Système de numération

Un processeur est un système automatique de traitement d'information. Le mot information, dont dérive le terme informatique est pris dans le sens "éléments significatifs" tels que texte, parole, image, mesure d'une grandeur physique, nombre, etc...
Cette information devant être représentée sous une forme physique appropriée au traitement quelle doit subir, la première étape consiste en une transformation appelée codage.

Nous coderons donc les signaux (images, paroles, textes) sous forme de 0 et de 1, compréhensibles par une machine.
Notre système conventionnel de comptage en base 10 incompatible avec la machine, nous à donc conduit à étudier d'autres systèmes de numération.
Les systèmes de numération consistent à utiliser un ensemble de symboles appelés digits (comptage avec les doigts) ainsi qu'une convention d'écriture.
Le nombre de digits utilisés correspond à la base du système.

Organisation du cours

Système de numération décimal, octal, binaire et hexadécimal

Les systèmes de numérations binaire et hexadécimal sont très utilisés dans les domaines de l'électronique et de l'informatique. Tout programmeur se doit de les connaître en plus des systèmes décimal et octal.

Principe d'une base

- La base est le nombre qui sert à définir un système de numération.
  La base du système décimal est dix alors que celle du système octal est huit.
  Quelque soit la base numérique employée, elle suit la relation suivante :

  ou : **b**i : chiffre de la base de rang i
  et : **a**i : puissance de la base a d'exposant de rang i

  Exemple : base 10
  1986 = (1 x 103) + (9 x 102) + (8 x 101) + (6 x 100)

Le système décimal

- Le système décimal est celui dans lequel nous avons le plus l'habitude d'écrire.
  Chaque chiffre peut avoir 10 valeurs différentes :
  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de ce fait, le système décimal a pour **base** 10.
  Tout nombre écrit dans le système décimal vérifie la relation suivante :
  745 = 7 x 100 + 4 x 10 + 5 x 1
  745 = 7 x 10 x 10 + 4 x 10 + 5 x 1
  745 = 7 x 102 + 4 x 101 + 5 x 100

  Chaque chiffre du nombre est à multiplier par une puissance de 10 : c'est ce que l'on nomme le **poids du chiffre**.
- L'exposant de cette puissance est nul pour le chiffre situé le plus à droite et s'accroît d'une unité pour chaque passage à un chiffre vers la gauche.
  12 435 = 1 x 104 + 2 x 103 + 4 x 102 + 3 x 101 + 5 x 100 .

  Cette façon d'écrire les nombres est appelée **système de numération de position**.

  Dans notre système conventionnel, nous utilisons les puissances de 10 pour **pondérer** la valeur des chiffres selon leur position, cependant il est possible d'imaginer d'autres systèmes de nombres ayant comme base un nombre entier différent.

Le système octal

- Le système octal utilise un système de numération ayant comme base 8 (octal => latin octo = huit).
  Il faut noter que dans ce système nous n'aurons plus 10 symboles mais 8 seulement :

  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

  Ainsi, un nombre exprimé en base 8 pourra se présenter de la manière suivante :

  (745)8

  Lorsque l'on écrit un nombre, il faudra bien préciser la base dans laquelle on l'exprime pour lever les éventuelles indéterminations (745 existe aussi en base 10). Ainsi le nombre sera mis entre parenthèses (745 dans notre exemple) et indicé d'un nombre représentant sa base (8 est mis en indice).
- Cette base obéira aux même règles que la base 10, vue précédemment, ainsi on peut décomposer (745)8 de la façon suivante :

(745)8 = 7 x 82 + 4 x 81 + 5 x 80
(745)8 = 7 x 64 + 4 x 8 + 5 x 1
(745)8 = 448 + 32 + 5

Nous venons de voir que :

(745)8 = (485)10

Le système binaire

- Dans le système binaire , chaque chiffre peut avoir 2 valeurs différentes : 0, 1.

  De ce fait, le système a pour base 2.
  Tout nombre écrit dans ce système vérifie la relation suivante :

  (10 110)2 = 1 x 16 + 0 x 8 + 1 x 4 + 1 x 2 + 0 x 1
  donc : (10110)2 = (22)10 .

  Tous les systèmes de numération de position obéissent aux règles que nous venons de voir.

  Tous les systèmes de numération de position obéissent aux règles que nous venons de voir.

Tableau récapitulatif

Système décimale	Système octal	Système binaire
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111
8	10	1000
9	11	1001
10	12	1010
11	13	1011
12	14	1100
13	15	1101
14	16	1110
15	17	1111
16	20	10000
17	21	10001
-	-	-
-	-	-
63	77	111111
64	100	1000000
65	101	1000001

Le système hexadécimal

- Le système hexadécimal utilise les 16 symboles suivant :
  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
  De ce fait, le système a pour base 16.
  Un nombre exprimé en base 16 pourra se présenter de la manière suivante :

  (5AF)16

  La correspondance entre base 2, base 10 et base 16 est indiquée dans le tableau ci-après :

Base 10	Base 16	Base 2
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Le système hexadécimal

- Le nombre (5AF)16 peut se décomposer comme suit :

(5AF)16 = 5 x 162 + A x 161 + F x 160

En remplaçant A et F par leur équivalent en base 10, on obtient :

(5AF)16 = 5 x 162 + 10 x 161 + 15 x 160

(5AF)16 = 5 x 256 + 10 x 16 + 15 x 1

donc = (5AF)16 = (1455)10

Conversion décimal binaire, octal, hexadécimal et changement de base

- Conversion d'un nombre de base quelconque en nombre décimal

  En exposant les principes des **systèmes de numération** de position, nous avons déjà vu comment convertir les nombres de base 8, base 2 et base 16 en nombres décimaux.

- Conversion d'un nombre décimal en nombre binaire

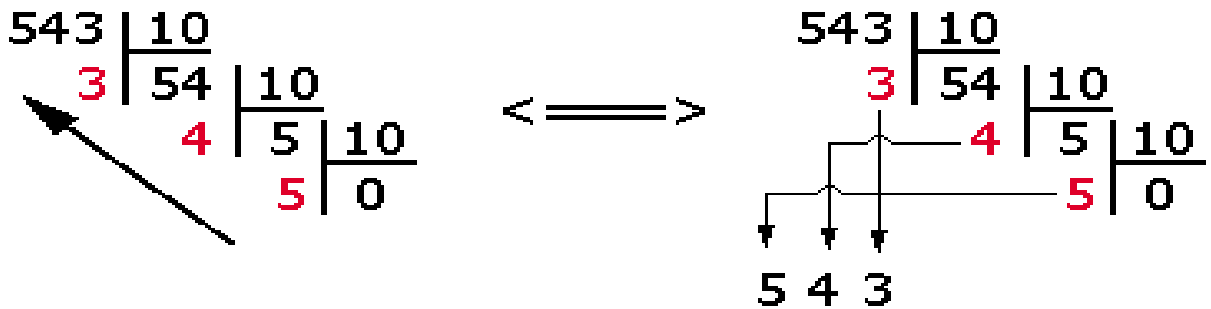
Pour expliquer ce type de conversion, on peut revenir sur le système décimal. Si nous divisons le nombre (543)10 par 10, nous obtenons comme quotient 54 et 3 comme reste. Cela signifie que ce nombre équivaut à :

(54 x 10) + 3

Le reste 3 est le chiffre indiquant le nombre d'unités.

En redivisant ce quotient (54) par 10, nous obtenons 5 comme deuxième quotient et 4 comme reste. Ce reste donne le deuxième chiffre du nombre, donc celui des dizaines.

- Enfin, si l'on divise ce deuxième quotient par 10, nous obtenons O et il restera 5 qui représentera le chiffre des centaines.



- **Résumer du principe de conversion**
  En divisant successivement un nombre par la base (10) et en ne **conservant que les restes**, on a réussi à exprimer le nombre par des chiffres inférieurs de 10. Mais attention, il faut **lire les restes de bas en haut**.

Conversion binaire

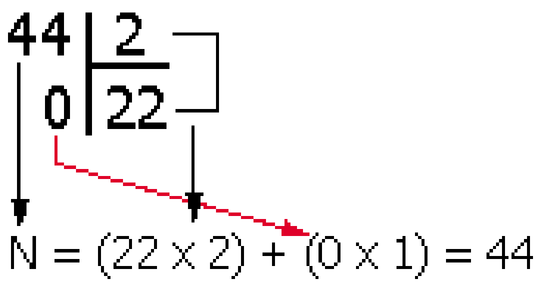
Maintenant si nous divisons un nombre décimal par 2, le quotient indique le nombre de fois que 2 est contenu dans ce nombre et le reste indique le chiffre des unités dans l'expression du nombre binaire.

Soit N le nombre, Q1 le quotient et R1 le reste, nous avons :

N = (Q1 x 2) + (R1 x 1)

N = (Q1 x 21) + (R1 x 20)

Exemple :

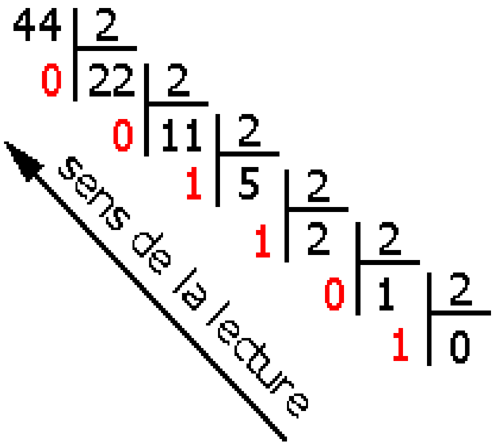


Exemple :

soit :

N = (22 x 2) + (0 x 1) = 44

- Pour obtenir l'expression binaire d'un nombre exprimé en décimal, il suffit de **diviser successivement ce nombre par 2** jusqu'à ce que le quotient obtenu soit égal à O.
  Comme pour la conversion dans le système décimal les restes de ces divisions lus de bas en haut représentent le nombre binaire.

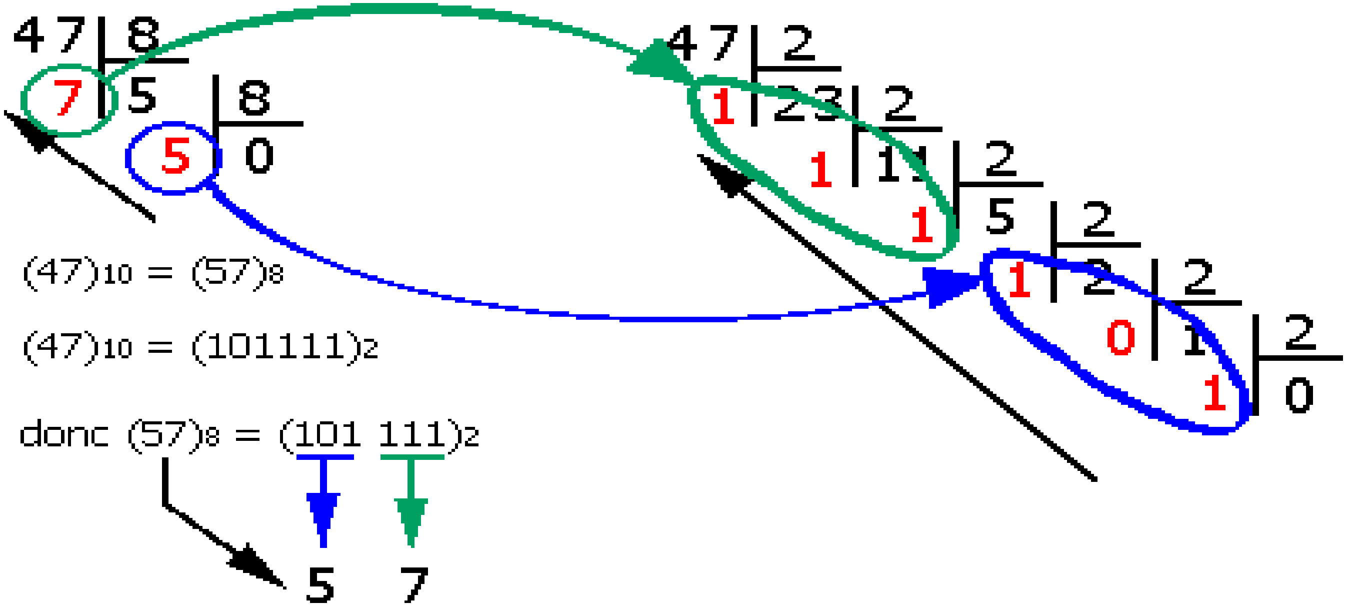


(44)10 = (101100)2

Relation entre les nombres binaires et les nombres octaux

Exprimons (47)10 dans le système octal et le système binaire.

Nous obtenons :

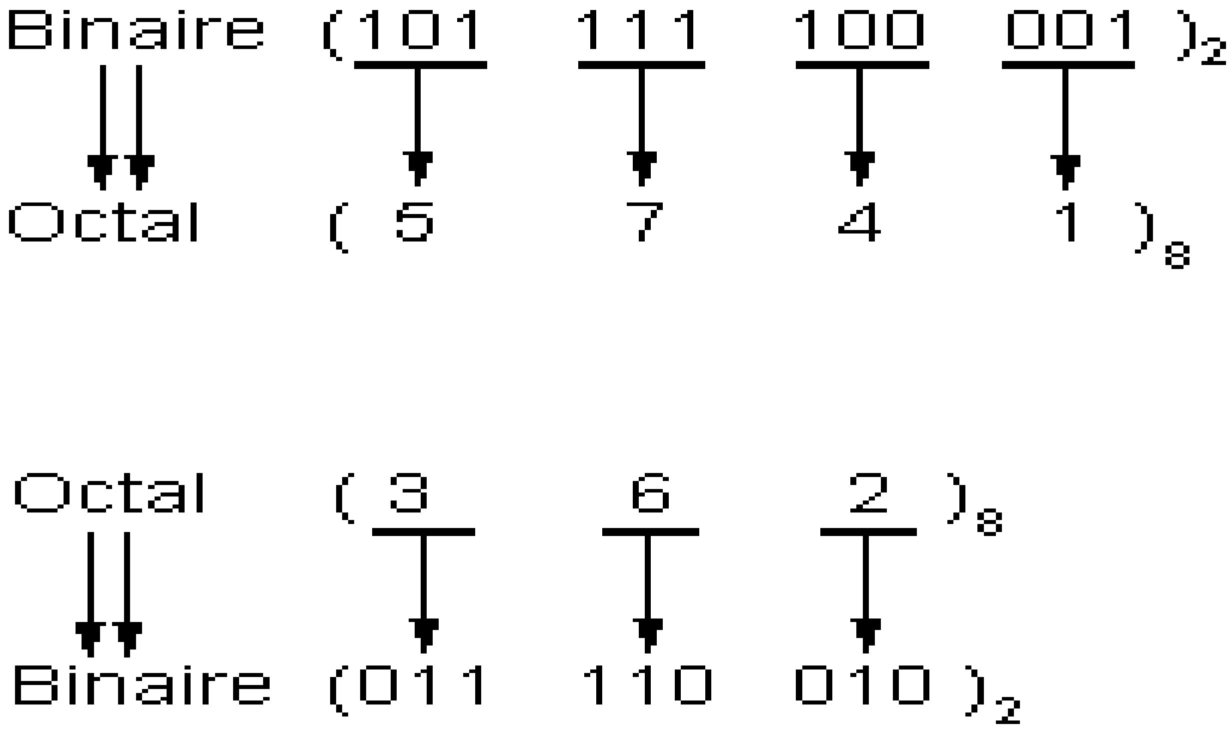


- Nous pouvons remarquer qu'après 3 divisions en binaire nous avons le même quotient qu'après une seule en octal. De plus le premier reste en octal obtenu peut être mis en relation directe avec les trois premiers restes en binaire :

  (111)2 = 1 x 22 + 1 x 21 + 1 x 20
  (111)2 = 1 x 4 + 1 x 2 + 1 x 1
  (111)2 = (7)8
  et il en est de même pour le caractère octal suivant :

  (101)2 = 1 x 22 + 0 x 21 + 1 x 20
  (101)2 = 1 x 4 + 0 x 2 + 1 x 1
  (101)2 = (5)8
- Cette propriété d'équivalence entre chaque chiffre octal et chaque groupe de 3 chiffres binaires permet de passer facilement d'un système à base 8 à un système à base 2 et vice versa.

Exemple de conversion binaire octal et octal binaire :



Relation entre les nombres binaires et les nombres hexadécimaux

La propriété d'équivalence que nous venons de voir entre le binaire et l'octal existe entre l'hexadécimal et le binaire. La seule différence est qu'il faut exprimer chaque caractère hexadécimal à l'aide de 4 informations binaires.