SERIES CHRONOLOGIQUES II

Mouna Merzougui
Université Badji Mokhtar Annaba

Cours Master 1 : Actuariat & prob-stat. (Semestre 2)

Chapitre 2 : Processus ARCH/GARCH

Cours 3 : Estimation, prévision et simulation d'un ARCH.

2.4 Estimation d'un ARCH(q)

On utilisera la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle. Soit le processus $ARCH(q)$ suivant : $\varepsilon_t = u_t\sqrt{h_t}$ où $u_t \sim iidN(0,1)$ et

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2.$$

Le paramètre d'intérêt est $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_q)'$. La vraisemblance conditionnelle des données $\varepsilon_{q+1}, ..., \varepsilon_n$ sachant $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q$ est donnée par

$$L(\theta/\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q) = \prod_{t=q+1}^{n} f_\theta(\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}, ..., \varepsilon_{t-q}),$$

où la densité conditionnelle de ε_t est : $\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}, ..., \varepsilon_{t-q} \sim N\left(0, \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2\right)$, avec $t > q$. La fonction critère à maximiser est

$$l(\theta/\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q) = -\frac{n-q}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=q+1}^{n}\log\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=q+1}^{n}\frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2}.$$

On cherche θ qui maximise le log-vraisemblance l :

$$\widehat{\theta} = \arg\max_{\theta} l(\theta/\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$$

C'est un problème d'optimisation non linéaire, il faut utiliser les procédures numériques pour trouver la solution.

Exemple

Soit X_t un processus $ARCH(1)$, donner le log vraisemblance conditionnel d'un échantillon provenant de ce modèle et en déduire le vecteur gradient et la matrice hessienne ?

Solution

$X_t = u_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}$ avec $u_t \sim iidN(0,1)$, donc le log-vraisemblance conditionnelle de l'échantillon $X_2, ..., X_n$ sachant X_1 :

$$l(\theta/X_1) = -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\log\left(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\frac{X_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}$$

Le vecteur gradient est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial l}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^{n} \frac{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 - X_t^2}{\left(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ X_{t-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de la matrice hessienne $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_0^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1^2} \end{pmatrix}$ est laissé comme un exercice.

2.5 Prévision et intervalle de confiance

On va étudier la prévision d'un processus $AR(1) + ARCH(1)$.

Soit $X_t \sim AR(1) + ARCH(1)$ alors $X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t = u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$ et $u_t \sim iidN(0,1)$.

La prévision à l'horizon 1 :

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t(1) &= E\left(X_{t+1}/I_t\right) \\ &= \varphi X_t \end{aligned}$$

L'erreur de prévision est

$$\begin{aligned} e_t(1) &= X_{t+1} - \widehat{X}_t(1) \\ &= \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Sachant que $\varepsilon_{t+1}/I_t \sim N\left(0, \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2\right)$, alors l'intervalle de confiance de X_{t+1} au seuil 5% est $\left[\widehat{X}_t(1) \pm 1.96\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2}\right]$.

On remarque que l'intervalle de confiance dépend de ε_t contrairement au cas d'un $AR(1)$+BB (semestre1).

2.6 Simulation d'un ARCH(1)

Nous allons simuler 500 observations du modèle $ARCH(1)$ suivant : $\varepsilon_t = u_t\sqrt{h_t}$ avec $u_t \sim iidN(0,1)$ et $h_t = 1 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$.

Le programme est écrit en R :

```
#Simulation d'un ARCH(1)
n=500
# Générer les valeurs de ut qui suit N(0,1)
ut=rnorm(n+20)
#Initialisation de ht et de eps
ht=rep(0,n+20)
eps=ht
for (i in 2 :(n+20))
{ht[i]=1+0.8*eps[i-1]^2
eps[i]=ut[i]*ht[i-1]^0.5}
eps=eps[-(1 :20)]
par(mfrow=c(3,1))
plot.ts(eps)
acf(eps)
acf(eps^2)
```

On obtient le graphe de ε_t et les corrélogrammes de ε_t et de ε_t^2. On remarque que le processus ARCH(1) s'apparente à un bruit blanc, d'après le corrélogramme de la série (pas de pics significatifs), mais on voit bien qu'il y a une corrélation pour la série ε_t^2.

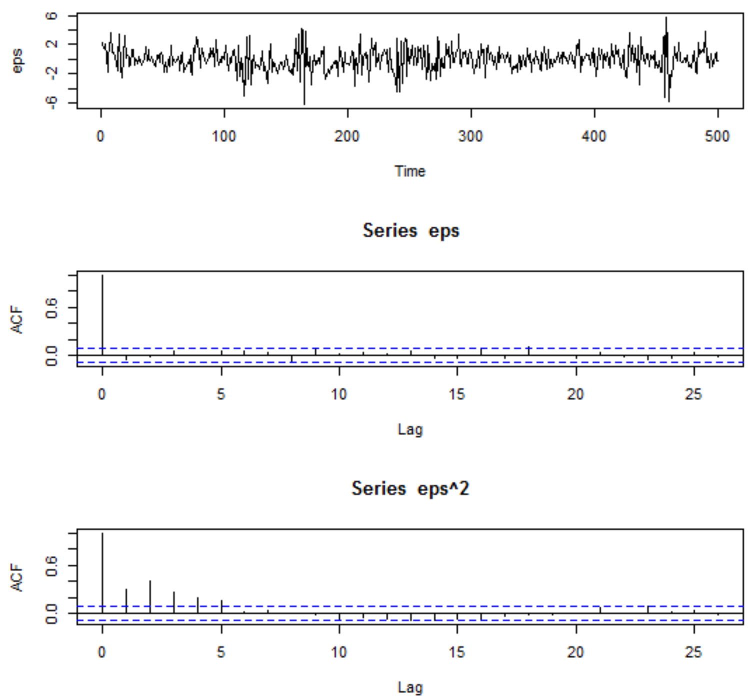

FIG. 2.1 – Graphe de la série et corrélogrammes de ε_t et de ε_t^2