Université Badji Mokhtar Annaba (F^{té} des sciences D^{pt} de Maths.)
Master1:Actuariat-P.S année 2019-2020

Série 2: Série Chronologique II
Processus ARCH

<u>Ex1:</u>

I) Soit le processus suivant: $X_t = u_t\sqrt{h_t}$ où $u_t \to N(0,1)$ et $h_t = 0.1 + 0.5X_{t-1}^2$

1. Calculer: $E(X_t), E(X_t/I_{t-1}), V(X_t)$ et $V(X_t/I_{t-1})$. où $I_{t-1} = (X_{t-1}, X_{t-2}, ...)$ est l'ensemble de l'information passé.
2. Ecrire X_t^2 sous forme AR.
3. Calculer la Kurtosis de ce processus. Conclure.

II) Même questions avec $h_t = 2 + 0.3X_{t-1}^2$ et $h_t = 3 + 0.2X_{t-2}^2$.

III) Soit le processus suivant: $X_t = u_t\sqrt{h_t}$ où $u_t \to N(0,1)$ et $h_t = 1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.2X_{t-2}^2$.

1. Calculer: $E(X_t)$, $E(X_t/I_{t-1})$ et $V(X_t/I_{t-1})$. Ecrire X_t^2 sous forme AR, en déduire $V(X_t)$.
2. Calculer la Kurtosis de ce processus.

<u>Ex2:</u>

I) Soit le processus $ARCH(1)$ suivant: $X_t = u_t\sqrt{h_t}$ où $u_t \to N(0,1)$ et $h_t = \alpha + 0.4X_{t-1}^2$.

1.Calculer: $E(X_t)$, $E(X_t/I_{t-1})$ et $V(X_t/I_{t-1})$. où $I_{t-1} = (X_{t-1}, X_{t-2}, ...)$ est l'ensemble de l'information passé.

2. Sachant que $V(X_t) = 5$, calculer α.
3. En prenant la valeur de α trouver en 2, calculer la Kurtosis.
4. Montrer que:

i) $E(X_t/I_{t-10}) = 0,$ ii) $V(X_t/I_{t-10}) = 0.4^{10}X_{t-10}^2 + 2\dfrac{1-0.4^{10}}{0.6}.$

II) Soit le modèle $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t = u_t\sqrt{1.5 + 0.4\varepsilon_{t-1}^2}$ et $u_t \to N(0,1)$.

1. Calculer: $E(X_t)$, $E(X_t/I_{t-1}), V(X_t)$ et $V(X_t/I_{t-1})$.
2. Donner l'intervalle de confiance à 95% de X_{t+1}.

<u>Ex3:</u>

I) Calculer les moments conditionnels et non conditionnels et la Kurtosis du processus $GARCH(1,1)$ stationnaire.

II) 1. Ecrire le modèle $GARCH(1,1)$ avec les coefficients: $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.8$

2. Calculer: $E(X_t)$, $E(X_t/I_{t-1})$ et $V(X_t/I_{t-1})$. où $I_{t-1} = (X_{t-1}, X_{t-2}, ...)$ est l'ensemble de l'information passé.
3. Ecrire X_t^2 sous forme $ARMA$, en déduire $V(X_t)$.
4. Calculer la Kurtosis de ce processus.

III)- Soit le processus suivant: $Y_t = 3 + 0.7Y_{t-1} + \varepsilon_t$ où ε_t est le modèle $GARCH(1,1)$ défini en II**.**

1. Déduire de II: $E(Y_t)$, $E(Y_t/I_{t-1}), V(Y_t)$ et $V(Y_t/I_{t-1})$. où $I_{t-1} = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, ...)$ est l'ensemble de l'information passé.
2. Donner l'intervalle de confiance prévisionnelle de Y_{t+1} au seuil 5%. Conclure.

IV) Même questions que II avec $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 0.2$.

V) Soit le processus suivant: $X_t = u_t\sqrt{h_t}$ où $u_t \to N(0,1)$ et $h_t = 1 + \alpha X_{t-1}^2 + 0.2X_{t-2}^2$.

1. Sachant que $V(X_t) = \frac{10}{7}$, trouver α.
2. Calculer la Kurtosis de ce processus.