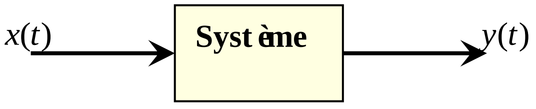
Chapitre 2 : Notion de modèle : mise en équation

Introduction :

En automatisation, la modélisation est souvent nécessaire, car elle permet d'étudier et d'analyser le comportement des systèmes.
Modéliser un système revient à mettre en place un ensemble d'équations mathématiques qui peuvent exprimer le comportement physique de ce système.
La mise en équation d'un système est une opération à la fois extrêmement importante et délicate, qui peut compromettre l'ensemble de l'étude de manière définitive. Un système peut le plus souvent être décomposé en parties assez simples. Pour exprimer le comportement physique de chaque élément par une équation mathématique, on fait appel aux connaissances de physique, d'électromécanique, de génie chimique ou d'autres branches scientifiques. Après avoir décrit chaque élément, on aboutit à un système d'équations algébriques ou différentielles du système.
Soit un système linéaire et invariant, le comportement d'un tel système est régi par une équation différentielle ayant pour forme :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$



Où :

$x(t)$: Représente l'entrée du système.

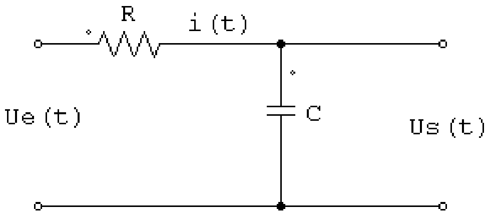
$y(t)$: Représente la sortie du système.

$b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n$ *et* $a_m, a_{m-1}, \ldots\ldots, a_0$ Coefficients constants de l'équation différentielle.

Exemple :

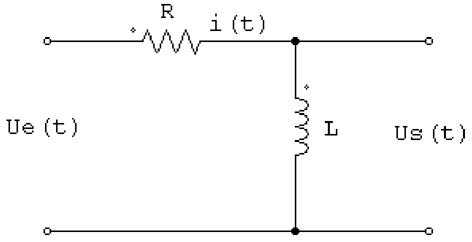
a) Modélisation des citcuits électriques :

1) Soit le circuit électrique RC.



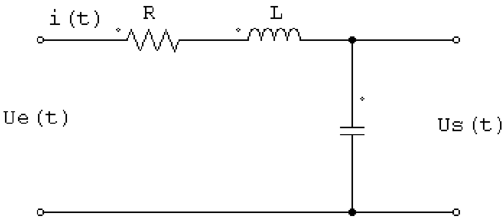
$$e(t) = Ri(t) + s(t)$$
$$s(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Rightarrow i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$$
$$e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

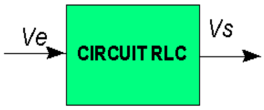
2) Soit le circuit électrique RL.



$$e(t) = Ri(t) + s(t)$$
$$s(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int s(t)dt$$
$$e(t) = \frac{R}{L}\int s(t)dt + s(t) \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt} + \frac{R}{L}s(t)$$

3) Soit le circuit électrique RLC :





$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + s(t)$$

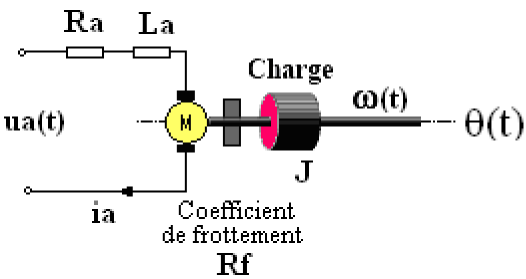
$$s(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Rightarrow i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$$

$$e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + LC\frac{d^2s(t)}{dt^2} + s(t)$$

$$LC\frac{d^2s(t)}{dt^2} + RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

b) Modélisation des systèmes électromécaniques :

On considère un moteur à courant continu à excitation indépendante. On veut étudier la variation de la position θ(t) lorsqu'on lui applique une tension aux bornes de l'induit $U_a(t)$.



On écrit d'abord les équations dynamiques du moteur :

$$u_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_m(t) \rightarrow (1)$$
$$e_m(t) = K\phi\omega(t) \rightarrow (2)$$
$$C_{em}(t) = K\phi i(t) \rightarrow (3)$$
$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = C_{em}(t) - R_f\omega(t) \rightarrow (4)$$
$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \rightarrow (5)$$

Soit :

$$i_a(t) = \frac{C_{em}(t)}{K\phi} \rightarrow (6)$$

Rempla çons (2) et (6) dans (3) :

$$u_a(t) = \frac{R_a}{K\phi}C_{em}(t) + \frac{L_a}{K\phi}\frac{dC_{em}(t)}{dt} + K\phi\omega(t) \rightarrow (7)$$

A partir de (4), on obtient :

$$C_{em}(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} + R_f\omega(t) \rightarrow (8)$$

On remplace (8) dans (7) :

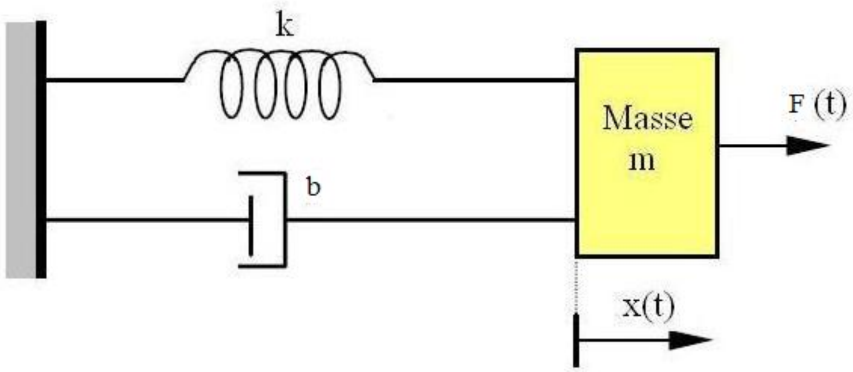
$$u_a(t) = \frac{R_a J}{K\phi}\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{R_a R_f}{K\phi}\omega(t) + \frac{L_a J}{K\phi}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{R_f L_a}{K\phi}\frac{d\omega(t)}{dt} + K\phi\omega(t) \rightarrow (9)$$

Rempla çons (5) dans (9), n obtient finalement :

$$\frac{L_a J}{K\phi}\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + \frac{\left(R_a J + R_f L_a\right)}{K\phi}\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{R_a R_f}{K\phi}\frac{d\theta(t)}{dt}$$

d) Modélisation des systèmes mécaniques :

On considère une masse m dont on étudie la variation de la position autour de la position d'équilibre, lorsqu'on lui applique une force y(t). Cette masse est liée à un ressort de raideur k et d'un amortisseur visqueux de coefficient b.



La masse, la raideur et l'amortissement visqueux du ressort créent des forces qui vont s'opposer au déplacement x :

$F_1(t) = m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$: Force créée par la masse

$F_2(t) = b\dfrac{dx(t)}{dt}$: Force créée par la raideur du ressort

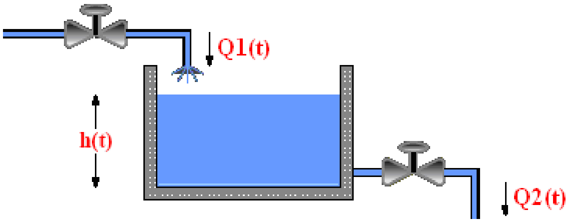
$F_3(t) = kx(t)$: Force créée par l'amortissement visqueux.

La variation de la position d'équilibre s'écrit alors :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

d) Modélisation des systèmes hydrauliques :

On considère un réservoir de section s qui se remplit de fluide de débit d'alimentation q (t). On s'intéresse à la variation de la hauteur h (t) si le débit de sortie est proportionnel à la hauteur du fluide.



A partir de la relation de conservation de la masse, on écrit :

$$s\frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

Avec :

$$q_2(t) = kh(t)$$

On obtient :

$$s\frac{dh(t)}{dt} + kh(t) = q_1(t)$$

Analyse temporelle :

Introduction :

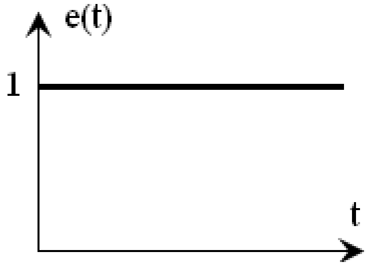
Quand on veut analyser un système asservi linéaire dans le domaine temporel, il faut toujours se renseigner sur ces performances transitoires à coté de ses qualités en régime statique. Pour bien préciser ce point et permettre une certaine comparaison entre les systèmes, on est amené souvent à appliquer aux systèmes asservis des entrées parfaitement définies appelées signaux tests ou entrées typiques. Il existe trois sortes de signaux test :

- Fonction échelon unité
- Fonction rampe
- Fonction impulsion

a) entrée en échelon unité :

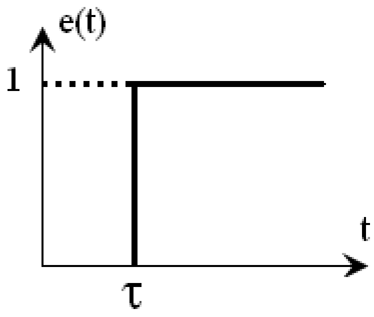
On appelle entrée en échelon unité notée généralement u(t), une fonction définie comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = 0 & t \langle 0 \\ e(t) = u(t) = 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



Généralement, cette fonction n'est définie que pour t = 0. Elle est souvent utilisée pour tester les systèmes asservis lorsque l'entrée (ou la référence) est une constante. Parfois, on l'appelle aussi fonction de Heaviside ou fonction d'existence.
Si elle est retardée d'une valeur τ, on aura:

$$\begin{cases} e(t) = u(t-\tau) = 0 & t \langle 0 \\ e(t) = u(t-\tau) = 1 & t \geq \tau \end{cases}$$



On peut généraliser cette entrée en effectuant des essais en échelon non unitaire, d'amplitude A_0 .

$$\begin{cases} e(t) = 0 & t \langle 0 \\ e(t) = A_0 u(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

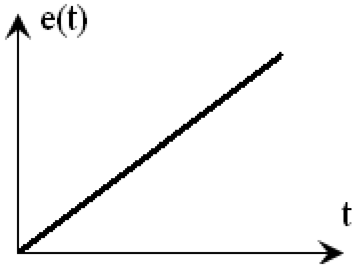
On voit ainsi que cette fonction est nulle pour $t \langle 0$, on la qualifie aussi de fonction causale. Une fonction est dite causale si pour tout signal d'entrée $e(t)$ vérifiant $e(t) = 0$ pour $t \langle 0$, la sortie doit vérifier $y(t) = 0$.

On appelle réponse à une entrée échelon unité d'un système linéaire $q(t)$ (réponse indicielle), le signal de sortie lorsque le signal d'entrée $e(t) = u(t)$ et que toutes les valeurs initiales sont nulles.

b) entrée de vitesse (fonction rampe) :

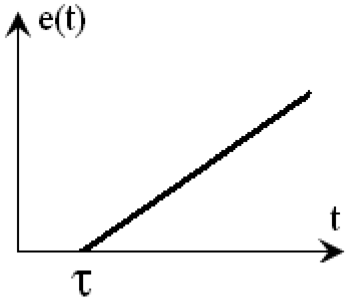
La fonction rampe, notée généralement $r(t)$, est définie comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = 0 & t \langle 0 \\ e(t) = r(t) = tu(t) & t \geq 0 \end{cases}$$



On utilise généralement la rampe pour tester les systèmes asservis lorsque l'entrée (ou la référence) est une fonction variable dans le temps. On dit que le système est soumit à une entrée rampe de pente unitaire. Si elle est retardée d'une valeur τ , on aura.

$$\begin{cases} e(t) = 0 & t \langle 0 \\ e(t) = r(t-\tau) = (t-\tau)u(t-\tau) & t \geq 0 \end{cases}$$



Souvent, on peut effectuer des essais à une rampe de pente non unitaire :

$$\begin{cases} e(t) = 0 & t \langle 0 \\ e(t) = A_0 r(t) = A_0 tu(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

On appelle réponse à une entrée rampe unité d'un système asservi linéaire $R(t)$, le signal de sortie du système lorsque le signal d'entrée $e(t) = tu(t)$ et que toutes les valeurs initiales sont nulles.

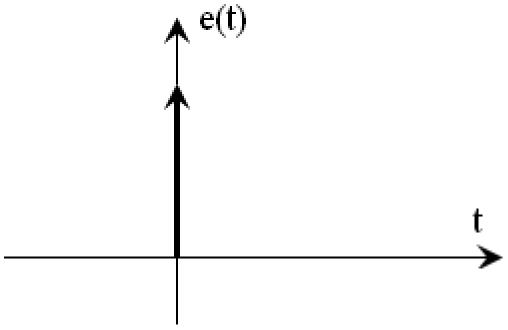
c) entrée impulsion :

L'impulsion unité notée $\delta(t)$ est une distribution qu'on appelle souvent Impulsion de Dirac. Elle est définie comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ e(t) = \delta(t) = \infty & t = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

C'est une impulsion centrée à l'origine d'aire égale à l'unité.

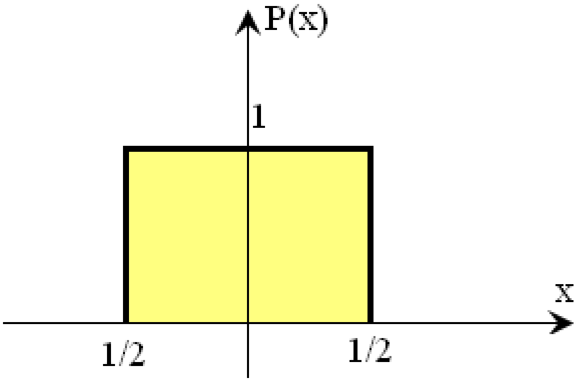
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad (2)$$



Une explication intuitive de cette fonction peut être formulée comme suit :

Soit une fonction porte $P(x)$ d'aire égale à l'unité.

$$P(x)\begin{cases} 0 & |x| \geq \dfrac{1}{2} \\ 1 & |x| \langle \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



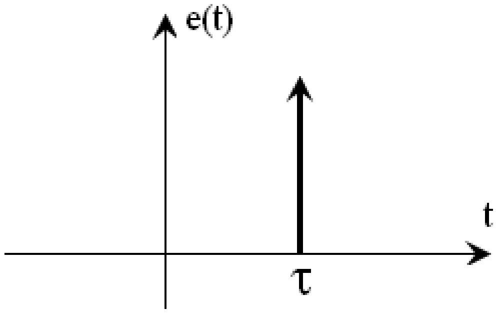
Pour obtenir une fonction sous forme d'une impulsion unité centrée à l'origine et d'aire égale à l'unité, on diminue au fur et à mesure la base x tout en augmentant la hauteur $P(x)$. Pour une valeur de x qui tend vers zéro (origine : ponctuel), on aura $P(x)$ qui tend vers l'infini, car $P(x)$ est inversement proportionnel à x. Par conséquent, l'intégration de cette fonction égale à l'unité.

L'impulsion $\delta(t)$ n'est pas une fonction au sens mathématique du terme, car aucune fonction ne peut vérifier en même temps la relation (1) et (2), c'est plutôt une distribution au sens physique du terme.
C'est une fonction d'une durée extrêmement brève, mais d'amplitude suffisante pour qu'elle ait un effet notable. Elle est généralement utilisée pour observer le comportement dynamique ou le régime transitoire du système asservi.
On appelle réponse à l'impulsion unité d'un système linéaire $h(t)$, le signal de sortie du système lorsque le signal d'entrée $e(t)=\delta(t)$ et que toutes les valeurs initiales sont nulles.
Une impulsion d'aire différente de l'unité es définie comme suit :

$$\begin{cases} e(t) = A_0\delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} A_0\delta(t)dt = A_0 & t = 0 \end{cases}$$

Si elle est retardée d'une valeur égale à τ, on aura une impulsion d'aire égale à l'unité à l'instant τ.

$$\begin{cases} e(t) = \delta(t-\tau) = 0 & t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)dt = 1 & t = \tau \end{cases}$$



A partir de ces différentes fonctions test, on voit apparaître une relation qui relie ces entrées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = q(t) \Rightarrow h(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

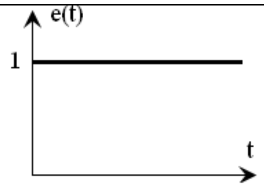
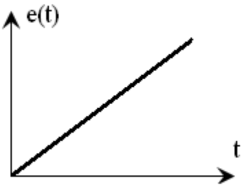
$$et$$

$$q(t) = \frac{dR(t)}{dt} \Rightarrow R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)dt$$

$$d'o?$$

$$h(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d^2R(t)}{dt^2}$$

Tableau récapitulatif des différentes entrées tests :

Notation	Forme
entrée en échelon unité : $\begin{cases} e(t)=0 & t\langle 0 \\ e(t)=u(t)=1 & t\geq 0 \end{cases}$	
entrée de vitesse : $\begin{cases} e(t)=0 & t\langle 0 \\ e(t)=r(t)=tu(t) & t\geq 0 \end{cases}$	
entrée impulsion : $\begin{cases} e(t)=\delta(t)=0 & t\neq 0 \\ e(t)=\delta(t)=\infty & t=0 \end{cases}$