) \Rightarrow H(s) = s^2.S(s)$$

La fonction de transfert n'est que la transformée de Laplace de la dérivée seconde de la réponse à une rampe.

Systèmes fondamentaux :

Introduction :

L'analyse temporelle d'un système quelconque peut dans de très nombreux cas être approximée par un système du 1^{er} ordre ou du second ordre.

Nous allons présenter dans ce chapitre l'étude de ces deux systèmes fondamentaux : le système du premier ordre (simple dérivation) et le système du second ordre (double dérivation).

Système du 1^{er} ordre :

Définition:

Un système d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ est du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

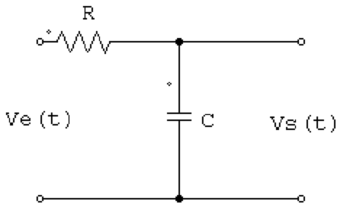
Où :

k est le gain du système

τ est la constante du temps

Exemples de système du 1er ordre :

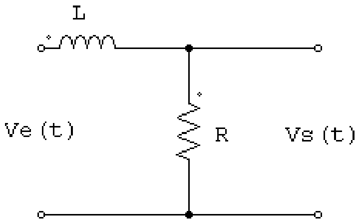
a) circuit RC



La relation entre $v_s(t)$ et $v_e(t)$:

$$Rc\frac{dv_s(t)}{dt}+v_s(t)=v_e(t)$$

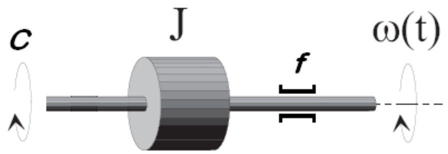
b) circuit RL



L'équation différentielle entre $v_s(t)$ et $v_e(t)$:

$$\frac{L}{R}\frac{dv_s(t)}{dt}+v_s(t)=v_e(t)$$

c) Système mécanique :



$$\frac{J}{f}\frac{d\omega(t)}{dt}+\omega(t)=\frac{C_m(t)}{f}$$

Où :

J : Moment d'inertie.

f : Coefficient de frottement.

C_m : Couple moteur.

Réponses aux entrées tests :

Soit l'équation générale sous la forme canonique :

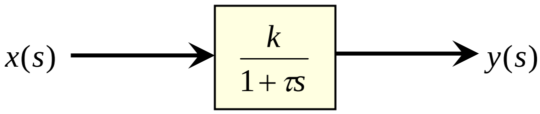
$$\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t)$$

Si les conditions initiales sont nulles $y(0)=0$, la transformée de Laplace de cette expression est :

$$\tau sY(s)+Y(s)=kX(s)$$

La fonction de transfert du système est alors :

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k}{1+\tau s}$$



a) Réponse impulsionnelle :

La réponse impulsionnelle est la réponse à une entrée de type impulsion $\delta(t)$.

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow \pounds\left[\mathrm{x(t)}\right]$$

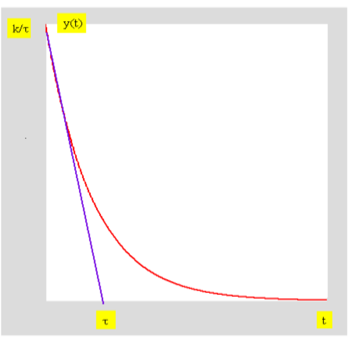
La sortie $Y(s)$ sera égale à :

$$Y(s) = \frac{k}{1+\tau s} X(s) = \frac{k}{1+\tau s} = \frac{\frac{k}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+s}$$

Dans le domaine temps, la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$y(t) = \pounds^{-1}\left[\frac{\frac{k}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+s}\right] = \left[\frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right] u(t)$$

La représentation sous forme graphique sera :



b) Réponse indicielle :

La réponse indicielle est obtenue pour une entrée échelon unité :

Soit :

$$x(t) = u(t) \Rightarrow £\left[\mathrm{x(t)}\right] = X(s) = \frac{1}{s}$$

La sortie à donc pour expression :

$$Y(s) = \frac{k}{1+\tau s} X(s) = \frac{k}{(1+\tau s)s}$$

Pour déterminer la réponse temporelle, il est préférable de décomposer l'expression de la sortie sous forme de Laplace en éléments simples dont la transformée de Laplace inverse est facile à définir (formes usuelles).

Décomposition en éléments simples :

Méthode de fonction simples : (méthode parmi plusieurs).

Si $Y(s)$ se présente sous la forme d'un rapport de deux polynômes dont le dénominateur est de degré égal ou supérieur à celui du numérateur.

$$Y(s) = \frac{A_{11}}{(s-s_1)^n} + \frac{A_{12}}{(s-s_1)^{n-1}} + ... + \frac{A_{1n}}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \frac{A_3}{s-s_3}$$

Où : s_1 est un pole multiple de $Y(s)$ de multiplicité n;

s_2, s_3 sont des pôles simples de $Y(s)$

Les différents coefficients de la décomposition se calculent suivant les relations suivantes :

$$A_{11} = \left| \left(s - s_1 \right)^n Y(s) \right|_{s=s_1}$$

$$A_{12} = \left| \frac{d}{ds} \left[\left(s - s_1 \right)^n Y(s) \right] \right|_{s=s_1}$$

$$A_{13} = \left| \frac{1}{3} \frac{d^2}{ds^2} \left[\left(s - s_1 \right)^n Y(s) \right] \right|_{s=s_1}$$

L’absence d’un pole multiple simplifie encore la décomposition

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + ... + \frac{A_n}{s - s_n}$$

Où : $s_1, s_2, ..., s_n$ sont des pôles simples

Avec:

$$A_1 = \left| \left(s - s_1 \right) Y(s) \right|_{s=s_1}$$

$$A_2 = \left| \left(s - s_2 \right) Y(s) \right|_{s=s_2}$$

$$A_n = \left| \left(s - s_n \right) Y(s) \right|_{s=s_n}$$

Dons notre cas on a:

$$Y(s) = \frac{k}{\left(1 + \tau s\right) s} = \frac{A_1}{1 + \tau s} + \frac{A_2}{s}$$

On trouve:

$$A_1 = -k\tau$$

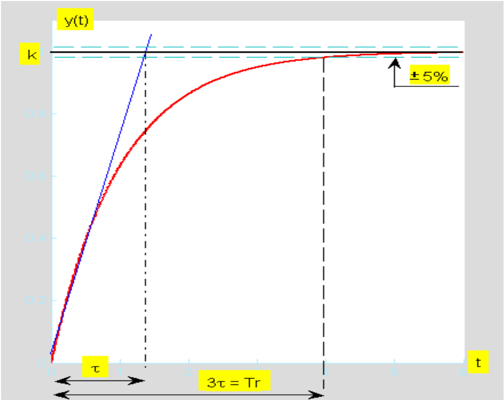
$$A_2 = k$$

$$Y(s) = \frac{k}{s} - \frac{k\tau}{1 + \tau s}$$

La transformée inverse de Laplace donne :

$$y(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$$

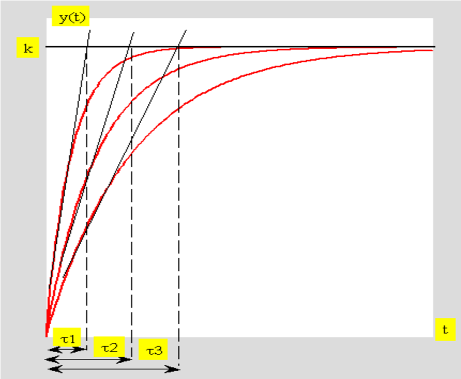
La représentation graphique de la réponse indicielle généralisée sera:



Notons que si le gain k est différent de 1 alors, il existe un écart entre les amplitudes d'entrée et de sortie en régime établi. On admet généralement une erreur de l'ordre de $\pm 5\%$ de la valeur desirée.
Etudions quelque caractéristique de cette réponse pour :

$$t = \tau \; ; \; y(t) = k\left(1 - e^{-1}\right) = 0.63k$$
$$t = 3\tau ; \; y(t) = k\left(1 - e^{-3}\right) = 095k$$

Il faut remarque que le temps qui correspond au temps ou le système atteint son régime définitif à ±5% est appelé temps de réponse T_r, il est égal à environ 3 fois la constantes de temps τ .
La figure suivante présente la réponse de plusieurs systèmes du premier ordre de même gain k et de différentes constantes de temps τ .



Où :

$$\tau_3 \succ \tau_2 \succ \tau_1$$

Nous constatons que τ caractérise la rapidité du système à atteindre son régime permanent. Plus le système atteint son régime permanent rapidement. Nous voyons que pour une constante de temps très petite, la réponse se rapproche de ce que serait celle d'un système idéal ou $y(t) = kx(t)$

Réponse à une rampe unitaire :

La rampe $r(t)$ est l'intégrale de la fonction échelon unité

Soit :

$$x(t) = r(t) = t \;\Rightarrow \pounds\left[\mathrm{x(t)}\right] = X(s) = R(s) = \frac{1}{s^2}$$

La sortie a pour expression :

$$Y(s) = \frac{k}{1+\tau s} X(s) = \frac{k}{(1+\tau s)s^2}$$

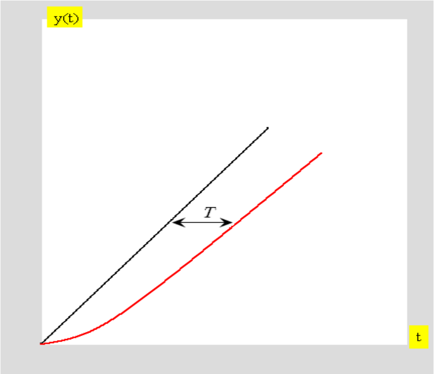
Une décomposition en éléments simples mous donne :

$$Y(s) = \frac{k}{(1+\tau s)s^2} = \frac{k}{s^2} + \frac{k\tau}{s} + \frac{k\tau^2}{1+\tau s}$$

D’ou la réponse temporelle :

$$y(t) = k\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

La représentation graphique est :



En calculant le signal d’erreur entre la valeur d’entrée et celle de sortie pour $k = 1$, on obtient :

$$\varepsilon(t) = \lim_{t \to \infty}\big(x(t) - y(t)\big) = \lim_{t \to \infty}\left(\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)$$

On obtient : $\varepsilon(t) = \tau$

On remarque ainsi que la sortie n’arrivera jamais à rattraper la rampe. On observe que la rampe d’entrée est atteinte par la sortie avec un retard τ .

Système du 2^{eme} ordre :

Définition :

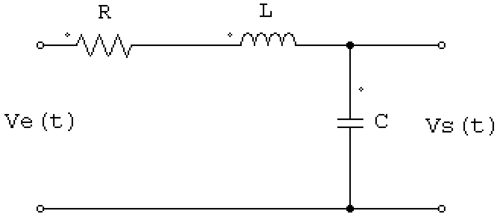
Un système physique d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ est du 2^{eme} ordre, s'il est régi par une équation différentielle du 2 eme ordre à coefficients constants.

$$b_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_0 x(t)$$

Où : $b_2, b_1, b_0, et\ a_0$ sont les coefficients de l'équation différentielle

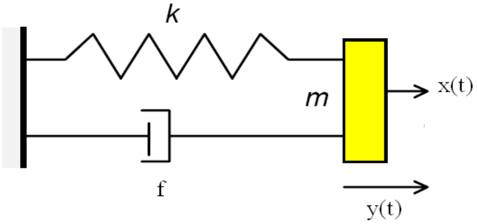
Exemples de systèmes du 2^{eme} ordre :

a) Circuit RLC :



$$Lc \frac{d^2v_s(t)}{dt^2} + Rc \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t)$$

b) Système mécanique:



$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+f\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=x(t)$$

La fonction de transfert est alors (conditions initiales nulles)

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{a_0}{b_2s^2+b_1s+b_0}$$

La fonction de transfert d'un système du second ordre peut également être factorisée en faisant apparaître des paramètres particuliers.

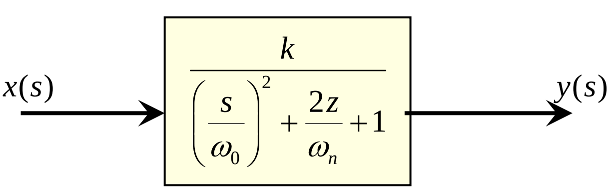
$$H(s)=\frac{k}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2+\frac{2z}{\omega_n}s+1}$$

Où:

$k=\frac{a_0}{b_0}$: est le gain statique du système (gain en régime permanent)

$\omega_0=\sqrt{\frac{b_0}{b_2}}$: est appelée pulsation libre ou pulsation naturelle ou pulsation propre du système non amortie ($rd/s \succ 0$).

$z=\frac{b_1}{2\sqrt{b_0b_2}}$: est appelé amortissement du système ou facteur d'amortissement.



Réponse aux entrées test

Pour plus de facilité, nous allons déterminer les réponses permanentes pour les entrées en échelon et en rampe. Le régime transitoire sera déterminé à partir de la réponse impulsionnelle. La réponse temporelle correspondant sera définie comme la somme des deux régimes.

a) Régime permanent :

Pour une entrée en échelon unité $x(t) = u(t)$, la réponse permanente est une constante égale au gain statique $k = \frac{a_0}{b_0}$.

$$y_p(t) = ku(t)$$

Pour une entrée en rampe $x(t) = tu(t)$, la réponse permanente est une rampe de pente k, retardée à l'origine de $\Delta t = \frac{2z}{\omega_0}$.

b) Régime transitoire (Réponse impulsionnelle)

L'entrée est définie par $x(t) = \delta(t)$, soit dans le domaine de Laplace $X(s) = 1$.

La sortie a pour expression dans l'espace de Laplace.

$$Y_t(s) = \frac{k}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2z}{\omega_0}s + 1}$$

Pour décomposer la sortie $Y_t(s)$ en éléments simples, il est nécessaire de factoriser le dénominateur en faisant apparaître les racines du polynôme caractéristique :

$$\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2z}{\omega_0}s + 1 = 0$$

On constate que la nature des racines de l'équation caractéristique dépend du signe déterminant :

$$\Delta = \frac{4\left(z^2-1\right)}{\omega_0^2}$$

Ce qui amène à distinguer trois cas en fonction des valeurs du facteur d'amortissement z .

$z \succ 1 : \Delta \succ 0$, le dénominateur possède deux racines réelles distinctes

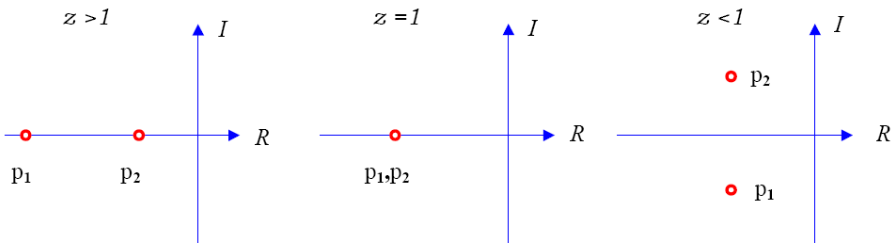
$$s_{1,2} = -z\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{z^2-1}$$

$z = 1 : \Delta = 0$, le dénominateur possède deux racines réelles confondues :

$$s_{1,2} = -\omega_0$$

$z \prec 1 : \Delta \prec 0$, le dénominateur possède deux racines complexes conjuguées :

$$s_{1,2} = -z\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1-z^2}$$



Examinons chacun des cas:

a) $z \succ 1$ **:**

$$s_{1,2} = \omega_0 \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

Si l'on pose:

$$s_1 = \frac{1}{T_1} \quad et \quad s_2 = \frac{1}{T_2}$$

Où $T_1 \ et \ T_2$ sont les constantes de temps.
La réponse se décompose en deux éléments simples :

$$Y_t(s) = \frac{b}{(s - s_1)} + \frac{c}{(s - s_2)}$$

Il vient :

$$y_t(t) = \lambda_1 e^{\left(-\frac{t}{T_1}\right)} + \lambda_2 e^{\left(\frac{t}{T_2}\right)}$$

Le régime transitoire est donc une combinaison linéaire de deux exponentielles du type de celle des systèmes du premier ordre.
Où : $\lambda_1 \ et \ \lambda_2$ sont déterminés à partir des conditions initiales d'ou :

$$\lambda_1 = \frac{kT_1}{T_2 - T_1} \qquad et \qquad \lambda_2 = \frac{kT_2}{T_1 - T_2}$$

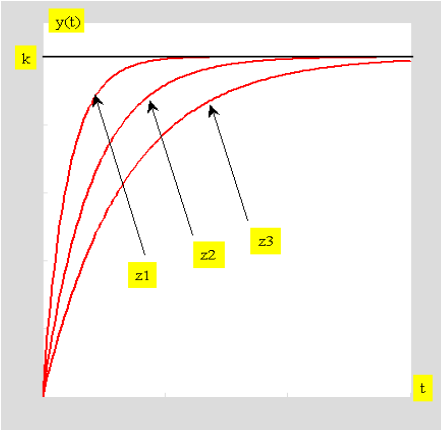
La forme générale du régime transitoire :

$$y_1(t) = k \left[\frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{\left(-\frac{t}{T_1}\right)} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{\left(-\frac{t}{T_2}\right)} \right] u(t)$$

La réponse temporelle complète qui correspond à l'application d'un échelon unité a pour expression :

$$y_t(t) = k\left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{\left(-\frac{t}{T_1}\right)} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{\left(-\frac{t}{T_2}\right)}\right] u(t)$$

Le comportement du système est non oscillant et amorti comme le montre la figure suivante :



Lorsque le coefficient d'amortissement z augmente, la réponse du système devient plus amortie et le temps de réponse augmente.

b) $z \prec 1$:

$$s_{1,2} = \omega_0\left(-z \pm j\sqrt{1 - z^2}\right)$$

On décompose en éléments simples pour aboutir aux formes suivantes :

$$\frac{s + a}{(s+a)^2 + b^2} \quad et \quad \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$$

Dont les transformées inverses sont respectivement

$$e^{(-at)}\cos(bt) \quad et \quad e^{(-at)}\sin(bt)$$

On en déduit la forme générale du régime transitoire :

$$y_t(t) = Ae^{-z\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\ t + arctg\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

Où :

$$A = -\frac{k}{\sqrt{1-z^2}}$$

La réponse dans le domaine temporelle qui correspond à l'application d'un échelon unité s'écrit donc

$$y(t) = k\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\ t+\varphi\right)\right]u(t)$$

Où :

$$\varphi = \left(arctg\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

La réponse du système se compose donc d'un produit d'une sinusoïde de pulsation ω_p dite pseudo – pulsation ou pulsation propre ou amortie :

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-z^2}$$

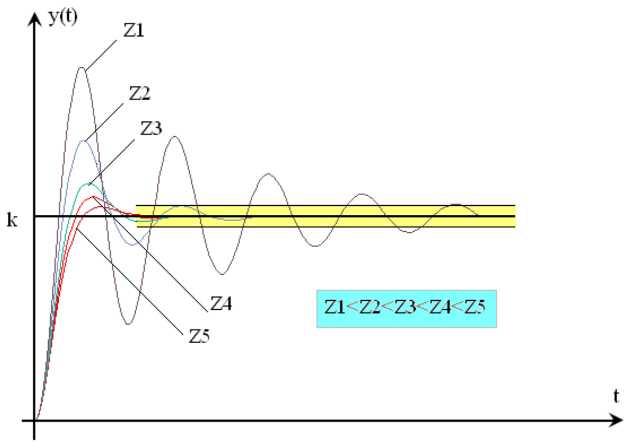
Dont la période T_a appelée pseudo période $T_a = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$ par une exponentielle de constante de temps τ :

$$\tau = \frac{1}{z\omega_0}$$

Les oscillations admettent pour enveloppe les exponentielles

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le comportement du système peut donc être considéré comme oscillant et amorti



On constate que le coefficient d'amortissement, plus il est faible, plus la réponse est oscillante, donc l'amortissement est moins bon.

c) $z = 1$: il y a une racine double

$$s_1 = -z\omega_0$$

Si l'on pose $s_1 = -\frac{1}{T_1}$

En conservant la même méthode de calcul, le régime transitoire s'écrit :

$$y_t(t) = B_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + B_2 t e^{-\frac{t}{T_1}}$$

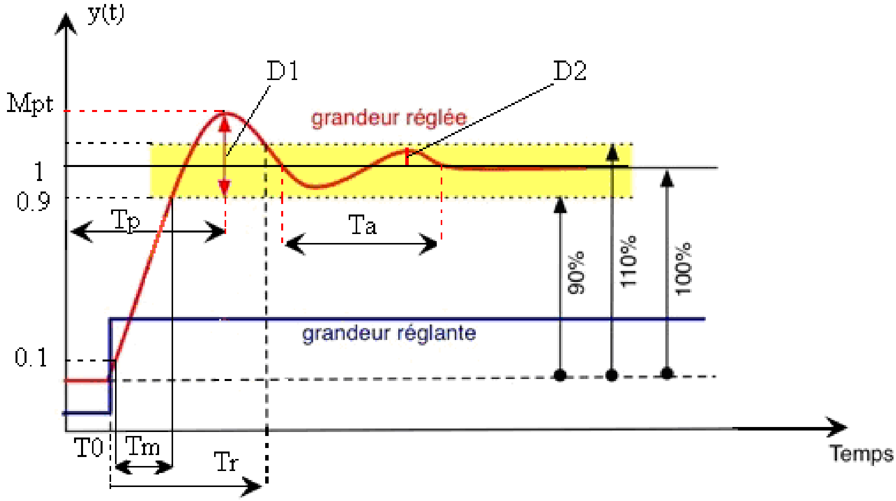
La réponse complète s'écrira :

$$y(t) = k\left[1 - \left(1 + \frac{t}{T_1}\right)e^{-\frac{t}{T_1}}\right]u(t)$$

Le comportement du système est donc non oscillant et amorti. On qualifie souvent de critique la valeur $z = 1$ du fait qu'elle sépare deux cas, $z \succ 1$ et $z \prec 1$, correspondant à deux types différent d'expression mathématique des réponses transitoires.

Particularités du système du 2^eme ordre :

Nous allons expliquer quelques grandeurs caractéristiques, faciles à lire, qui permettent de juger les performances du système du 2^eme ordre. Le coefficient d'amortissement qui est un paramètre très important, caractérise essentiellement l'allure du régime transitoire. Pour un système très amorti ($z \succ 1$), la réponse transitoire à un échelon est pratiquement celle d'un système du 1^er ordre. Pour un système peu amorti, on à une réponse oscillatoire, avec un dépassement D d'autant plus important que z est petit. Le coefficient d'amortissement peut être calculé à partir de la réponse temporelle à un échelon. En effet, si D_1 *et* D_2 désignent les deux dépassements successifs,



$$\frac{D_1}{D_2} = e^{-\frac{2\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} \qquad et \quad D_1 = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

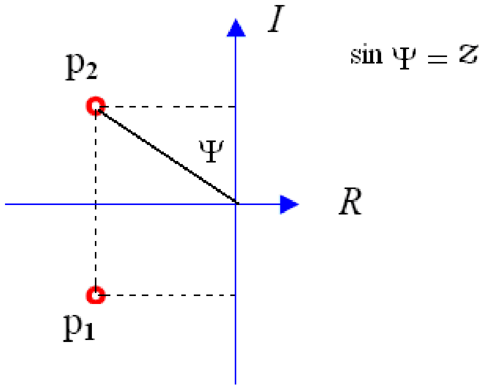
D'où :

$$\log \frac{D_1}{D_2} = -\frac{2\pi z}{\sqrt{1-z^2}}$$, si on pose : $$d = \frac{1}{2\pi} \log \frac{D_1}{D_2}$$

On obtient :

$$z = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}} = \frac{\frac{1}{2\pi}\log\frac{D_1}{D_2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{D_1}{D_2}\right)^2}}$$

D'autre part, lorsque le coefficient d'amortissement est inférieur à l'unité, il peut être lu facilement dans le plan complexe de Laplace : c'est le sinus de l'angle que fait avec l'axe des quantités imaginaires, la droite joignant l'origine aux pôles de la fonction de transfert du système ou bien des racines de l'équation caractéristique.



Pour apprécier la rapidité de réponse du système, on définit généralement trois grandeurs importantes qui sont le temps de monté T_m, le temps de pic T_p et le temps de réponse T_r .

Le temps de montée est le temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale.

$$T_m = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}\left(\pi - ar\cos z\right)$$

Le temps de pic, correspond au temps nécessaire pour atteindre le premier dépassement.

$$T_p = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

Le temps de réponse est le temps au bout duquel la réponse du système atteint cinq pour cent de la valeur finale.

On peut aussi caractériser l'amortissement de la réponse du système par la détermination de la valeur de l'amplitude au temps du premier pic qu'on définit généralement par le rebondissement en régime transitoire M_{pt} .

$$M_{pt} = 1 + D_1 = 1 + e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Pour être acceptable, le rebondissement ne doit pas dépasser un certain pourcentage de la valeur définitive.
On admet habituellement un dépassement de l'ordre de 30%.