Chapitre 3

Processus VAR

3.1 Séries temporelles multivariées

La théorie des séries temporelles univariées peut être étendue de manière naturelle au cas multivarié. On commence par introduire le cas bivarié, ensuite on développe les modèles multivariés, ensuite on précise le cas VAR.

3.1.1 Série temporelle bivariée

Soit la série de vecteurs aléatoires $X_t = (X_{t,1}, X_{t,2})'$, on définit le vecteur moyenne par : $\mu_t = E(X_t) = \begin{pmatrix} E(X_{t,1}) \\ E(X_{t,2}) \end{pmatrix}$ et les matrices de covariances par

$$\Gamma(t+h,t) = cov(X_{t+h}, X_t) = \begin{pmatrix} cov(X_{t+h,1}, X_{t,1}) & cov(X_{t+h,1}, X_{t,2}) \\ cov(X_{t+h,2}, X_{t,1}) & cov(X_{t+h,2}, X_{t,2}) \end{pmatrix}.$$

La série X_t est faiblement stationnaire si les moments μ_t et $\Gamma(t+h,t)$ sont indépendant de t, dans ce cas, on aura la notation :

$$\mu = E(X_t) \quad \text{et} \quad \Gamma(h) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) \end{pmatrix}.$$

γ_{11} et γ_{22} sont les ACV des séries $X_{t,1}$ et $X_{t,2}$ respectivement. Les éléments hors diagonales sont les covariances entre $X_{t+h,i}$ et $X_{t,j}$, $i \neq j$, on note que : $\gamma_{12}(h) = \gamma_{21}(-h)$, (à démontrer).

La corrélation $\rho_{ij}(h)$, entre $X_{t+h,i}$ et $X_{t,j}$, est donnée par : $\rho_{ij}(h) = \dfrac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)}}$, si $i = j$ on obtient l'AC de la série i.

3.1.2 Série temporelle multivariée

Soit m séries temporelles $X_{t,i}$, $i = 1, ..., m$ avec $E\left(X_{t,i}^2\right) < \infty, \forall i$, on définit la série temporelle multivariée : $X_t = \begin{pmatrix} X_{t,1} \\ \vdots \\ X_{t,m} \end{pmatrix}$.

La série $m-$variée X_t est stationnaire si : μ_t et $\Gamma(t+h,t)$ sont indépendant de t, d'où la notation :

$$\mu = E(X_t) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= E\left((X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)'\right) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \cdots & \gamma_{1m}(h) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(h) & \cdots & \gamma_{mm}(h) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors $X_{t,i}$ est stationnaire avec la FACV $\gamma_{ii}(.)$. $\gamma_{ij}(.)$ est la cross-covariance entre $X_{t,i}$ et $X_{t,j}$. La matrice de corrélation est donnée par $R(h)$:

$$R(h) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(h) & \cdots & \rho_{1m}(h) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1}(h) & \cdots & \rho_{mm}(h) \end{pmatrix}$$

avec $\rho_{ij}(h) = \dfrac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)}}$.

Exemple

Soit le processus bivarié suivant :

$$\begin{cases} X_{t,1} = Z_t \\ X_{t,2} = Z_t + 0.75 Z_{t-10} \end{cases}$$

avec $Z_t \sim BB\,(0,1)$.

1) Calculer la moyenne μ.

2) Calculer $\Gamma(h)$ en déduire la matrice de corrélation.

Solution :

1) $E(X_{t,1}) = 0,\ E(X_{t,2}) = 0 \Longrightarrow \mu = 0.$

2) Calcul de $\Gamma(0)$:

-$\gamma_{11}(0) = cov(X_{t,1}, X_{t,1}) = V(X_{t,1}) = 1.$

-$\gamma_{22}(0) = cov(X_{t,2}, X_{t,2}) = V(X_{t,2}) = 1.5625.$

-$\gamma_{12}(0) = cov(X_{t,1}, X_{t,2}) = E(X_{t,1}X_{t,2}) = 1.$

D'où $\Gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.5625 \end{pmatrix}.$

*Pour $h = 1$, $\gamma_{11}(1) = cov(X_{t+1,1}, X_{t,1}) = 0, \gamma_{22}(1) = 0$ et $\gamma_{12}(1) = 0.$

*$\forall h \neq 10, \Gamma(h) = 0.$

*Pour $h = 10$:

-$\gamma_{12}(10) = cov(X_{t+10,1}, X_{t,2}) = E(Z_{t+10}(Z_t + 0.75Z_{t-10})) = 0.$

-$\gamma_{11}(10) = cov(X_{t+10,1}, X_{t,1}) = E(Z_{t+10}Z_t) = 0.$

-$\gamma_{21}(10) = cov(X_{t+10,2}, X_{t,1}) = E((Z_{t+10} + 0.75Z_t)\,Z_t) = 0.75.$

-$\gamma_{22}(10) = cov(X_{t+10,2}, X_{t,2}) = E((Z_{t+10} + 0.75Z_t)(Z_t + 0.75Z_{t-10})) = 0.75.$

$\Gamma(10) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.75 & 0.75 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Gamma(-10) = \begin{pmatrix} 0 & 0.75 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}.$

D'où la matrice de corrélation est donnée par

$$\begin{aligned} R(0) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{1.5625}} \\ \frac{1}{\sqrt{1.5625}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}, \\ R(10) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{0.75}{\sqrt{1.5625}} & \frac{0.75}{1.5625} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.6 & 0.48 \end{pmatrix}, \\ R(-10) &= \begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0.48 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et $R(h) = 0$, pour $h \neq 0, 10, -10$.

La fonction $\Gamma(.)$ a les propriétés suivantes :

1) $\Gamma(h) = \Gamma(-h)'$.

2) $\left|\gamma_{ij}(h)\right| \leq \sqrt{\gamma_{ii}(0)\,\gamma_{jj}(0)}$.

3) $\gamma_{ii}(0)$ est la fonction d'autocovariance (FACV) de $X_{t,i}$, $i = 1, ..., m$.

La série temporelle la plus simple est le bruit blanc multivarié.

Définition : La série Z_t m-variée est appelée bruit blanc de moyenne 0 et de matrice de covariance Σ, notée $Z_t \sim BB(0, \Sigma)$, si Z_t est stationnaire de moyenne 0 avec $\Gamma(h) = \begin{cases} \Sigma \text{ si } h = 0 \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$.

Les séries temporelles multivariées sont construites à partir des BB multivariés.

Le processus MA (∞) :

X_t est un processus m-varié moyenne mobile infini : $MA(\infty)$ si

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} C_j Z_{t-j},$$

avec C_j des matrices absolument sommables.

Le processus AR (∞) :

X_t est un processus m-varié autorégressif infini : $AR(\infty)$ si

$$X_t + \sum_{j=1}^{\infty} A_j X_{t-j} = Z_t,$$

avec A_j des matrices absolument sommables.

Le processus ARMA (p, q) :

X_t est un processus m-varié autorégressif moyenne mobile d'ordre (p, q) : $ARMA(p, q)$ si

$$X_t + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i} = Z_t - \sum_{j=1}^{q} \Theta_j Z_{t-j},$$

avec $Z_t \sim BB(0, \Sigma)$, la forme compacte est $\Phi(L) X_t = \Theta(L) Z_t$, où les polynômes matriciels : $\Phi(z) = I - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p$ et $\Theta(z) = I - \Theta_1 z - \cdots - \Theta_q z^q$.

I est la matrice identité $m \times m$.