4. Régulateur PID :

La loi de commande (Algorithme) du régulateur la plus classique est l'association des trois actions élémentaires (Proportionnelle, Intégrale et **Dérivée**). C'est le régulateur **PID.**

Action Proportionnelle:	La sortie du correcteur est proportionnelle à l'erreur issue du comparateur. En régime permanent, il existe une erreur statique (grandeur réglée différente de la consigne). Une augmentation du gain proportionnel entraine une diminution de cette erreur mais rend le système de plus en plus instable jusqu'à devenir oscillatoire, on parle alors de correcteur TOR (**Tout** Ou **Rien**).
Action Intégrale:	Cette action permet d'annuler l'erreur statique mais ralenti le système.
Action Dérivé:	Cette action permet d'anticiper et donc de compenser le retard introduit par l'action intégrale.

4.1. Action Proportionnelle :

Kp **:** gain ou amplification**.** Lorsque les signaux sont exprimés sous forme de pourcentage, le cas le plus courant : le gain n'a pas d'unité.

L'équation temporelle de cette action est notée par :

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + u_0$$

Où $\boldsymbol{u_0}$ lorsque l'erreur est nulle. Cette valeur permet de commander l'actionneur avec une valeur non nulle. En effet, pour une vanne par exemple, une commande nulle est équivalente à une ouverture ou une fermeture totale. Or pour un système, il faut garder une certaine valeur à la grandeur réglante pour maintenir constante la mesure. La valeur $\boldsymbol{u_0}$ est donc réglée pour le point de fonctionnement.

La fonction de transfert du régulateur proportionnel s'obtient en prenant la transformé de Laplace de l'équation précédente comme suit :

$$K(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p$$

Comme exemple : avec un retour unitaire sur un système du deuxième ordre

$$G(s) = \frac{K w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

La fonction de transfert de la boucle fermée :

$$H(s) = \frac{Kp.K.w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + Kp + w_n^2}$$

Avec une action proportionnelle il y aura la possibilité de modifier la pulsation naturelle du système (w_n) et aussi le coefficient d'amortissement (ξ). Et l'erreur statique due ce type de système d'autant plus faible que $\boldsymbol{K_p}$ grand.

Comme la valeur de $2.\xi.w_n$ est constante, donc l'augmentation de la pulsation w_n naturelle en boucle fermée mène à la diminution de ξ.

	BO	BF	Erreur Statique	Stabilité
w_n	w_n^2	$Kp + w_n^2$ $\nearrow$		
ξ	ξ	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Un inconvénient majeur du régulateur proportionnel est son incapacité à éliminer les erreurs en régime permanent, après un changement de point de consigne ou une charge. A cause de cette limitation, le contrôleur proportionnel ne s'emploie que rarement.

4.1.1. Bande Proportionnelle (Proportionnal band) :

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + u_0$$

La bande proportionnel P_b est la plage d'erreur dans laquelle $u_{\min} \le u(t) \le u_{\max}$

Ou encore $$u_{\min} - u_{\max} = K_p P_b$$

Si on considère $$u_{\min} - u_{\max} = 100\% \text{ alors}$$

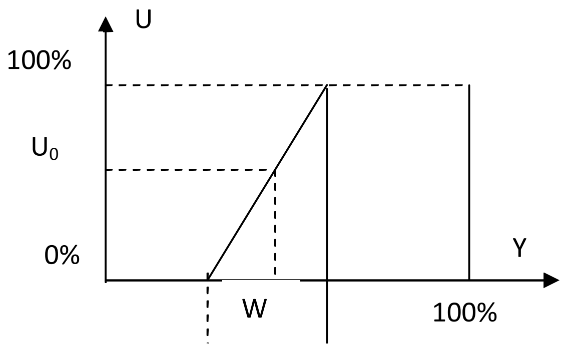
$$K_p = \frac{100}{P_b}$$

$$u(t) = \frac{1}{P_b}\varepsilon(t) + u_0$$

Il faut noter que pour une $\boldsymbol{P_b}$ supérieur à 100% entraîne une variation réelle de $\boldsymbol{U}$ limitée et inférieur à 100%. (pour $\boldsymbol{P_b}$= 200% on a ΔU=50%). Généralement, la valeur de réglage proposée par le fabriquant est comprise entre 2% et 1000%. Par exemple pour une valeur de $\boldsymbol{P_b}$ =50% donne

$$Kp = \frac{1}{50\%} = \frac{100}{50} = 2$$

Pour une valeur de $\boldsymbol{P_b}$ =200% donne $Kp = \frac{1}{200\%} = \frac{100}{200} = 0.5$



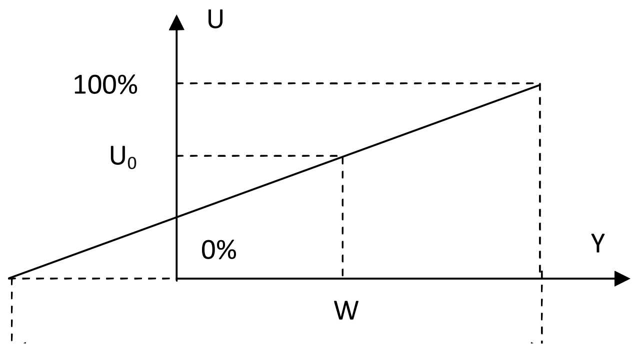


Figure 2.14: La bande Proportionnelle.

Un tel régulateur effectue l'opération de multiplication du signal de sortie par coefficient K_p , de plus il inverse le signal à la sortie . Sa réponse indicielle est représentée sur la figure (**Fig 2. 15**):

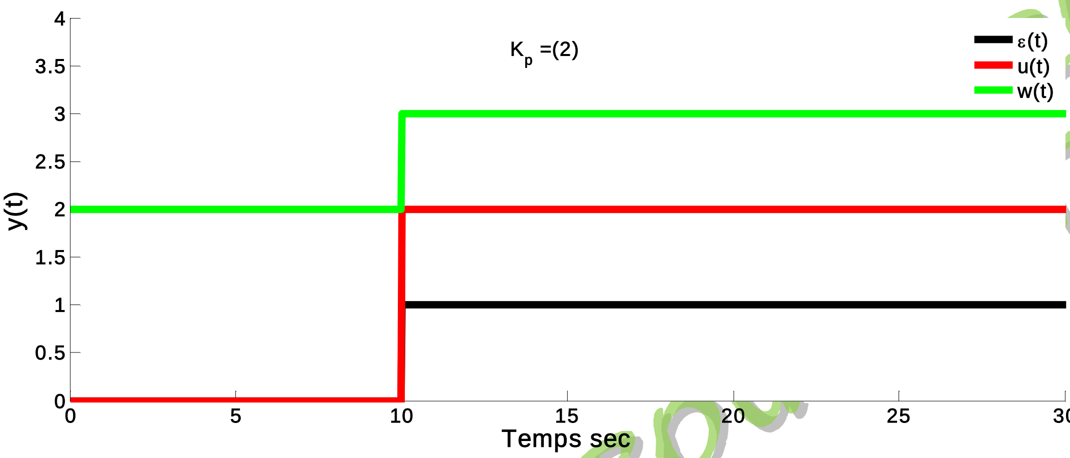


Figure 2.15: Réponse indicielle d'un Régulateur Proportionnel.

Exemple : Considérons le modèle du premier ordre $\frac{1}{3s+1}$. La figure (**Fig 2. 16**) présente la réponse à un échelon de consigne unitaire en boucle fermée avec un régulateur proportionnel pour différentes valeurs de K_p. La **figure** (**Fig 2. 17**) présente la réponse à un échelon de consigne unitaire en boucle ouverte avec un régulateur proportionnel pour différentes valeurs de K_p du système du deuxième ordre $\frac{1}{s^2+1.4s+1}$.

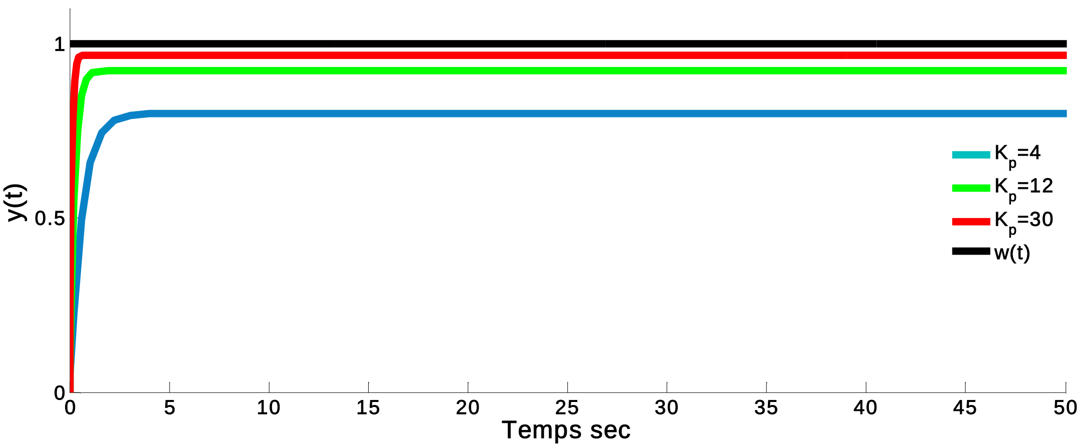


Figure 2.16 : Réponse indicielle d'un système du premier ordre bouclé avec régulateur proportionnel.

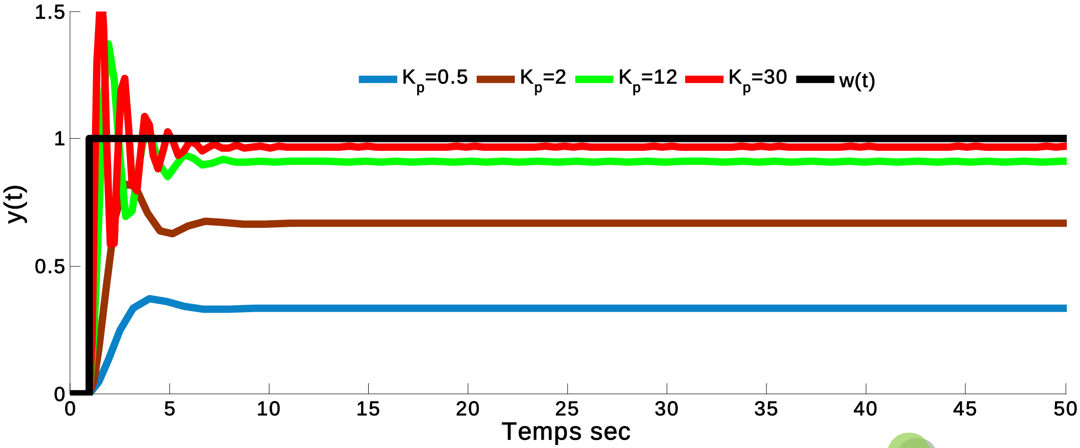


Figure 2.17 : Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre bouclé avec régulateur proportionnel.

Les deux figures (**Fig 2.16**, **Fig 2.17**) montrent que l'augmentation de K_p diminue l'écart en régime statique, et augmente la rapidité en régime dynamique tant que le système n'est pas trop oscillatoire.

4.1.2. Réalisation Régulateur Proportionnel Analogique (avec des amplificateurs opérationnels)

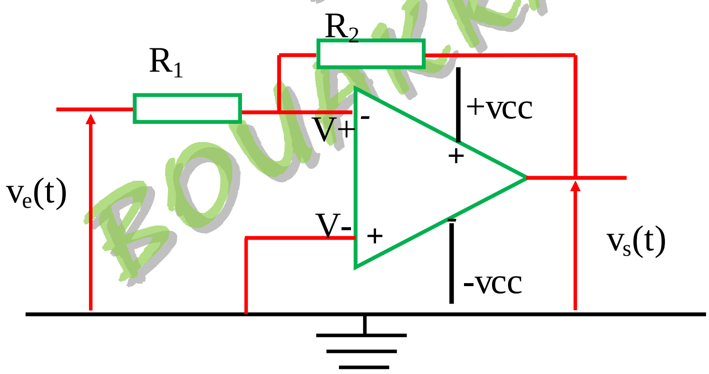


Figure 2.18 : Réalisation d'un Régulateur Proportionnel.

Si on suppose que l'amplificateur opérationnel est idéale (c. à. d) a une impédance d'entrée infinie.

On applique la loi des mailles on trouve :

$$Ve = R_1.i_1 + e$$

$$R_2 i_2 + e = V_s$$

$$e = V^+ - V^-$$

$$e = V^+ - V^- = Z.i_e$$

$$Z \approx \infty \Rightarrow e \approx 0 \Rightarrow i_1 = i_2$$

$$i_1 = i_2 = \frac{V_e}{R_1} \qquad V_s = R_2.i_2 = R_2.\frac{V_e}{R_1}$$

La fonction de transfert de ce régulateur s'écrit :

$$\left.\begin{matrix} Z_1 = R_1 \\ Z_2 = R_2 \end{matrix}\right] \Rightarrow G_R(S) = -\frac{V_s(S)}{V_e(S)} = \frac{R_2}{R_1} = K_p$$

4.2. Régulateur intégral.

La sortie d’un régulateur intégral est de la forme :

$$u(t) = \int_0^t \varepsilon(t)dt$$

Le signal de sortie est proportionnel à l'intégral du signal d'entrée (erreur).

Le coefficient T_i est appelé la constante de temps intégrale et s’exprime en **sec**$^{-1}$. L’ajustage de T_i permet de doser l’effet de l’intégrale: T_i représente le temps nécessaire pour que la variation de sortie du régulateur soit égale à celle de l’amplitude d’une variation en échelon sur l’entrée du régulateur.

La fonction de transfert du régulateur intégral s’obtient en prenant la transformé de Laplace de l’équation précédente comme suit :

$$K(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{1}{Ts_i}$$

Sa réponse indicielle est représentée sur la figure (**Fig 2. 19**):

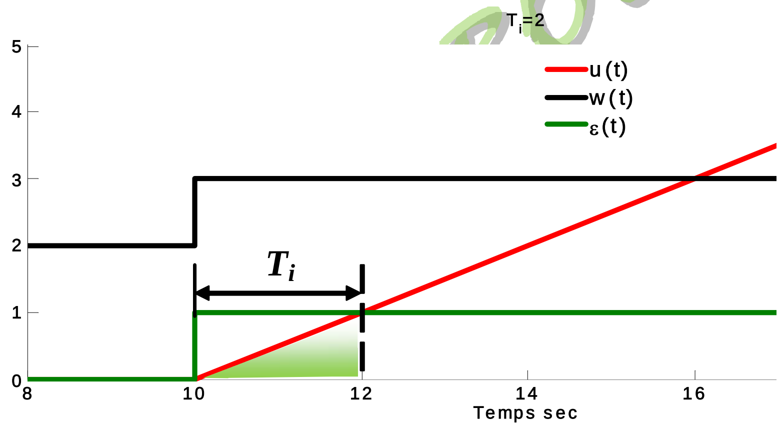


Figure 2.19 : Sortie d’un régulateur intégral pur.

Exemple : Considérons le modèle du deuxième ordre précédent. La figure (**Fig 2. 20**) présente la réponse à un échelon de consigne unitaire en boucle fermée avec un régulateur intégral pour différentes valeurs de T_i.

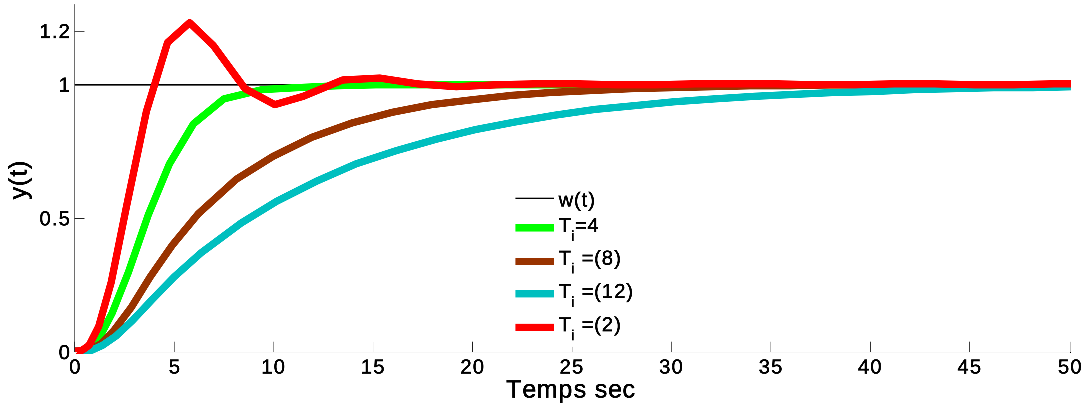


Figure 2.20 : Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre bouclé avec régulateur intégral.

4.2.1. Réalisation Régulateur Intégral Analogique (avec des amplificateurs opérationnels)

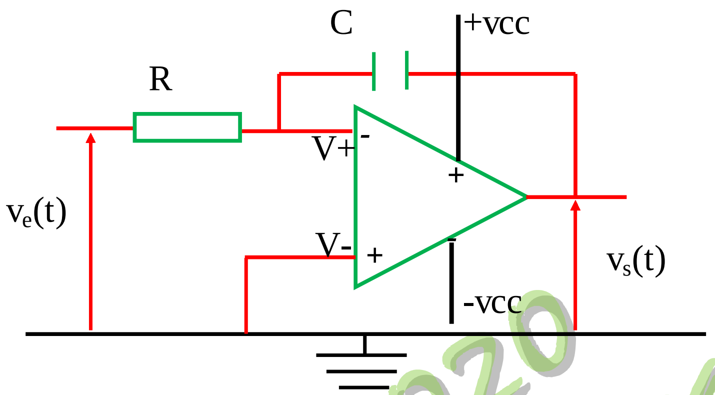


Figure 2.21: Réalisation d'un Régulateur Intégral.

$$V_s = V_C + e$$
$$V_e = R.i_R + e$$
$$e = Z_e.i_e$$
$$Z = \infty \Rightarrow e = 0 \qquad \Rightarrow G_i(S) = -\frac{V_s(S)}{V_e(S)} = \frac{1}{RCS}$$
$$e = 0 \Rightarrow i_R = i_C$$
$$i_C = C\frac{\partial V_C}{\partial t} = C\frac{\partial V_S}{\partial t}$$

$$V_e = R.i_C = R.C\frac{\partial Vs}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Rightarrow G_i(S) = \dfrac{1}{T_i S}\\ T_i = RC\end{array}}$$

4.3. Action dérivée

Le signal de sortie est proportionnel à la dérivée du signal d'entrée (erreur).

La sortie d'un régulateur intégral est de la forme :

$$u(t) = T_d\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

Le temps dérivé T_d s'exprimer en unité de temps est appelée temps de dérivée. La fonction de transfert est de la forme :

$$K(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = T_d S$$

L'objectif de l'action dérivée est d'anticiper les variations à venir du signal de mesure en appliquant une correction proportionnelle à sa vitesse de variation.

La réponse indicielle et celle à une rampe pour un dérivateur idéal est présentée sur la figure (**Fig 2. 22**):

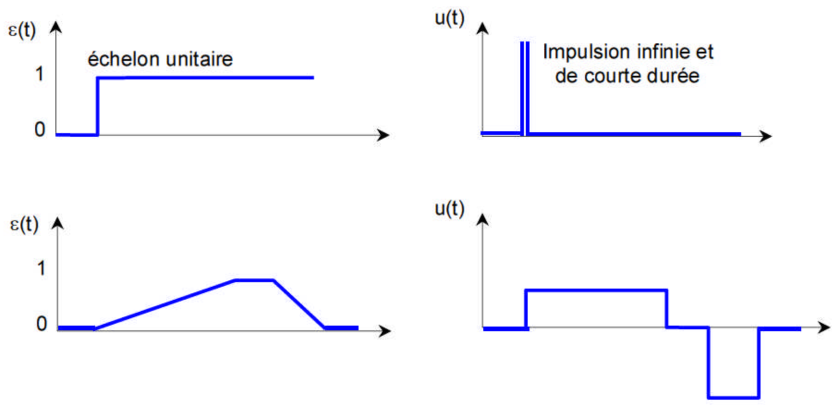


Figure 2.22 : Réponse indicielle et réponse en à une rampe d'une action dérivée.

Filtrage de la dérivée

En pratique, il n'est pas possible de réaliser un régulateur dérivée idéal et afin de limiter la sortie d'un régulateur ayant une action dérivée, en pratique l'action dérivée est filtrée en ajoutant un élément de premier ordre, on utilise en fait un module de dérivée filtrée :

$$K(s) = \frac{T_d S}{1 + \frac{T_d S}{N}}, N \geq 10$$

L'effet 'dérivée' est destiné à accélérer la réponse du régulateur. Cette accélération n'est en général pas souhaitée lors des changements de consigne, mais seulement pour corriger une erreur due à une perturbation.

Exemple : Considérons le modèle du deuxième ordre précédent. La figure (**Fig 2. 23**) présente la réponse à un échelon de consigne unitaire en boucle fermée avec un régulateur dérivé filtré pour différentes valeurs de T_d.

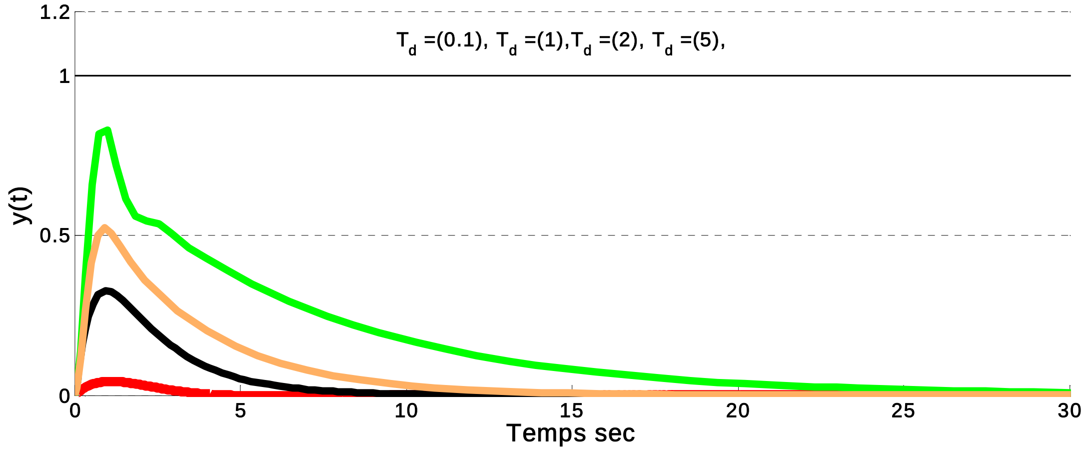


Figure 2.23: Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre bouclé avec action dérivée.

En régime dynamique il améliore la rapidité du système.

Le temps T_d est le temps pour que l'entrée W-Y augmente de la valeur de la sortie ***U***.

Plus T_d est grand, plus la valeur de la sortie ***U*** sera importante.

Pour supprimer l'action dérivée, il suffit de mettre T_d à 0.

L'action dérivée n'agit pas sur l'erreur statique mais elle améliore la stabilité et donc la précision dynamique (premier dépassement). Associée à l'action proportionnelle elle agit sur les hautes fréquences du système. L'action dérivée amplifie les bruits. C'est pourquoi cette action peut être associée à un filtre.

4.3.1. Réalisation action dérivée Analogique (avec des amplificateurs opérationnels)

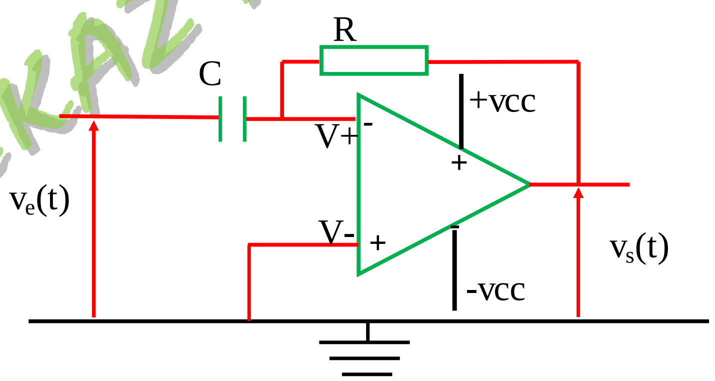


Figure 2.24: Réalisation d'un Régulateur Dérivée.

On obtient la fonction de transfert du régulateur.

Avec :

$$\left.\begin{matrix} Z_1 = 1/CS \\ Z_2 = R \end{matrix}\right] \Rightarrow G_R(S) = -\frac{V_s(S)}{V_e(S)} = RCS$$

avec : $T_d = RC$ Donc : $G_R(S) = T_d S$

Où :

T_d : constante du temps

$$V_s(t) = T_d \frac{dV_e(t)}{dt}$$

Généralement, les actions intégrale et dérivée ne s'emploient jamais seules mais en combinaison avec l'action proportionnelle.

Action	**Temps de montée**	**Dépassement**	**Temps de réponse**	**Erreur statique**
P	Augmente	Augmente	Chang. faible	Diminue
I	Diminue	Augmente	Augmente	Eliminée
D	Changement. faible	Diminue	Diminue	Chang. faible

5. Différentes structures d'un régulateur PID

Les régulateurs rencontrés sur les installations industrielles combinent les effets proportionnel, intégral et dérivée. Différentes possibilités d'associations des modules P, I et D existent. Ces structures sont fonctionnellement équivalentes, et il est facile de convertir les coefficients utilisés dans l'une pour obtenir ceux d'une autre]. Les configurations les plus utilisées sont:

5.1. Action Proportionnel intégrale (PI)

L'action intégrale est rarement utilisée seule, car son effet ne devient sensible que lorsque l'erreur dure depuis un certain temps .Pour obtenir une réponse initiale plus rapide, on l'utilise avec une action proportionnelle. On peut trouver deux structures des régulateurs **PI**, la structure parallèle et la structure série.

5.1.1. PI parallèle :

La sortie d'un régulateur PI parallèle est de la forme suivante :

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + \int_0^t \varepsilon(t) dt$$

La fonction de transfert d'un régulateur P-I parallèle est : $K(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p + \frac{1}{Ts_i}$

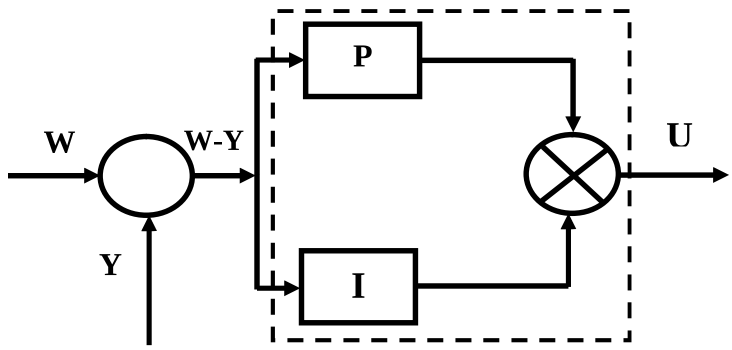


Figure 2.25 : Structure parallèle d'un Régulateur P.I.

Réponse indicielle

La figure (**Fig 2. 26**) présente la réponse (sorite) de ce type de régulateur, on observe la réponse $\boldsymbol{u(t)}$ à un échelon d'erreur, dont, la mesure reste constante aux bornes du régulateur et on relève la réponse $\boldsymbol{u(t)}$ du régulateur à un échelon de consigne. La réponse u(t) est alors composée de deux parties distinctes :

- ➢ Un échelon résultant de l'action proportionnelle ;
- ➢ Une rampe résultant de l'action intégrale;

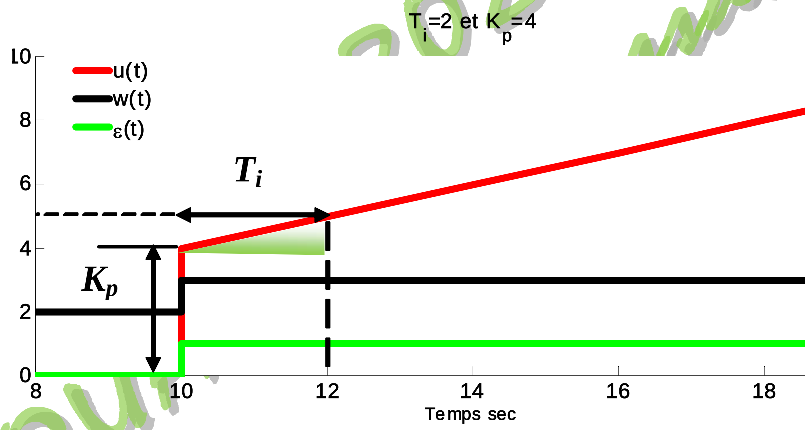


Figure 2.26: réponse indicielle d'un régulateur P-I parallèle.

5.1.2. PI Série

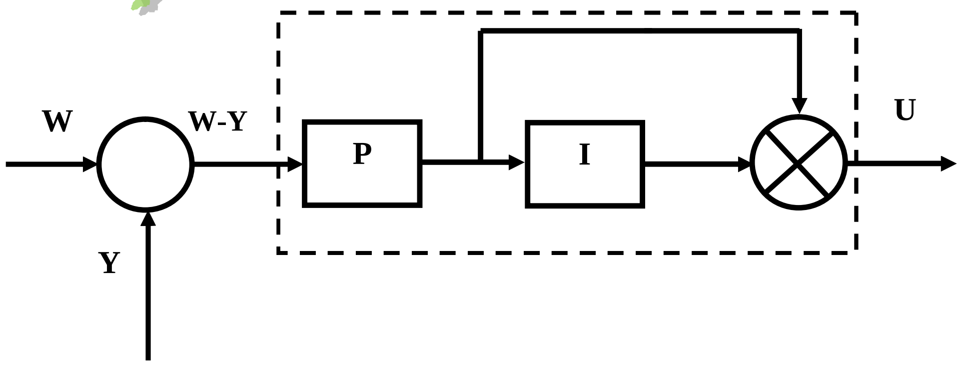


Figure 2.27: Structure série d'un Régulateur **PI**.

La sortie d'un régulateur PI série est de la forme suivante :

$$u = K_p(w-y) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t (w-y)dt + U_0$$

$$\boxed{K(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)}$$

La figure (**Fig 2.28**) présente la sorite de ce type de régulateur, on observe la réponse $\boldsymbol{u(t)}$ à un échelon d'erreur, dont la mesure reste constante aux bornes du régulateur et on relève la réponse $\boldsymbol{u(t)}$ du régulateur à un échelon de consigne. La réponse u(t) est alors composée de deux parties distinctes :

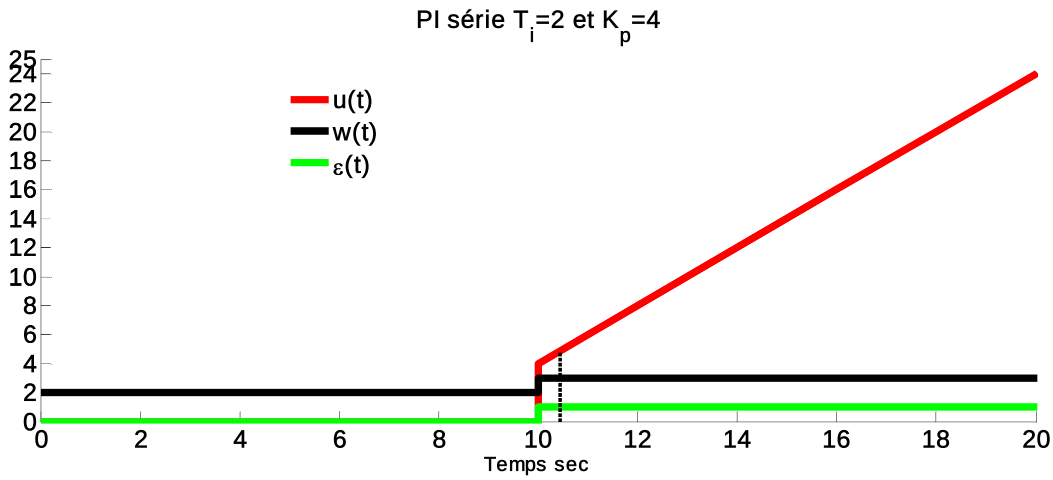


Figure 2.28: Réponse indicielle d'un régulateur **PI** série.

5.2. Action proportionnelle dérivée (PD)

L'objectif de l'action dérivée est d'anticiper les variations à venir du signal de mesure en appliquant une correction proportionnelle à sa vitesse de variation. L'action dérivée a un effet prédictif. La sortie d'un régulateur PD idéal est de la forme :

$$u = K_p(w-y) + \frac{K_p}{T_d}\frac{d(w-y)}{dt} + U_0$$

La fonction de transfert du régulateur PD idéal s'obtient en prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente:

$$\boxed{K(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p(1+T_d s)}$$

La figure (**Fig 2.29**) présente la réponse à un échelon de consigne unitaire en boucle fermée avec deux régulateurs différents, l'un proportionnelle Intégral **PI** et l'autre proportionnel dérivé **PD**

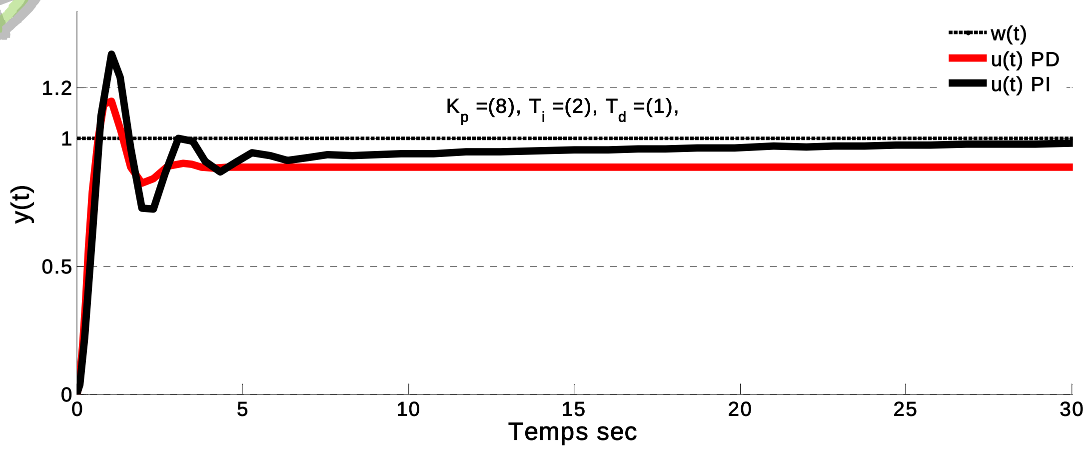


Figure 2.29: Réponse à un échelon de consigne unitaire en boucle fermée avec deux régulateurs différents.

D'après la figure (**Fig 2.29**) on remarque que:

- **PI:** Un grand dépassement ; un temps de montée rapide et un grand temps de réponse et une erreur statique nulle.
- **PD :** Diminution du dépassement; le temps de montée rapide presque le même que le régulateur PI, diminution du temps de réponse et une erreur statique remarquable.

5.3. Différentes structures d'un régulateur PID

5.3.1. PID série

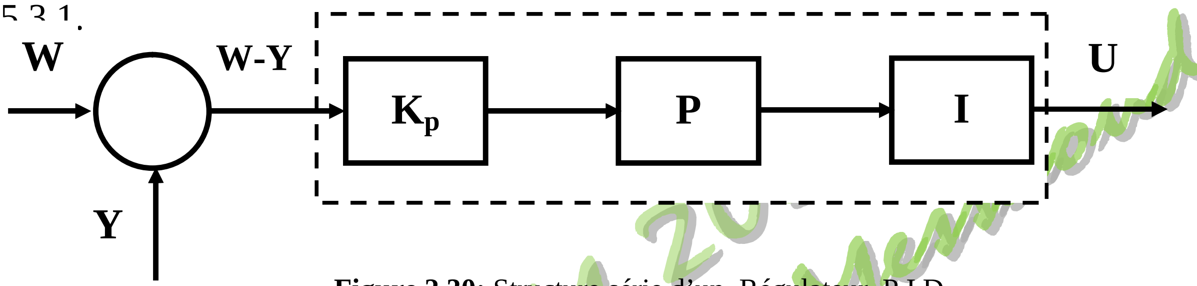


Figure 2.30: Structure série d'un Régulateur P.I.D.

La sortie d'un régulateur PID série est de la forme suivante :

$$u(t) = K_p\left(\frac{T_i + T_d}{T_d}\right)(w - y) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t (w - y)dt + K_p T_d \frac{d(w - y)}{dt} + U_0$$

La fonction de transfert du régulateur PID série s'obtient en prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente :

$$K(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)(1 + T_d s)$$

Réponse indicielle

La figure (**Fig 2.31**) présente la réponse indicielle d'un régulateur PI D structure série, on observe sa réponse à un échelon d'erreur, dont la mesure reste constante aux bornes du régulateur et on relève la réponse $\boldsymbol{u(t)}$ du régulateur à un échelon de consigne. La réponse ***u(t)*** est alors composée de trois parties distinctes:

- Un pic résultant de l'action dérivée ;
- Un échelon résultant de l'action proportionnelle ;
- Une rampe résultant de l'action intégrale;

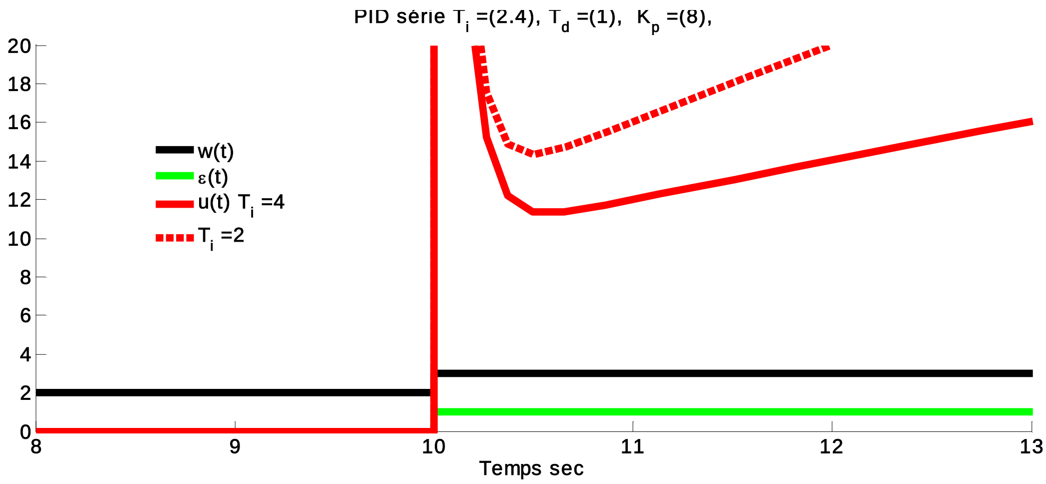


Figure 2.31: Réponse indicielle d'un régulateur PID série.

5.3.2. PID Parallèle

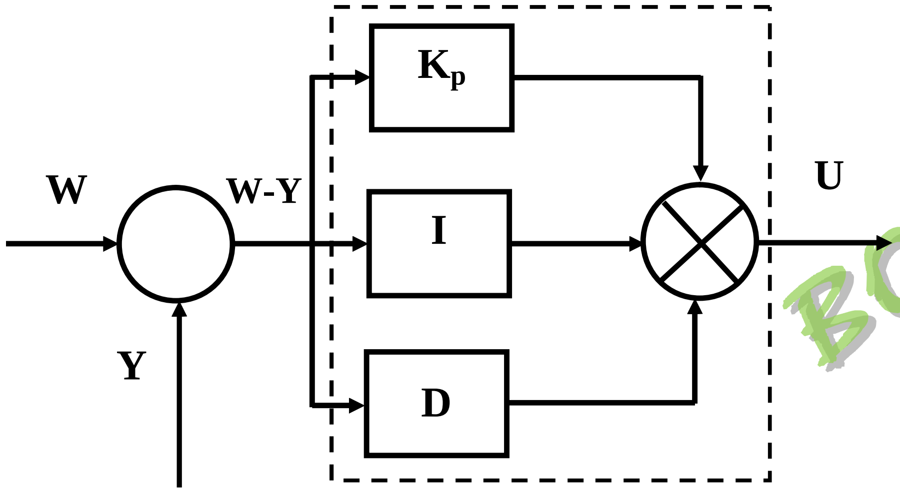


Figure 2.32: Structure parallèle d'un Régulateur P.I.D.

La sortie d'un régulateur PID parallèle est de la forme suivante :

$$u(t) = K_p(w(t) - y(t))(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t (w(t) - y(t))dt + T_d \frac{d(w(t) - y(t))}{dt} + U_0$$

La fonction de transfert du régulateur PID série s'obtient en prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente :

$$\boxed{K(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s}$$

Réponse indicielle

La figure (**Fig 2.33**) présente la réponse indicielle d'un régulateur PI D structure parallèle, on observe sa réponse à un échelon d'erreur, dont la mesure reste constante aux bornes du régulateur et on relève la réponse $\boldsymbol{u(t)}$ du régulateur à un échelon de consigne. La réponse u(t) est alors composée de trois parties distinctes:

➢Un pic résultant de l'action dérivée ;

➢ Un échelon résultant de l'action proportionnelle ;

➢ Une rampe résultant de l'action intégrale;

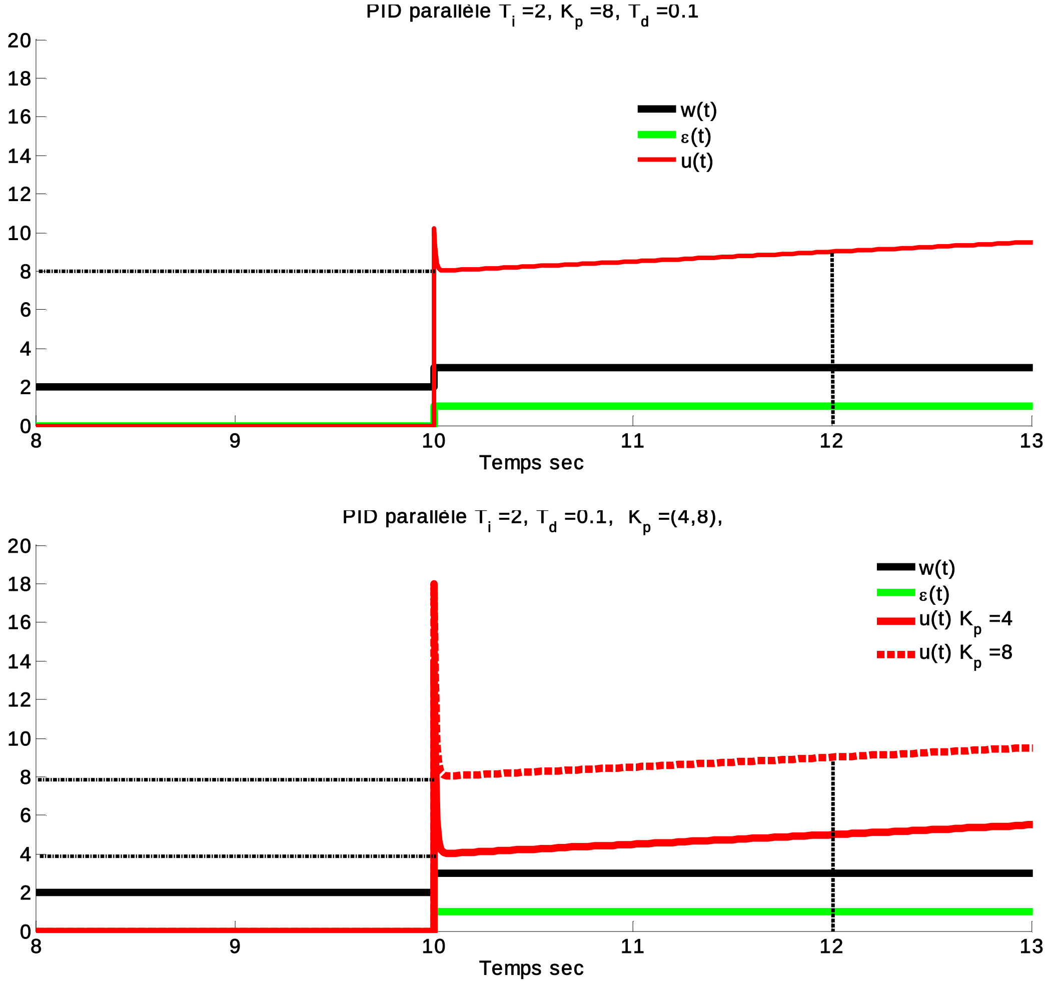


Figure 2.30: Réponse indicielle d'un régulateur PID parallèle.

5.3.3. PID structure mixte :

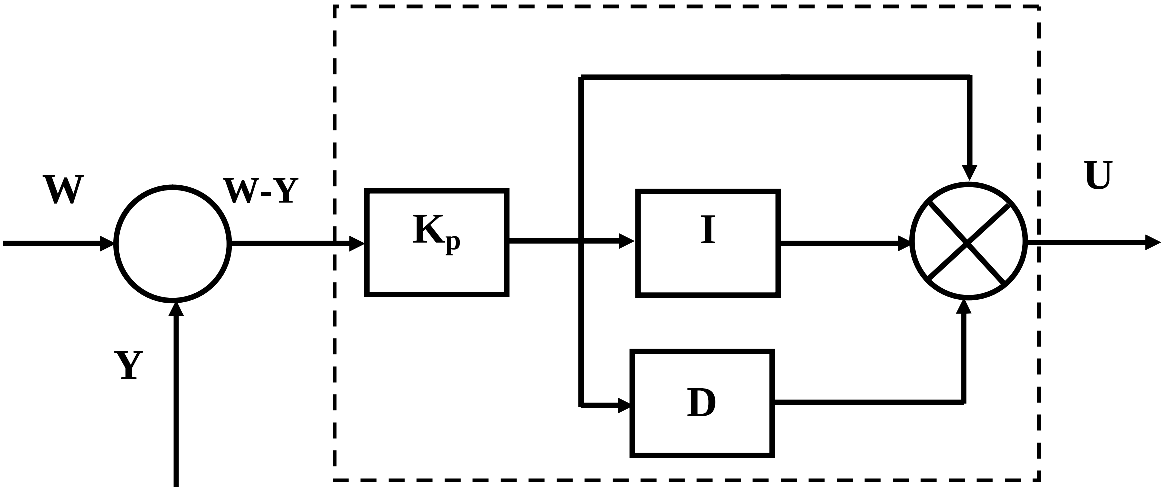


Figure 2.34: Structure mixte d'un Régulateur P.I.D.

La sortie d'un régulateur PID parallèle est de la forme suivante :

$$u(t) = K_p(w(t) - y(t))(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t (w(t) - y(t))dt + K_p T_d \frac{d(w(t) - y(t))}{dt} + U_0$$

La fonction de transfert obtenue est donnée par:

$$K(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$$

Réponse indicielle

On observe la commande d'un régulateur en réponse à un échelon d'erreur, dont la mesure reste constante aux bornes du régulateur et on relève la réponse $\boldsymbol{u(t)}$ du régulateur à un échelon de consigne. La réponse ***u(t)*** (**Fig 2.35**) est alors composée de trois parties distinctes :

➢Un pic résultant de l'action dérivée ;

➢ Un échelon résultant de l'action proportionnelle ;

➢ Une rampe résultant de l'action intégrale;

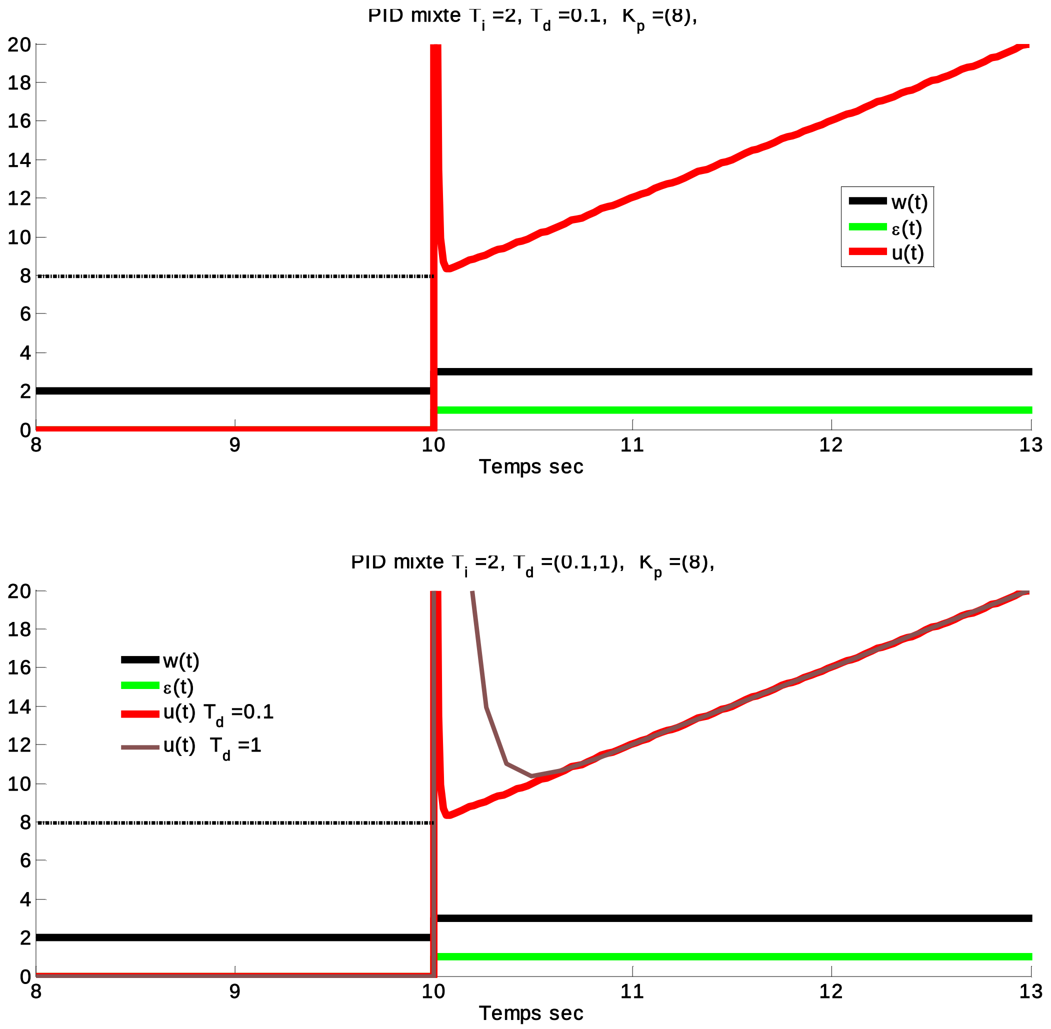


Figure 2.35: Réponse indicielle d'un régulateur PID parallèle.

6. Identification dune structure de régulateur PI.

Lorsque l'on dispose d'un régulateur **PI** dont on veut déterminer la structure, il faut maintenir la mesure constante aux bornes du régulateur. On relève la réponse $\boldsymbol{u(t)}$ du régulateur à un échelon de consigne, puis on modifie la valeur du K_p du régulateur et on procède à un nouvel échelon de consigne.

- Si la pente de la réponse **u(t)** reste inchangée, alors le régulateur **PI** possède une structure **parallèle**.

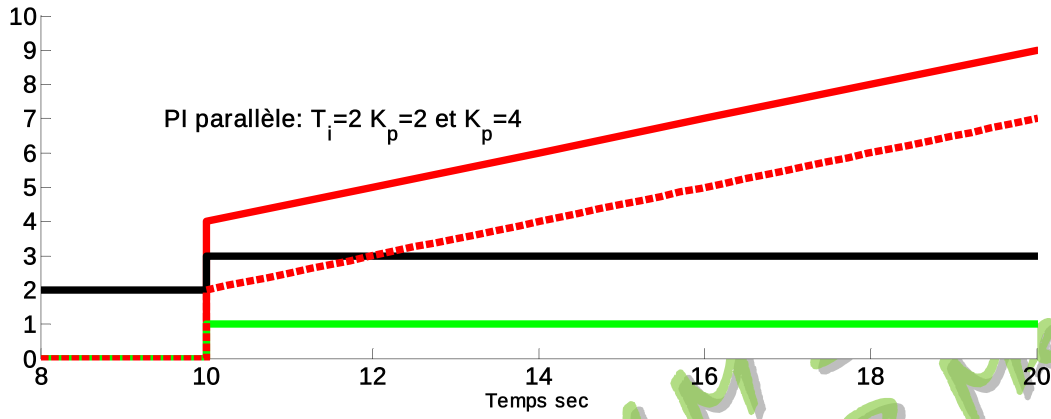


Figure 2.36: Identification de la structure parallèle d'un Régulateur P.I .

- Si la pente de la réponse ***u(t)*** est modifiée, alors le régulateur **PI** possède une structure ***série***.

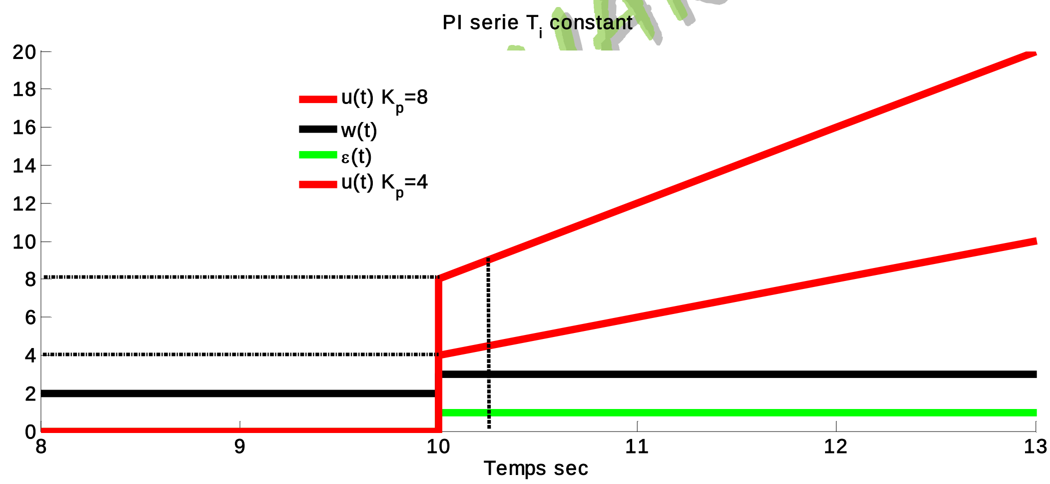


Figure 2.37: Identification de la structure série d'un Régulateur P.I.

7. Indentification d'une structure de régulateur PID

Pour identifier une structure parallèle, on fait la même façon que pour le régulateur PI : Pour $\mathbf{T_d} = \mathbf{0}$, on fait varier la valeur du **K*p*.**

Si, à mesure constante, un échelon de consigne provoque des rampes de ***u (t)*** de pente identique, cela veut dire que le régulateur possède une structure parallèle figure (**Fig 2.38**).

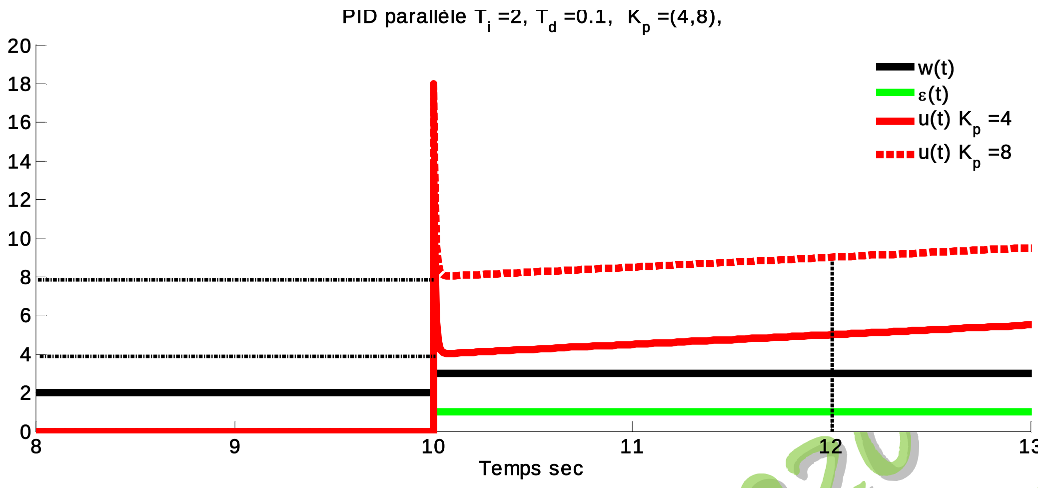


Figure 2.38: Identification de la structure parallèle d'un Régulateur P.I.D.

Dans le cas contraire, on fixe **K_p** et T_d à des valeurs fixes et on fait des échelons de consigne pour des valeurs différentes de T_i.

- Si le saut effectué à t = 0 par ***u (t)*** reste constant, cela signifie que la structure est mixte.

La figure (**Fig 2.39**) présente la sortie d'un régulateur PID mixte, dans le cas où on fixe **K_p** et T_d et t_i variable.

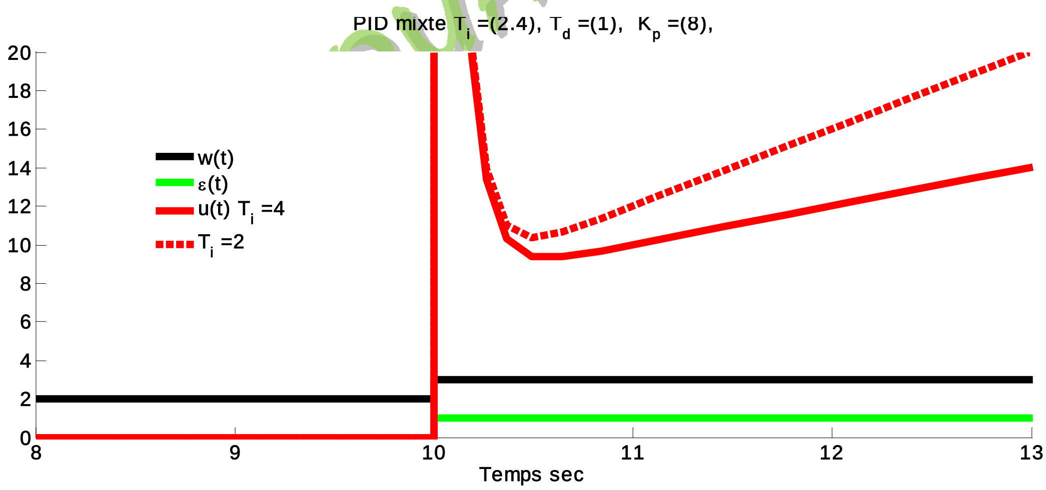


Figure 2.39: Identification de la structure mixte d'un Régulateur P.I.D.

Si le saut effectué à t = 0 par ***u(t)*** varie avec T_i, cela signifie que le PID a une structure série. La figure (**Fig 2.40**) présente la sortie d'un régulateur PID série, dans le cas où on fixe **K_p** et T_d et T_i variable.

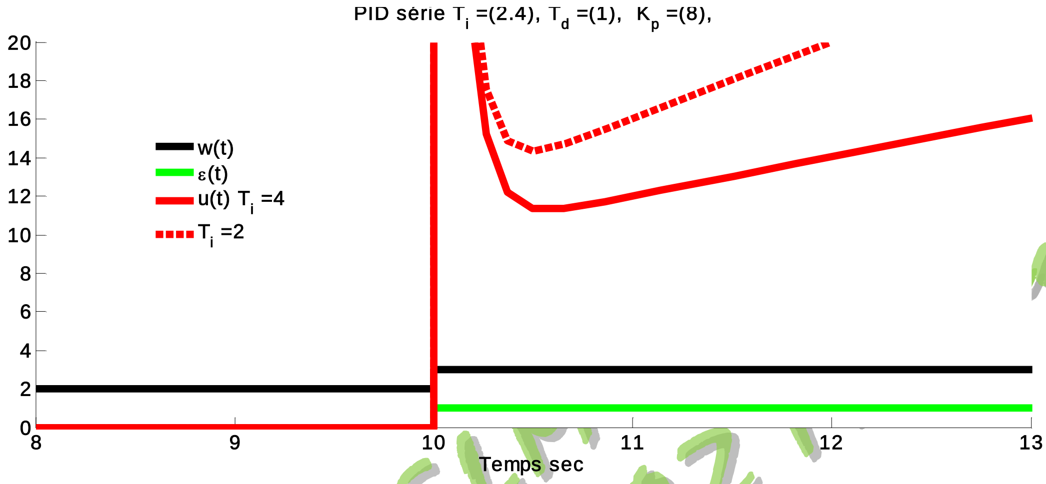


Figure 2.40: Identification de la structure série d'un Régulateur P.I.D.

Généralement, le PID mixte est le plus adapté par rapport aux deux autres types, car il donne de meilleures performances à tous les niveaux (temps de montée, temps de réponse et dépassement).