5. Méthode théorique de réglage d'un régulateur PID :

Les méthodes théoriques (directes) sont très nombreuses et reposent sur la connaissance d'un modèle précis du système à commander. Les performances réelles obtenues dépendent de la qualité du modèle et de son aptitude à représenter le mieux possible le procédé.

Pour obtenir ce modèle, on peut partir des lois régissant les phénomènes physico-chimiques, notamment les lois de la chimie, de la thermique, de la mécanique, de l'hydraulique, de l'aérodynamique, de la mécanique des fluides, etc. A partir de là, tout processus peut être décrit sous la forme d'un ensemble d'équations mathématiques.

Connaissant ce modèle, il est possible de définir les caractéristiques du régulateur qui permettra de contrôler au plus près le processus par une des méthodes directes de synthèse.

Parmi les méthodes théoriques, on présenter la méthode du modèle: elle est basée sur l'imposition d'un modèle en boucle fermée à atteindre (performances souhaitées).

La structure de commande en boucle fermée est la suivante (**Fig 3.21**):

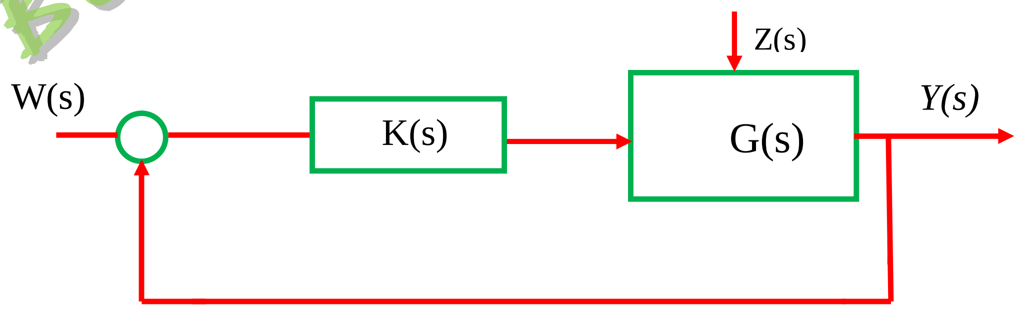

Figure 3.21: Structure de commande en boucle fermée.

La fonction de transfert en boucle fermée ***FTBO(s)*** est donnée par : $G(s)K(s)$

La fonction de transfert en boucle fermée *T(s)* est donnée par : $T(s)=\dfrac{FTBO(s)}{1+FTBO(s)}=\dfrac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$

5.1. Principe de la méthode:

Si la fonction de transfert en boucle fermée ***F(s)*** est donnée, c'est-à-dire qu'elle a été élaborée de manière à répondre au cahier des charges, le régulateur ***K(s)*** est déterminé tout simplement par la relation suivante:

$$K(s)=\frac{F(s)}{G(s)(1-F(s))}$$

Usuellement, le comportement souhaité en boucle fermée est celui d'un système d'ordre un ou d'ordre deux avec un gain statique unitaire, ce qui permet d'assurer une précision statique parfaite.

Une fois que la fonction de transfert en boucle fermée est établie, on détermine l'expression du régulateur ***K(s)*** par la formule ci-dessus. On réorganise ensuite cette expression de manière à faire apparaître la structure d'un régulateur **PID**.

Il peut arriver que ce calcul conduit à une fonction de transfert non réalisable, c'est-à-dire le degré de son numérateur est supérieur à celui du dénominateur.

Cette méthode est conditionné par la réalisabilité de ***K(s)*** et donc de la différence du degré des polynômes entre le numérateur et le dénominateur de ***K(s)***.

5.2. Exemple:

- **Modèle d'ordre 1 en boucle fermée.**

Soit $G(s)=\frac{2}{20s+1}$ la fonction de transfert du système.

Dans cet exemple on impose à ce que la fonction de transfert en boucle fermée soit du premier ordre deux avec les spécifications suivantes :

- Précision statique nulle
- Temps de réponse à 5% de l'ordre de 15s

Pour satisfaire la première contrainte sur la précision statique, il faut prendre le gain statique en boucle fermée égal à 1; soit *K*=1.

Pour satisfaire la deuxième contrainte sur la rapidité, il faut prendre la constante de temps en boucle fermée égal à Tr à 5% /3; soit τ_{bf}=5.

D'où la fonction de transfert désirée en boucle fermée est $F(s)=\frac{1}{5s+1}$:

$$K(s)=\frac{F(s)}{G(s)(1-F(s))}=\frac{\frac{1}{5s+1}}{\frac{2}{20s+1}\left(1-\frac{1}{5s+1}\right)}=\frac{\frac{1}{5s+1}}{\frac{2}{20s+1}\left(\frac{5s+1}{5s+1}-\frac{1}{5s+1}\right)}=\frac{\frac{1}{5s+1}}{\frac{2}{20s+1}\left(\frac{5s}{5s+1}\right)}$$

$$K(s)=\frac{\frac{1}{5s+1}}{\frac{2}{20s+1}\left(\frac{5s}{5s+1}\right)}=\frac{\frac{1}{5s+1}}{\frac{10s}{(20s+1)(5s+1)}}==\frac{\frac{1}{5s+1}}{\frac{10s}{(20s+1)(5s+1)}}=\frac{20s+1}{10s}$$

$$K(s)=\frac{20s+1}{10s}=2+\frac{1}{10s}=2(1+\frac{1}{20s})$$

De la fonction de transfert de *K(s)*, on peut facilement déterminer les paramètres d'un régulateur PI de structure parallèle $\begin{matrix} K_p = 2 \\ T_i = 10 \end{matrix}$ ou de structure série $\begin{matrix} K_p = 2 \\ T_i = 20 \end{matrix}$

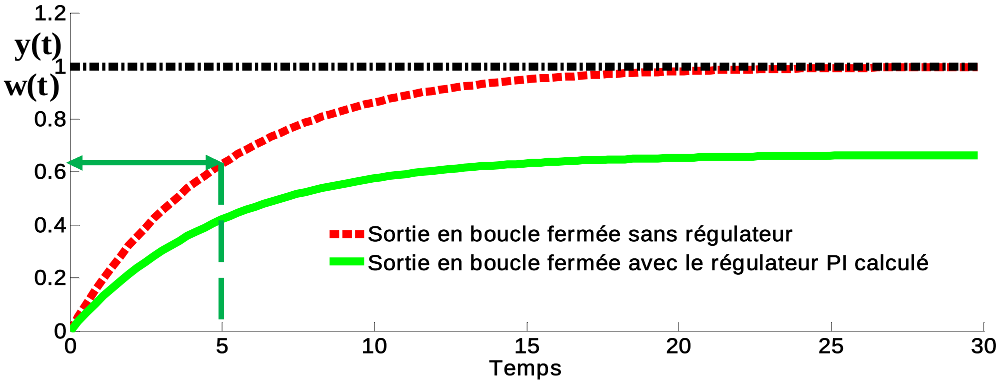

Figure 3.22: Réponse indicielle du système bouclé sans et avec régulateur.

- **Modèle de deuxième ordre en boucle fermée.**

Soit $G(s)=\dfrac{2}{s^2+2s+1}$ la fonction de transfert du système.

Dans cet exemple on impose à ce que la fonction de transfert en boucle fermée soit du deuxième ordre avec les performances suivantes:

- Précision statique parfaite
- Dépassement indiciel maximal inférieur à 5%
- Temps de réponse à 5% de l'ordre de 1.5s

La fonction de transfert désirée en boucle fermée peut s'écrire sous la forme canonique :

$$F(s)=\frac{Kw_n{}^2}{s^2+2.\xi.w_n.s+w_n{}^2}$$

Pour satisfaire la première condition sur la précision statique, il faut prendre le gain statique en boucle fermée égal à 1; soit *K*=1.

La deuxième contrainte sera satisfaite en prenant $\xi=0.7$, puisque d'après les caractéristiques des systèmes d'ordre deux, on sait que pour $\xi=0.7$, le dépassement est 4.6% et le produit $Tr_{5\%}$ par w_n est égal à 3. De cette relation on déduit w_n par :

$$w_n=\frac{3}{Tr_{5\%}}=\frac{3}{1.5}=1\,rad/s\,.$$

D'où la fonction de transfert désirée en boucle fermée est $F(s)=\dfrac{4}{s^2+2.8s+4}$:

D'où la figure (**Fig 3.23)** représente la réponse indicielle de *F(s)*, il est claire que le temps de réponse est 1.5 s ainsi le premier dépassement est inférieur à 5%.

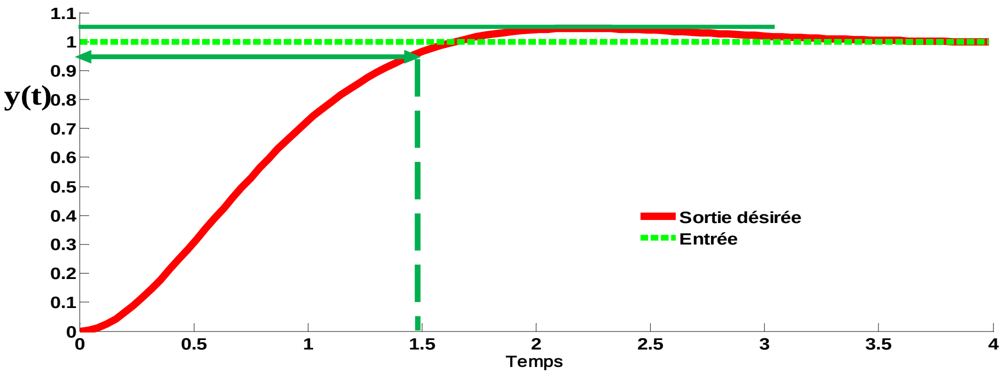

Figure 3.23: Réponse indicielle du modèle d'ordre 2 désiré.

$$K(s)=\frac{F(s)}{G(s)(1-F(s))}=\frac{\dfrac{4}{s^2+2.8s+4}}{\dfrac{2}{s^2+2s+1}\left(1-\dfrac{4}{s^2+2.8s+4}\right)}=\frac{\dfrac{1}{s^2+2.8s+4}}{\dfrac{2}{s^2+2s+1}\left(\dfrac{s^2+2.8s+4}{s^2+2.8s+4}-\dfrac{4}{s^2+2.8s+4}\right)}$$

$$K(s)=\frac{\dfrac{4}{s^2+2.8s+4}}{\dfrac{2}{s^2+2s+1}\left(\dfrac{s^2+2.8s+4}{s^2+2.8s+4}-\dfrac{4}{s^2+2.8s+4}\right)}=\frac{\dfrac{4}{s^2+2.8s+4}}{\dfrac{2}{s^2+2s+1}\left(\dfrac{s^2+2.8s}{s^2+2.8s+4}\right)}=\frac{2(s^2+2s+1)}{s^2+2.8s}$$

$$K(s)=\frac{2(s^2+2s+1)}{s^2+2.8s}=\frac{2(s+1)(s+1)}{s^2+2.8s}=\frac{2(s+1)(s+1)}{s(s+2.8)}=\frac{2(s+1)(s+1)}{2.8s(\frac{s}{2.8}+1)}=0.71\frac{(s+1)(s+1)}{s(\frac{s}{2.8}+1)}$$

$$\Rightarrow K(s)=0.71\frac{(s+1)(s+1)}{s(\frac{s}{2.8}+1)}=0.71\left(\frac{(s+1)}{s}\right)\left(\frac{(s+1)}{(0.36s+1)}\right)=0.71\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(\frac{s+1+0.64s-0.64s}{(0.36s+1)}\right)$$

$$\Rightarrow K(s)=0.71\times\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{0.64s}{(0.36s+1)}\right)$$

Il s'agit d'un régulateur PID de type série filtré $K_p = 0.71 \quad T_i = 1 \quad T_d = 0.64$.

Cette méthode est facile dans son principe. Néanmoins, on peut citer les difficultés d'appliquer cette méthode :

- La traduction des éléments du cahier des charges pour obtenir la fonction de transfert désirée en boucle fermée ***F(s)***.
- Il n'est pas toujours possible d'obtenir un régulateur réalisable au sens physique des termes, c'est-à-dire le degré du numérateur de ***K(s)*** est inférieur ou égal à celui de son dénominateur.
- Cette méthode ne convient pas pour les systèmes pour lesquels la fonction de transfert *G(s)* possède un zéro instable c'est-à-dire à partie réelle positive ou pour les systèmes possédant un retard pur.

La figure (**Fig 3.24)** fournit la réponse indicielle du système bouclé avec le régulateur PID obtenu, théoriquement cette réponse est presque la même que la réponse désirée représenté par (**Fig 3.23)**.

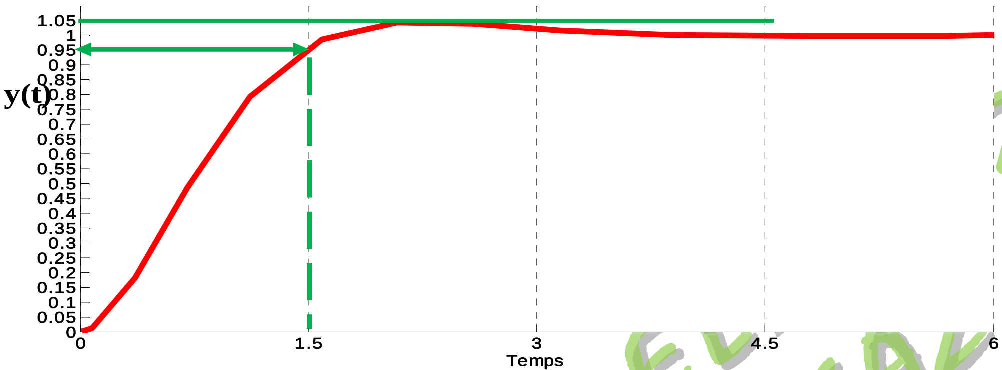

Figure 3.24: Réponse indicielle du système bouclée avec PID série filtré.