Université Badji Mokhtar Annaba (F^{té} des sciences D^{pt} de Maths.)
Master1:Actuariat-P.S année 2019-2020

Solution de la Série 2: Processus ARCH

<u>Ex1:</u>
I) Soit le processus suivant: $X_t = u_t\sqrt{h_t}$ où $u_t \to N(0,1)$ et $h_t = 0.1 + 0.5X_{t-1}^2$
1. Calcul de $E(X_t)$, $E(X_t/I_{t-1}), V(X_t)$ et $V(X_t/I_{t-1})$.
-Remarquez que u_t et h_t sont non corrélés:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E\left(u_t\sqrt{h_t}\right) \\ &= E(u_t)\,E\left(\sqrt{h_t}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

-Sachant que h_t est I_{t-1} mesurable:

$$\begin{aligned} E(X_t/I_{t-1}) &= \sqrt{h_t}E(u_t/I_{t-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} V(X_t) &= E(X_t^2) \\ &= E\left(u_t^2 h_t\right) \\ &= E\left(0.1 + 0.5X_{t-1}^2\right) \\ &= 0.1 + 0.5E\left(X_{t-1}^2\right) \end{aligned}$$

par stationnarité on a $E(X_t^2) = E(X_{t-1}^2)$ d'où $\boxed{V(X_t) = 0.2}$.
-

$$\begin{aligned} V(X_t/I_{t-1}) &= h_t V(u_t/I_{t-1}) \\ &= h_t. \end{aligned}$$

2. Ecrire X_t^2 sous forme AR.
On a $h_t = 0.1 + 0.5X_{t-1}^2$, on ajoute X_t^2 des deux cotés:

$$X_t^2 = 0.1 + 0.5X_{t-1}^2 + X_t^2 - h_t$$

On pose $v_t = X_t^2 - h_t$ et on montre que v_t est un BB faible:

$$\begin{aligned} E(v_t/I_{t-1}) &= h_t - h_t \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $E(v_t) = 0$. Soit $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} cov(v_t, v_{t-k}) &= E\left(\left(X_t^2 - h_t\right)\left(X_{t-k}^2 - h_{t-k}\right)\right) \\ &= E\left(\left(u_t^2 h_t - h_t\right)\left(u_{t-k}^2 h_{t-k} - h_{t-k}\right)\right) \\ &= E\left(u_t^2 - 1\right)E\left(h_t\left(u_{t-k}^2 h_{t-k} - h_{t-k}\right)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement $X_t^2 = 0.1 + 0.5X_{t-1}^2 + v_t \sim AR(1)$.
3. Calculer la Kurtosis de ce processus. Conclure.
On rappelle que la kurtosis $K = \frac{E(X_t^4)}{E(X_t^2)^2}$, on commence par calculer le moment d'ordre 4:

$$\begin{aligned} E\left(X_t^4\right) &= E\left(u_t^4 h_t^2\right) \\ &= 3E\left(\left(0.1 + 0.5X_{t-1}^2\right)^2\right) \\ &= 3E\left(0.01 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.25X_{t-1}^4\right) \\ &= 3\left(0.01 + 0.1E\left(X_{t-1}^2\right) + 0.25E\left(X_{t-1}^4\right)\right) \end{aligned}$$

Par stationnarité on a $E\left(X_{t-1}^4\right) = E\left(X_t^4\right)$ et $E\left(X_{t-1}^2\right) = V(X_t) = 0.2$, alors

$$\begin{aligned} E\left(X_t^4\right) &= \frac{0.03 + 0.3 \times 0.2}{1 - 3 \times 0.25} \\ &= 0.36. \end{aligned}$$

d'où $K = 9$.
On conclut que la distribution est leptokurtique.(Les queues de distribution sont plus épaisses que celle de la loi normale).
II) Même questions avec $h_t = 2 + 0.3X_{t-1}^2$ et $h_t = 3 + 0.2X_{t-2}^2$.
C'est votre tour, à faire exactement comme dans **I**.
III) Soit le processus suivant: $X_t = u_t\sqrt{h_t}$ où $u_t \rightarrow N(0,1)$ et $h_t = 1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.2X_{t-2}^2$.
1. Calculer: $E(X_t)$, $E(X_t/I_{t-1})$ et $V(X_t/I_{t-1})$. Ecrire X_t^2 sous forme AR, en déduire $V(X_t)$.
-$E(X_t) = 0$ et $E(X_t/I_{t-1}) = 0$ (Même démonstration que **I**).
-$h_t = 1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.2X_{t-2}^2$, on ajoute X_t^2 des deux cotés:

$$X_t^2 = 1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.2X_{t-2}^2 + v_t$$

où v_t est un BB, d'où $X_t^2 \sim AR(2)$. Donc $V(X_t) = E\left(X_t^2\right) = \frac{1}{1-0.1-0.2} = 1.428\,6$.
2. Calculer la Kurtosis de ce processus.

$$\begin{aligned} E\left(X_t^4\right) &= E\left(u_t^4 h_t^2\right) \\ &= 3E\left(\left(1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.2X_{t-2}^2\right)^2\right) \\ &= 3E\left(1 + 0.2X_{t-1}^2 + 0.01X_{t-1}^4 + 0.4X_{t-2}^2 + 0.04X_{t-1}^2X_{t-2}^2 + 0.04X_{t-2}^4\right) \qquad (1) \\ &= 3\left(1 + 0.2E\left(X_{t-1}^2\right) + 0.01E\left(X_{t-1}^4\right) + 0.4E\left(X_{t-2}^2\right) + 0.04E\left(X_{t-1}^2X_{t-2}^2\right) + 0.04E\left(X_{t-2}^4\right)\right) \end{aligned}$$

Par stationnarité on a: $E\left(X_{t-1}^2\right) = E\left(X_{t-2}^2\right) = V(X_t)$ et $E\left(X_{t-1}^4\right) = E\left(X_{t-2}^4\right) = E\left(X_t^4\right)$,
il nous reste à calculer $E\left(X_{t-1}^2X_{t-2}^2\right)$!

$$\begin{aligned} E\left(X_{t-1}^2X_{t-2}^2\right) &= E\left(u_{t-1}^2\left(1 + 0.1X_{t-2}^2 + 0.2X_{t-3}^2\right)X_{t-2}^2\right) \\ &= 1 + 0.1E\left(X_{t-2}^4\right) + 0.2E\left(X_{t-2}^2X_{t-3}^2\right). \end{aligned}$$

Encore une fois par stationnarité on a: $E\left(X_{t-2}^2X_{t-3}^2\right) = E\left(X_{t-1}^2X_{t-2}^2\right)$, d'où $E\left(X_{t-1}^2X_{t-2}^2\right) = \frac{1}{0.8}\left(1 + 0.1E\left(X_{t-2}^4\right)\right)$, on remplace dans (1)

$$\left(1 - 0.03 - 0.12 - \frac{0.012}{0.8}\right)E\left(X_t^4\right) = 3 + 1.8 \times 1.4286 + \frac{0.12}{0.8}$$

d'où $E\left(X_t^4\right)=\frac{5.7215}{0.835}=6.8521$. Et la kurtosis $K=\frac{6.8521}{(1.4286)^2}=3.3574$.

Ex2:

I) Soit le processus $ARCH(1)$ suivant: $X_t=u_t\sqrt{h_t}$ où $u_t\to N(0,1)$ et $h_t=\alpha+0.4X_{t-1}^2$.

1.Calculer: $E(X_t)$, $E(X_t/I_{t-1})$ et $V(X_t/I_{t-1})$.

$$E(X_t)=0, E(X_t/I_{t-1})=0 \text{ et } V(X_t/I_{t-1})=h_t.$$

2. Sachant que $V(X_t)=5$, calculer α.

$$\begin{aligned} V(X_t) &= E\left(X_t^2\right) \\ &= \alpha+0.4E\left(X_{t-1}^2\right) \end{aligned}$$

Donc $V(X_t)=\frac{\alpha}{0.6}\Longrightarrow\boxed{\alpha=3}$

3. En prenant la valeur de α trouver en 2, calculer la Kurtosis.

(Même calcul que **I** 3.)

4. Montrer que:

i) $E(X_t/I_{t-10})=0$, ii) $V(X_t/I_{t-10})=0.4^{10}X_{t-10}^2+3\dfrac{1-0.4^{10}}{0.6}$.

-i) En utilisant la propriété des esperances itérées:

$$\begin{aligned} E(X_t/I_{t-10}) &= E\left(E(X_t/I_{t-1})/I_{t-10}\right) \\ &= E\left(0/I_{t-10}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

-ii)

$$\begin{aligned} V(X_t/I_{t-10}) &= E(X_t^2/I_{t-10})-E(X_t/I_{t-10})^2 \\ &= E(X_t^2/I_{t-10}). \end{aligned}$$

On sait que $X_t^2\sim AR(1)$, donc

$$\begin{aligned} X_t^2 &= 3+0.4X_{t-1}^2+v_t \\ &= 3+0.4\left(3+0.4X_{t-2}^2+v_{t-1}\right)+v_t \\ &= 3(1+0.4)+0.4^2X_{t-2}^2+0.4v_{t-1}+v_t \\ &\vdots \\ &= 3\left(1+0.4+\cdots+0.4^9\right)+0.4^{10}X_{t-10}^2+0.4^9v_{t-9}+\cdots+v_t \\ &= 3\frac{1-0.4^{10}}{0.6}+0.4^{10}X_{t-10}^2+\sum_{i=0}^{9}0.4^iv_{t-i} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

II) Soit le modèle $X_t=0.8X_{t-1}+\varepsilon_t$ où $\varepsilon_t=u_t\sqrt{1.5+0.4\varepsilon_{t-1}^2}$ et $u_t\to N(0,1)$.

1. Calculer: $E(X_t)$, $E(X_t/I_{t-1}), V(X_t)$ et $V(X_t/I_{t-1})$.

-

$$E(X_t)=0.8E\left(X_{t-1}\right)+E\left(\varepsilon_t\right),$$

sachant que $E\left(\varepsilon_t\right)=0\Longrightarrow E(X_t)=0$.

-

$$E(X_t/I_{t-1}) = 0.8X_{t-1} + E\left(\varepsilon_t/I_{t-1}\right),$$

puisque $E\left(\varepsilon_t/I_{t-1}\right) = 0$ donc $E(X_t/I_{t-1}) = 0.8X_{t-1}$.

-

$$\begin{aligned} V(X_t) &= V\left(0.8X_{t-1} + \varepsilon_t\right) \\ &= 0.64V(X_{t-1}) + V(\varepsilon_t). \end{aligned}$$

Calculons la variance de ε_t :

$$V(\varepsilon_t) = E\left(1.5 + 0.4\varepsilon_{t-1}^2\right) \Longrightarrow V(\varepsilon_t) = \frac{1.5}{0.6} = 2.5$$

d'où $V(X_t) = \frac{2.5}{1-0.64} = 6.9444$

2. Donner l'intervalle de confiance à 95% de X_{t+1}.

On rappelle que: $IC\left(X_{t+1}\right) = \left[\widehat{X}_t\left(1\right) \pm 1.96\sqrt{V\left(e_t\left(1\right)\right)}\right]$.

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t\left(1\right) &= E\left(X_{t+1}/I_t\right) \\ &= 0.8X_t. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e_t\left(1\right) &= X_{t+1} - \widehat{X}_t\left(1\right) \\ &= \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

$\varepsilon_{t+1}/I_t \sim N\left(0, 1.5 + 0.4\varepsilon_t^2\right)$ d'où

$$IC\left(X_{t+1}\right) = \left[0.8X_t \pm 1.96\sqrt{1.5 + 0.4\varepsilon_t^2}\right]$$

<u>Ex3:</u>

I) Calculer les moments conditionnels et non conditionnels et la Kurtosis du processus $GARCH(1,1)$ stationnaire.

Soit $X_t \sim GARCH(1,1) \Longrightarrow X_t = u_t\sqrt{h_t}$ où $u_t \to iidN(0,1)$ et $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$.

-Moment d'ordre 1 non conditionnel

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E\left(u_t\sqrt{h_t}\right) \\ &= E\left(u_t\right)E\left(\sqrt{h_t}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

-Moment d'ordre 1 conditionnel

$$\begin{aligned} E(X_t/I_{t-1}) &= \sqrt{h_t}E\left(u_t/I_{t-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

-Moment d'ordre 2 non conditionnel

$$\begin{aligned}
V(X_t) &= E(X_t^2) \\
&= E\left(h_t\right) \\
&= E\left(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}\right) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 E\left(X_{t-1}^2\right) + \beta_1 E\left(h_{t-1}\right)
\end{aligned}$$

En remarquant que $E\left(h_{t-1}\right) = E\left(h_t\right) = V(X_t)$, on aura

$$V(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}.$$

-Moment d'ordre 2 conditionnel

$$\begin{aligned}
V(X_t/I_{t-1}) &= h_t V(u_t/I_{t-1}) \\
&= h_t.
\end{aligned}$$

-La kurtosis:

$$\begin{aligned}
E\left(X_t^4\right) &= E\left(u_t^4 h_t^2\right) \\
&= 3E\left(h_t^2\right) \\
&= 3E\left(\left(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}\right)^2\right) \\
&= 3E\left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_1^2 X_{t-1}^4 + 2\alpha_0\beta_1 h_{t-1} + 2\alpha_1\beta_1 X_{t-1}^2 h_{t-1} + \beta_1^2 h_{t-1}^2\right) \\
&= 3\left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 E\left(X_{t-1}^2\right) + \alpha_1^2 E\left(X_{t-1}^4\right) + 2\alpha_0\beta_1 E\left(h_{t-1}\right) + 2\alpha_1\beta_1 E\left(X_{t-1}^2 h_{t-1}\right) + \beta_1^2 E\left(h_{t-1}^2\right)\right)
\end{aligned}$$

On a: $E\left(X_{t-1}^2\right) = E\left(h_{t-1}\right) = V(X_t), E\left(h_{t-1}^2\right) = \frac{1}{3}E\left(X_t^4\right)$ et $E\left(X_{t-1}^2 h_{t-1}\right) = E\left(h_{t-1}^2\right)$.
Donc:

$$\left(1 - 3\alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1\right) E\left(X_t^4\right) = 3\alpha_0^2 + 6\alpha_0\alpha_1 V(X_t) + 6\alpha_0\beta_1 V(X_t)$$

d'où

$$E\left(X_t^4\right) = 3\alpha_0^2 \frac{1 + \alpha_1 + \beta_1}{\left(1 - \alpha_1 - \beta_1\right)\left(1 - \left(\alpha_1 + \beta_1\right)^2 - 2\alpha_1^2\right)}$$

Enfin,

$$K = 3\frac{\left(1 - \left(\alpha_1 + \beta_1\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\alpha_1 + \beta_1\right)^2 - 2\alpha_1^2\right)}.$$

II) 1. Ecrire le modèle $GARCH(1,1)$ avec les coefficients: $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.8$

$$X_t = u_t\sqrt{h_t} \text{ où } u_t \rightarrow iidN(0,1) \text{ et } h_t = 1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.8h_{t-1}.$$

2. Calculer: $E(X_t)$, $E(X_t/I_{t-1})$ et $V(X_t/I_{t-1})$.
D'aprés **I:**

$$E(X_t) = 0, E(X_t/I_{t-1}) = 0 \text{ et } V(X_t/I_{t-1}) = h_t$$

3. Ecrire X_t^2 sous forme $ARMA$, en déduire $V(X_t)$.
$h_t = 1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.8h_{t-1}$, on ajoute X_t^2 des deux cotés:

$$X_t^2 = 1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.8h_{t-1} + X_t^2 - h_t$$

On pose $v_t = X_t^2 - h_t$, qui est un BB faible donc $h_t = X_t^2 - v_t$, d'où

$$X_t^2 = 1 + 0.9X_{t-1}^2 - 0.8v_{t-1} + v_t \sim ARMA\,(1,1)$$

On déduit $V(X_t) = \frac{1}{1-0.9} = 10$.
4. Calculer la Kurtosis de ce processus.
On trouve $K = 3.\,352\,9$.
III)- Soit le processus suivant: $Y_t = 3 + 0.7Y_{t-1} + \varepsilon_t$ où ε_t est le modèle $GARCH(1,1)$ défini en II**.**
1. Déduire de II: $E(Y_t)$, $E(Y_t/I_{t-1}), V(Y_t)$ et $V(Y_t/I_{t-1})$.

$$E(Y_t) = \frac{3}{0.3} = 10, \quad E(Y_t/I_{t-1}) = 3 + 0.7Y_{t-1},$$
$$V(Y_t) = \frac{10}{1-0.49} = 19.\,608 \text{ et } V(Y_t/I_{t-1}) = V(\varepsilon_t/I_{t-1}) = h_t.$$

2. Donner l'intervalle de confiance prévisionnelle de Y_{t+1} au seuil 5%. Conclure.

$$IC\,(Y_{t+1}) = \left[3 + 0.7Y_t \pm 1.96\sqrt{1 + 0.1\varepsilon_t^2 + 0.8h_t}\right].$$