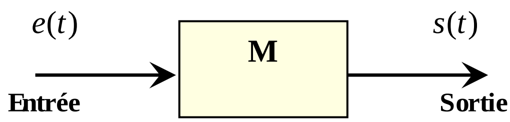
Etude de la réponse :

Régime transitoire et régime permanent :

Soit un système M représenté par l'équation différentielle linéaire a coefficients constants de forme générale :



$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = e(t)$$

$e(t)$ est la fonction d'entrée ou excitatrice dont nous connaissons la forme (échelon unité, impulsion, rampe).
En réalité, $e(t)$ peut comporter comme la première mémoire une succession des dérivées d'ordres m ($m \neq n$).
La résolution de l'équation différentielle linéaire, une fois établie, constitue un pas important dans la compréhension de la réponse, car non seulement, elle nous renseigne sur l'importance de l'erreur statique qu'il est souhaitable de rendre réelle, mais elle nous indique également le comportement du système pendant le régime transitoire.
Pour l'étude de la réponse de l'équation, il faut intégrer l'équation différentielle complète. La solution de cette équation s'effectue par différentes méthodes classiques :

- Méthode des variations des constantes
- Méthode de Cauchy

Elle est la somme de deux contributions :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$s_1(t)$: La solution générale de l'équation sans second membre.

$s_2(t)$: La solution particulière de l'équation avec second membre.

Les n constantes d'intégration étaient déterminées de telle sorte que la solution générale $s_1(t)$ est indépendante de l'entrée $e(t)$ et s'obtient en résolvant d'abord l'équation sans second membre. Lorsque la solution générale tend vers zéro quand $t \to \infty$, il ne subsiste après un temps assez long que la solution particulière $s_2(t)$.

Selon la méthode de variation des constantes, on peut poser que dans la solution générale de l'équation :

$$s_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

Où :

$c_1, c_2, ..., c_n$, sont des constantes d'intégration

Le calcul de la solution particulière considère $c_1, c_2, ..., c_n$ comme fonction du temps : $c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t)$ Détermine a partir de la dérivée de la solution générale $s_1^{'}(t)$. En remplaçant ces fonctions dans $s_1^{'}(t)$ on détermine la solution particulière $s_2(t)$.

Soit l'équation du 1er ordre :

$$\frac{ds(t)}{dt} + a(t)s(t) = f(t) \qquad (1)$$

On résout d'abord l'équation homogène :

$$\frac{ds(t)}{dt} + a(t)s(t) = 0 \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = -a(t)s(t)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = -a(t)s(t) \Rightarrow \frac{1}{c}\ln|s(t)| = -\int_0^t a(\tau)d\tau$$

$$d'où \qquad cs_1(t) = e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

On détermine ensuite la solution particulière :
Soit

$$\overline{s}_1(t) = c(t)e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

$$\overline{s}_1^{'}(t) = c^{'}(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} + c(t)\left[-a(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}\right]$$

Car :

$$\left[e^{g(t)}\right]^{'} = g^{'}(t)\mathrm{e}^{g(t)} \qquad et \qquad \left[\int_0^t g(\tau)d\tau\right]^{'} = g(t)$$

On remplace dans l'expression (1) :

$$c^{'}(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} - c(t)a(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} + a(t)c(t)e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} = f(t)$$

Apres simplification on obtient :

$$c(t) = \int e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} f(t)dt = 0$$

$$\overline{s}_1(t) = \int e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} f(t)dt.e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} = s_2(t)$$

La solution complète sera :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

Exemple :

Soit :

$$\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

Avec :

$$e(t) = u(t) = 1 \quad \textit{échelon unité}$$

a) Solution générale :

$$\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0 \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = -s(t) \Rightarrow \frac{ds(t)}{s(t)} = -dt$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{c}\ln|s(t)| = -\int dt \quad \Rightarrow \quad s_1(t) = ce^{-t}$$

b) Solution particulière :

$$\overline{s}_1(t) = c(t)e^{-t}$$

On remplace dans l'équation initiale :

$$c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} + c(t)e^{-t} = 1$$

On obtient :

$$c'(t)e^{-t} = 1 \Rightarrow c'(t) = e^{t} \Rightarrow c(t) = e^{t}$$

Donc :

$$\overline{s}_1(t) = e^t e^{-t} = 1 = s_2(t)$$

La réponse complète sera :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = 1 + ce^{-t}$$

Si les conditions initiales sont nulles : $s(0) = 0$.

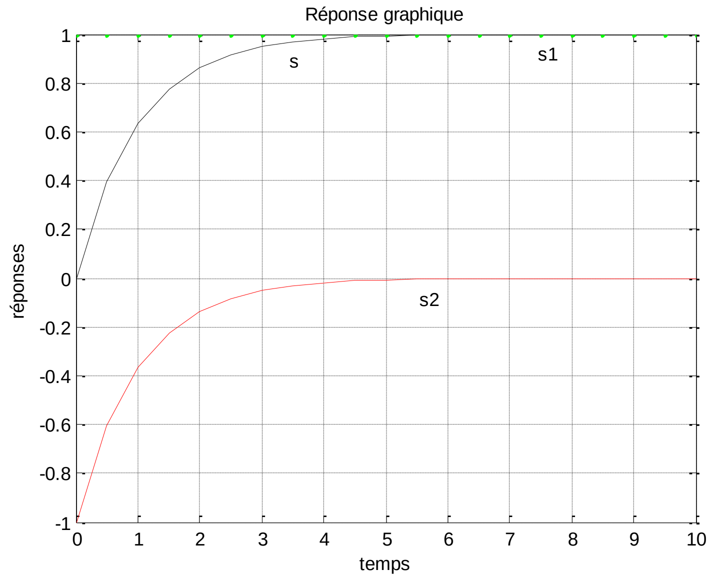
On aura :

$$s(0) = 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

Finalement :

$$s(t) = 1 + e^{-t}$$

D'où l'évolution résultante $s(t)$, représentée sur la figure suivante:



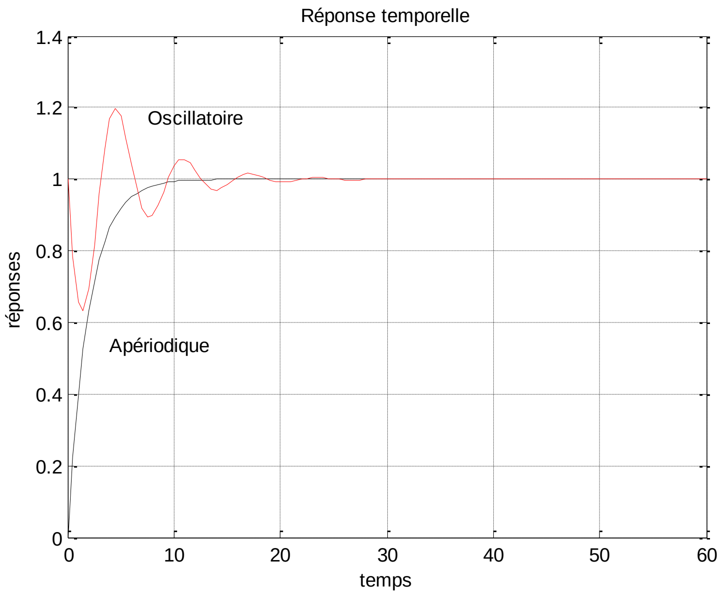
$s_1(t)$ est appelée réponse transitoire ou réponse libre du système, elle dépend des conditions initiales du système physique stable.
Généralement, elle s'annule au bout d'un certain temps.

$$\lim_{t \to \infty} s_1(t) = 0$$

$s_2(t)$ est le régime permanent ou la réponse forcée, il est de même nature que celui appliquée a l'entrée du système.

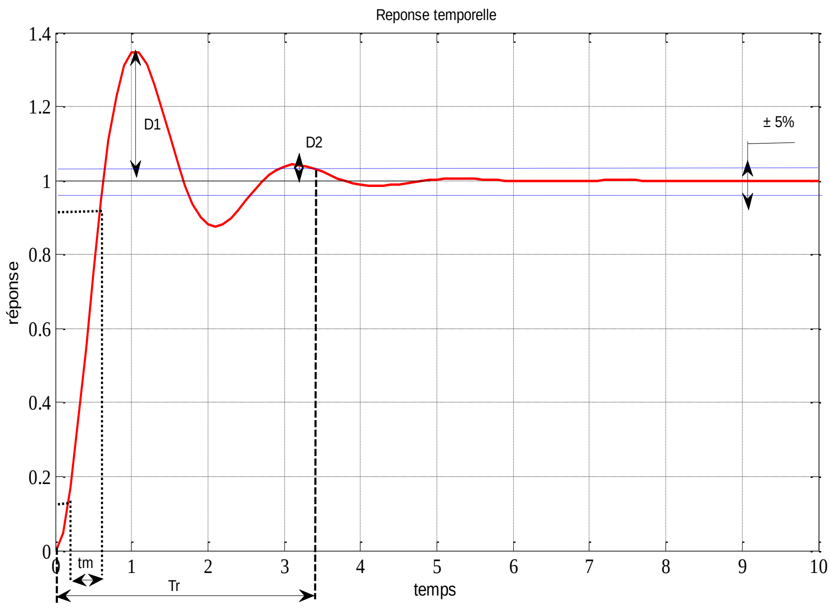
$$Réponse\ complète = Régime\ transitoire + Régime\ \ permanent$$

Habituellement, la plupart des systèmes asservis travaillent pratiquement toujours en régime transitif. On observe généralement deux types de régime transitif.



1 : Régime apériodique
2 : Régime oscillatoire
Le comportement dynamique des systèmes asservis doit satisfaire des exigences très strictes. Il doit posséder deux qualités fondamentales qu'il est difficile de concilier. Il doit être bien amorti tout en

demeurant assez rapide. En effet, s'il est trop lent, il ne peut tenir compte des variations rapides, s'il est trop peu amorti, l'effet des parasites sera important. Quand on a un phénomène transitoire oscillant, il peut développer des pointes dangereuses.
L'amortissement du régime transitoire s'exprime généralement par le premier dépassement de la réponse unitaire. On considère principalement le premier dépassement que l'on appelle rebondissement. Il ne doit pas dépasser un pourcentage de la valeur définitive. On admet généralement un pourcentage de 30 a 50 %.
La rapidité s'exprime par le temps de réponse et le temps de montée qui doivent être suffisamment courts. Le temps de réponse est le temps au bout duquel le système atteint 5% de la valeur finale pour une entrée unitaire. C'est la durée du régime transitoire figure suivante.



Le temps de montée t_m est le temps au bout duquel la réponse passe de 10% a 90% de la valeur finale.

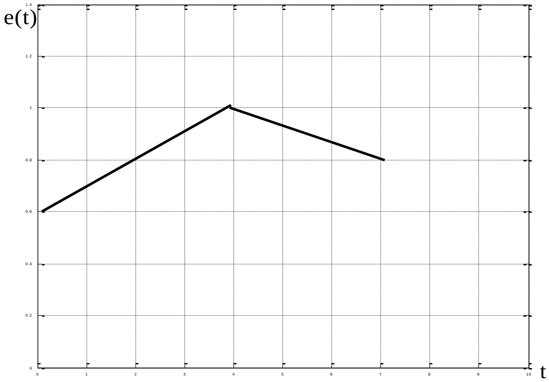
On peut aussi caractériser le régime transitoire d'un système oscillatoire par la fréquence des oscillations appelée fréquence propre du système ω_n.

La réponse est d'autant plus rapide que la fréquence propre est élevée.
Le comportement statique des systèmes asservis doit présenter un écart permanent suffisamment petit, voir si possible nul. On admet généralement une erreur statique inférieur ou égale a $\pm 5\%$ de la valeur finale. Si le régime permanent est identique à l'entrée, on dit que le système ne présente pas d'écart statique.
Pour une entrée en rampe, on emploie le terme erreur de vitesse ou erreur de traînage.

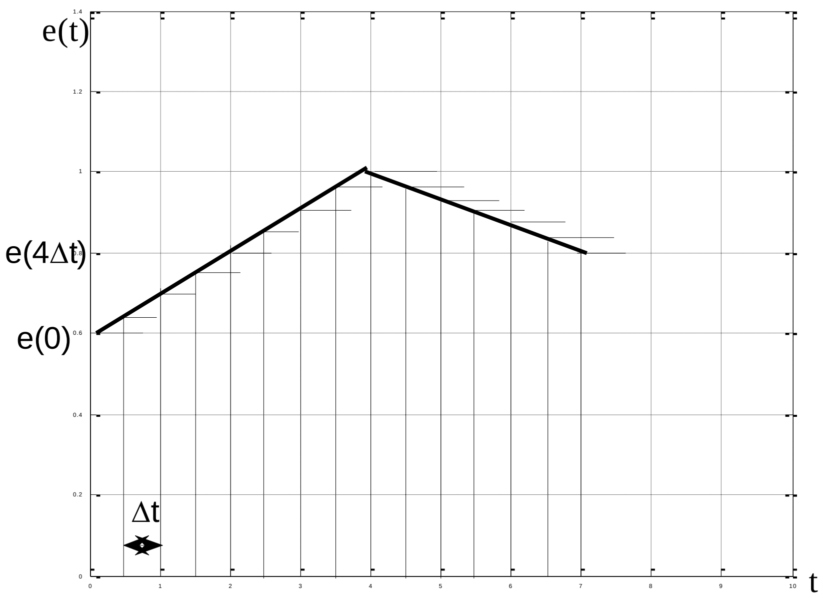
Réponse a une entrée quelconque :

On vient de voir le calcul de la réponse a des entrées test tels que la réponse impulsionnelle $h(t)$ ou la réponse indicielle $q(t)$ à partir de la résolution des équations différentielles linéaires. Nous allons voir a présent qu'il est possible de construire la réponse $s(t)$ du système a une entrée quelconque connaissant préalablement la réponse indicielle $q(t)$ ou impulsionnelle $h(t)$.

Afin d'illustrer ce point important, soit par exemple un système asservi linéaire dont on connaît sa réponse impulsionnelle $h(t)$, on désire représenter sa réponse $s(t)$ quand on applique une entrée quelconque $e(t)$.



En utilisant, le principe de superposition, il est possible de diviser le signal d'entrée $e(t)$ en un train d'impulsions rectangulaires d'une durée $\Delta(t)$, puis définir l'entrée $e(t)$ par une somme de toutes ces impulsions.



La première impulsion est $\delta(t)$ d'une largeur et d'une hauteur $\Delta(t)$ et $e(0)$. La seconde impulsion est $\delta(t-\Delta t)$ d'une largeur Δt et d'une hauteur $e(\Delta t)$, etc..

L'entrée complète est composée donc d'une somme d'impulsions comme suite :

$$e(t) = \delta(t)\Delta t e(0) + \delta(t-\Delta t)\Delta t e(\Delta t) + \delta(t-2\Delta t)\Delta t e(2\Delta t) + ... + e(t-n\Delta t)\Delta t e(n\Delta t)$$

Posons :

$$t_k = k\Delta t \qquad où \quad k \text{ var} ie\ de\ 1\ à\ n$$

On obtient :

$$e(t) = e(0)\delta(t)\Delta t + \sum_{k=1}^{n} e(t_k)\delta(t - t_k)\Delta t$$

On vient de voir que lorsqu'on applique à l'entrée d'un system asservi une impulsion ponctuelle (brève), la sortie est complètement caractérisée par la réponse impulsionnelle $h(t)$.

Autrement dit, si nous connaissons la réponse impulsionnelle $h(t)$ pour une entrée $\delta(t)$, on peut connaître la réponse aux autres impulsions déplacées $\delta(t - m\Delta t)$ et d'amplitudes différentes.

Par conséquent, si l'intervalle de l'impulsion Δt tend vers zéro, le signal d'entrée sera composé d'une infinité d'impulsions ponctuelles (durée nulle, $n \to \infty$).

En vertu du principe de superposition, pour une entrée composée d'une somme d'impulsions, on enregistre a la sortie une somme de réponse impulsionnelle :

$$e(t) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} e(t_k)\delta(t - t_k)\Delta t + e(0)\delta(t)\Delta t$$

$$s(t) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} e(t_k)h(t - t_k)\Delta t + e(0)\delta(t)\Delta t$$

Ou bien,

$$s(t) = \lim \sum_{m=0}^{n} e(m\Delta t) h(t - m\Delta t) \Delta t$$
$$\Delta t \to 0$$
$$n \to \infty$$

Le résultat de $s(t)$ tend vers une intégrale :

$$s(t) = \int_0^t h(t-\tau) e(\tau) d\tau$$

Avec :

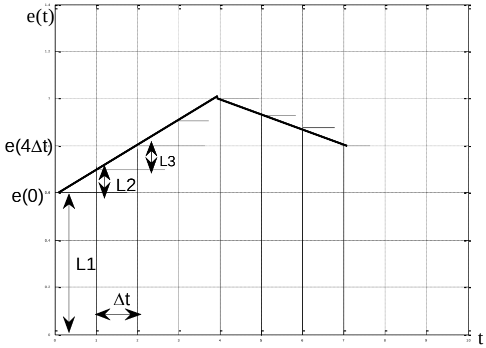
$$\tau = m\Delta t$$

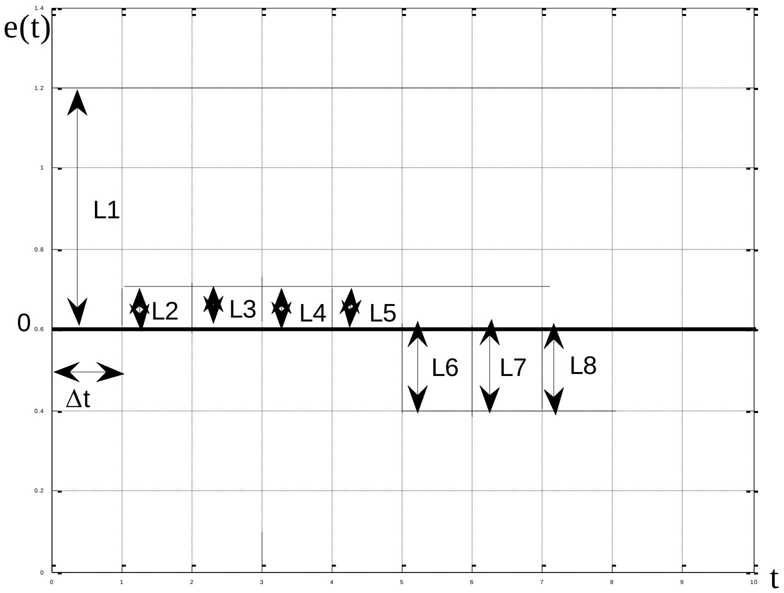
Ce résultat caractérise le théorème de **DUHAMEL** ou le **produit Convolution**.

$$s(t) = e(t) * h(t)$$

L'étoile $*$ définit le produit Convolution.

D'une manière analogue, il est possible de déterminer la réponse d'un système asservi linéaire a une entrée quelconque si on connaît sa réponse indicielle $q(t)$.





$$s(t) = \int_0^t q(t-\tau)\frac{de}{d\tau}d\tau + e(0)q(t)$$

Exemple :
Connaissant la réponse impulsionnelle d'un système asservi :

$$h(t) = e^{-t}$$

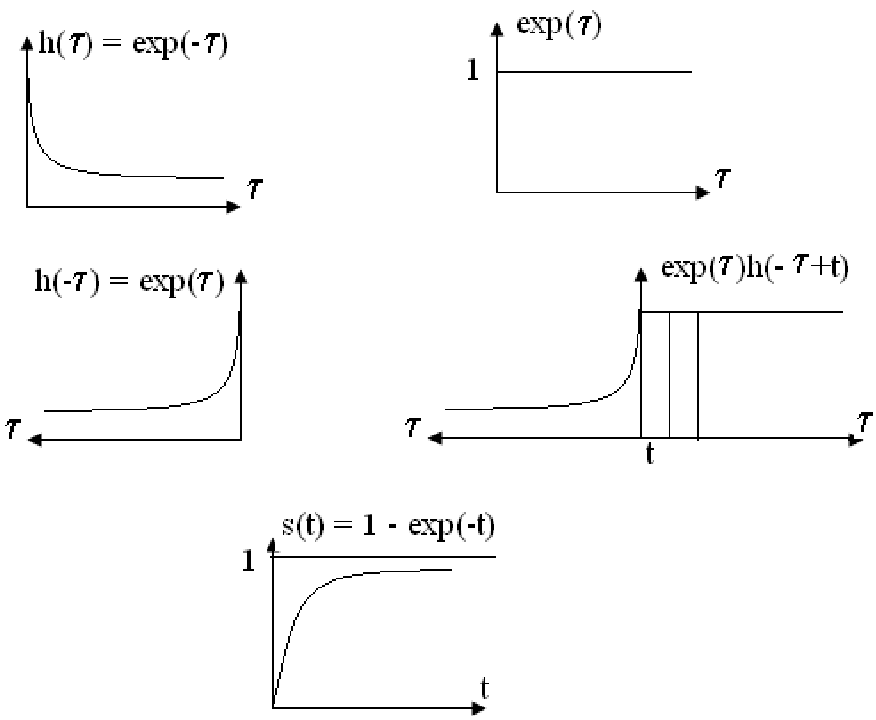
On désire trouver sa réponse complète pour une entrée $e(t) = u(t)$.
La sortie du système correspond au produit de convolution entre la réponse impulsionnelle et l'entrée $e(t)$:

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

La résolution de cette intégrale peut être résumé par les différentes opérations suivantes :

1) image de la fonction $h(\tau)$.
2) déplacement de l'image $h(-\tau + t)$.
3) multiplication par $e(\tau)$.
4) intégration

Toutes ces opérations sont illustrées par la figure suivante.



Transformation de La place :

Comme nous l'avons indiqué, pour analyser un système asservi, il faut d'abord résoudre l'équation différentielle reliant la sortie a l'entrée principale. Toute fois, on vient de voir que les calculs de cette équation sont compliqués et fastidieux, surtout lorsque le système à étudier devient complexe et l'ordre de l'équation devient assez élevé. Plusieurs techniques sont utilisées pour simplifier la résolution de ces problèmes. Parmi ceux ci, nous exposons la méthode qui permet une transformation mettant en rapport les fonctions du temps avec des fonctions de la variable complexe dépendant de la fréquence. On l'appelle la transformation de la place.
La transformation de Laplace est un outil mathématique qui se prête aisément à résoudre les équations différentielles des que le système devient complexe. Elle permet de trouver à la fois le régime transitoire et le régime permanent en manipulant de simples équations algébriques, sans passer par l'opération compliquée d'intégration. Cette méthode de calcul transformationnel est appelée souvent calcul opérationnel. Grâce à sa manière plus systématique et plus commode, son emploi s'est généralisée dans tous les domaines où il est nécessaire d'étudier des systèmes régis par des équations différentielles a coefficients constants. Elle permet de remplacer les fonctions données par leurs images. Le passage de l'original à l'image est réalisé par la transformation de Laplace qui repose essentiellement sur l'opérateur complexe $s = \alpha + j\omega$ appelé opérateur de Laplace.

Définition :

A toute fonction du temps $x(t)$, définie pour $t \succ 0$, on fait correspondre une fonction $X(s)$ de la variable complexe s qu'on appelle image de la fonction $x(t)$ ou transformée de Laplace définie par :

$$\pounds\left[\mathrm{x(t)}\right] = \mathrm{X(s)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} x(t)dt$$

$X(s)$ est l'image de $x(t)$, $x(t)$ est un original de $X(s)$.

En pratique, on utilise la transformée de Laplace qui s'appliquent aux fonctions causales.

Habituellement, on utilise les lettres minuscules pour les fonctions originales, les lettres capitales pour transformée de Laplace. Dans d'autres cas, un tilde est parfois utilisé, par exemple :

$$\pounds\left[\mathrm{x(t)}\right]=\mathrm{X(s)}=\tilde{\mathrm{x}}(\mathrm{t})$$

Il est à noter que x(t) et X(s) expriment le même signal, la même réalité physique exprimée une fois dans un monde abstrait, l'espace de Laplace.

Exemple :

a) fonction échelon unité :

$$\pounds\left[\mathrm{u(t)}\right]=\mathrm{U(s)}=\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

$$\pounds\left[\mathrm{u(t)}\right]=\frac{1}{\mathrm{s}}$$

b) fonction impulsion unité :

$$\pounds\left[\delta(\mathrm{t})\right]=\delta(\mathrm{s})=\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt=e^{0s}=1$$

$$\pounds\left[\delta(\mathrm{t})\right]=1$$

c) fonction rampe :

$$\pounds\left[\mathrm{r(t)}\right]=\int_0^\infty r(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty te^{-st}dt=\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^\infty-\left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}$$

$$£\left[r(t)\right] = R(s) = \frac{1}{s^2}$$

On dit parfois que $X(s)$ est l'unique image de $x(t)$. D'une manière réciproque, il existe une transformation inverse qui permet de retrouver $x(t)$ a partir de $X(s)$ qu'on appelle transformation de Laplace inverse.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Elle est généralement notée comme suite :

$$x(t) = £^{-1}\left[X(s)\right]$$

En pratique, la correspondance entre $x(t)$ et $X(s)$ est directe dans les deux sens et se fait grâce à des tables appelées **:Table des transformations.**

Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace :

Nous allons a présent considérer les propriétés fondamentales de la transformation de Laplace et montrer leur commodité et le grand intérêt théorique à résoudre un grand nombre de problème.

1) linéarité :

La transformation de Laplace d'une somme de fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est égale à la somme de leurs transformées de Laplace.

$$£\left[x_1(t) + x_2(t)\right] = £\left[x_1(t)\right] + £\left[x_2(t)\right]$$

La transformée de Laplace d'un produit d'une constante c par une fonction x(t) est égale au produit de cette constante par la transformée de Laplace de x(t) .

$$\pounds\left[cx(t)\right] = c\,\pounds\left[x(t)\right]$$

Ces propriétés découlent du principe de superposition. La transformation de Laplace est donc une opération linéaire.

Exemple :

$$\pounds\left[5t+2e^{-2t}\right] = 5\,\pounds\left[t\right] + 2\pounds\left[e^{-2t}\right] = \frac{5}{s} + \frac{2}{s+2}$$

2) changement d'échelle :

Si $\pounds\left[x(t)\right] = X(s)$

$$\pounds\left[x(at)\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} x(at)dt$$

Posons : $\theta = at \Rightarrow t = \frac{\theta}{a}$,

On obtient : $\int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta s}{a}} x(\theta) d\left(\frac{\theta}{a}\right) = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta s}{a}} x(\theta) d\theta = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$

D'où : $\pounds\left[x(at)\right] = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$

Exemple :

$$\pounds\left[\sin t\right] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$£[\sin 5t] = \left[\frac{1}{5}\right] \frac{1}{\left(\frac{s}{5}\right)^2 + 1} = \frac{5}{s^2 + 25}$$

3) Théorème de dérivation :

Soit $£[x(t)] = X(s)$

Posons : $\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$

La transformée de Laplace de $y(t)$:

$$£[y(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} x^{'}(t)dt$$

A partir de la relation : $\int \mathrm{udv} = \mathrm{uv} - \int \mathrm{vdu}$

Posons : $\begin{array}{l} u = e^{-st} \quad \Rightarrow du = -se^{-st}dt \\ dv = x^{'}(t)dt \Rightarrow v = x(t) \end{array}$

Par conséquent : $£[y(t)] = \left| e^{-st}x(t) \right|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt = \left| e^{-st}x(t) \right|_0^{\infty} + sX(s)$

D'où : $£\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$

$x(0)$: Représente les conditions initiales

Exemple :

Soit $x(t) = e^{-at}$

$$£\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow sX(s) = \frac{s}{s+a}$$
$$x(0) = 1$$
$$d'où : £\left[x'(t)\right] = \frac{s}{s+a} - 1$$

Soit : $y(t) = \dfrac{d^2 x(t)}{dt^2}$

Pour trouver la transformée de Laplace de la dérivée seconde, soit :

$$f(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$£f(t) = sX(s) - x(0) = F(s)$$

Et d'après le théorème de dérivation

$$£\left[f(t)'\right] = sF(s) - f(0)$$

Puisque :

$$f(t) = x'(t) \Rightarrow f(0) = x'(0)$$

Par conséquent : $£\left[\dfrac{d^2 x(t)}{dt^2}\right] = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)$

On obtient la forme générale par récurrence :

$$£\left(\mathrm{x}^{\mathrm{n}}(t)\right) = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{'}(0) - .... - s^{n-m}x^{m-1} - ... - x^{n-1}(0)$$

$$= s^n £\left[\mathrm{x(t)}\right] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}x^k(0)$$

Exemple :

$$£\left(\frac{\mathrm{d}^3 x(t)}{dt^3}\right) \;\; avec \;\; \left|x(t)\right|_{t=0} = 2 \; ; \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1 \; ; \left|\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = -1$$

$$£\left(\frac{\mathrm{d}^3 x(t)}{dt^3}\right) = s^3 X(s) - 2s^2 - s + 1$$

Dans le cas ou les conditions initiales sont nulles, l'opérateur s'apparaît comme l'opération de dérivation. Par conséquent, dériver dans le domaine temporelle, revient à multiplier par s dans le domaine de Laplace.

4) Théorème de l'intégration :

Soit :

$$£\left[\int_{\tau}^{\infty} \mathrm{x}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \int_0^{\infty}\left[\int_{\tau}^{\infty} x(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{\infty} x(\tau)\left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-st}dt\right]d\tau = \int_0^{\infty} x(\tau)\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{\tau}^{\infty}$$

$$= \int_0^{\infty} x(\tau)\frac{e^{-s\tau}}{s}d\tau = \frac{1}{s}\int_0^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}x(0)$$

$$£\left[\int_{t}^{\infty} \mathrm{x}(\tau)\mathrm{dt}\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{x(0)}{s}$$

Si les conditions initiales sont nulles $(x(0)=0)$, l'opération $\frac{1}{s}$ apparaît comme l'opération d'intégration. Intégrer dans le domaine temporel revient donc à diviser par s dans le domaine de Laplace.

Exemple :

$$£\left[\sin 2t\right]=\frac{2}{s^2+4}$$

Il vient : $$£\left[\int_0^t \sin 2\tau d\tau\right] = \frac{2}{s\left(s^2+4\right)}$$

5) Théorème des limites :

Il est possible d'obtenir les valeurs initiales et finales d'une fonction $x(t)$ à partir transformée de Laplace.

a) Valeur initiale :

$$£\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s)-x(0)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ T\to\infty}}\int_\varepsilon^T \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt$$

Posons : $s\to\infty$

Soit :

$$\lim_{s \to \infty}\left[sX(s)-x(0)\right]=\lim_{s \to \infty}\left[\lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}}\int_{\varepsilon}^{T}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt\right]$$

Puisqu'on peut échanger les passages à la limite, on aura :

$$\lim_{s \to \infty}\left[\lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}}\int_{\varepsilon}^{T}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt\right]=\lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}}\int_{\varepsilon}^{T}\frac{dx(t)}{dt}\left[\lim_{s \to \infty}e^{-st}\right]dt \qquad (1)$$

Le second membre de l'équation (1) est égal a zéro, on obtient :

$$\lim_{s \to \infty}\left[sX(s)-x(0)\right]=0 \;\Rightarrow\; \lim_{s \to \infty}sX(s)=x(0)$$

Puisque,

$$x(0)=\lim_{t \to}x(t)$$

On obtient donc :

$$\lim_{t \to 0}x(t)=\lim_{s \to \infty}sX(s)$$

b) Valeur finale :

Soit :

$$\pounds\left[\frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}}\right] = sX(s) - x(0) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ T\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Posons : $s \to 0$

On aura :

$$\lim_{s\to 0}\left[sX(s) - x(0)\right] = \lim_{s\to 0}\left[\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt\right] \qquad (2)$$

Puisqu'on peut échanger les passages à la limite, on aura :

$$\lim_{s\to 0}\left[\lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt\right] = \lim_{\substack{T\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{dx(t)}{dt}\left[\lim_{s\to 0} e^{-st}\right] dt$$

Avec :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ T\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{dx(t)}{dt} dt = x(\infty) - x(0)$$

L'équation (2) devient :

$$\lim_{s\to 0}\left[sX(s) - x(0)\right] = x(\infty) - x(0)$$

D'où :

$$\lim_{s \to 0} sX(s) = x(\infty)$$

Puisque :

$$x(\infty) = \lim_{t \to \infty} x(t)$$

On obtient :

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

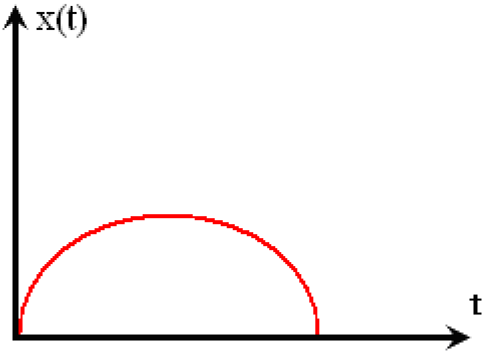
Remarque :

Dans le cas ou on aura un rapport de deux polynômes, le théorème de la valeur initiale ne s'applique pas si le degré du numérateur est égal ou supérieur a celui du dénominateur.

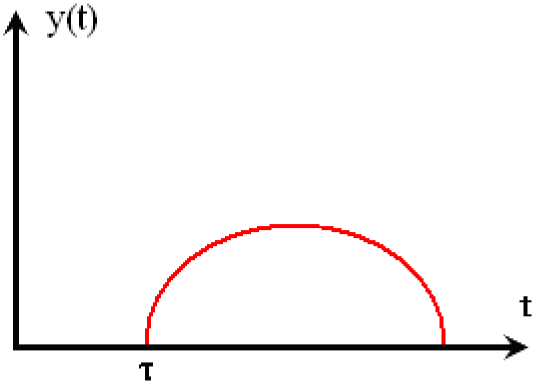
Le théorème de la valeur finale n'est valable que si ce rapport ne contient ni pôles a partie réelle nulle.

6) Théorème de Retard :

Supposons qu'une fonction $x(t)$ définie pour $t \succ 0$ ait une transformée de Laplace $X(s)$.



Considérons à présent la fonction $y(t)$ obtenue en décollant $x(t)$ d'un temps égal τ , vers les temps positifs.



La transformée de Laplace de $y(t)$ s'écrit alors :

$$£\left[\mathrm{y(t)}\right]=\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty x(t-\tau)e^{-st}dt$$

Posons : $\theta=t-\tau\Rightarrow t=\tau+\theta$

On obtient :

$$\int_0^\infty e^{-s(\tau+\theta)}x(\theta)d\theta$$

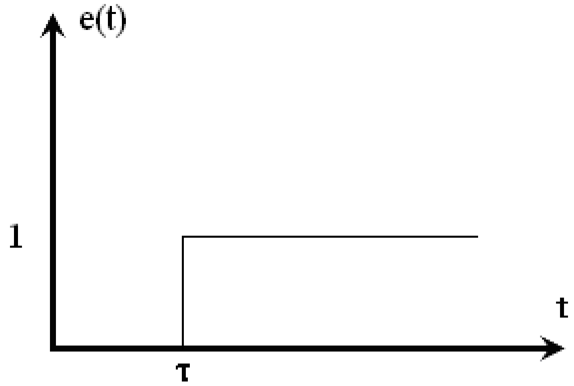
D'où :

$$Y(s)=\int_0^\infty e^{-s\theta}e^{-s\tau}x(\theta)d\theta=e^{-s\tau}X(s)$$

Finalement : $£\left[\mathrm{x(t-}\tau\mathrm{)}\right]=e^{-s\tau}X(s)$

Exemple :

Considérons la fonction échelon unité retardée d'une valeur égale à τ .



$$e(t)=u(t-\tau) \Rightarrow \text{£}\left[\mathrm{e(t)}\right]=\text{£}\left[\mathrm{u(t-}\tau\right]=\int_0^{\infty} u(t-\tau)e^{-st}dt$$

$$U(s)=\frac{1}{s}e^{-s\tau}$$

On voit bien que le terme $e^{-s\tau}$ caractérise le retard de la fonction échelon unité.

7) Translation ou décalage :

Soit :

$$y(t)=e^{at}x(t)$$

$$\text{£}\left[\mathrm{y(t)}\right]=\text{£}\left[\mathrm{e^{at}x(t)}\right]=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}x(t)dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}x(t)dt=X(s-a)$$

On obtient :

$$\text{£}\left[\mathrm{e^{at}x(t)}\right]=X(s-a)$$

Exemple :

Déterminons la transformée de Laplace de :

$$y(t) = e^{2t}\sin t$$

$$£\left[\mathrm{y(t)}\right] = £\left[\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\sin t\right] = \frac{1}{(s-2)^2+1}$$