Corrigé de la série N°1 S2

Module Analyse

Exercice 1 (changement de variable*)*

1) $\boldsymbol{I_1 = \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx}$, On fait le changement de variable suivant

Soit $t = e^x$, *on dérive* $dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

Les bornes sont : pour $x = 1, t = e$

pour $x = 2, t = e^2$

On remplace dans I_1, on obtient

$$I_1 = \int_e^{e^2} \frac{t}{1+t}\frac{dt}{t} = \int_e^{e^2} \frac{dt}{1+t} = [ln(1+t)]_e^{e^2},$$

$$I_1 = ln(1+e^2) - ln(1+e) = ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right).$$

2) $I_2 = \int_0^1 e^x s \ \ (2x)dx$ .On fait le changement de variable suivant

$t = e^x$, *on dérive* $dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

On a: $s \ \ (2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{t^2 - t^{-2}}{2}$

Les bornes sont : pour $x = 0, t = 1$

pour $x = 1, t = e$

On remplace dans I_2, on obtient

$$I_2 = \int_1^e t\left(\frac{t^2 - t^{-2}}{2}\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^e (t^2 - t^{-2})dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{1}{t}\right]_1^e = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^3}{3} + \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)\right]$$

D'où $I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{e^3}{3} + \frac{1}{e} - \frac{4}{3}\right]$.

3) $I_3 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$, *On pose* $x = \sin t$ *alors* $dx = \cos t \, dt$ *et* $t = \arcsin x$

Les bornes $\sin x = 0$, $t = \arcsin 0 = 0$

$\sin x = 1$, $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\sin t)^2} \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 dt$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}.$$

4) $I_4 = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$.

On pose $t = \cos x$ alors $dt = -\sin x \, dx$

$$\boldsymbol{I_4} = \int \tan x\, dx = \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = \boldsymbol{-\ln|\cos x| + C}.$$

5) $I_5 = \int \frac{xdx}{x^4+4}$

On pose $t = x^2$ *alors* $dt = 2xdx$ *et* $dx = \frac{dt}{2x}$

$$I_5 = \int \left(\frac{x}{t^2+4}\right)\left(\frac{dt}{2x}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right) + C,$$

$$I_5 = \frac{1}{2} I_5 = \frac{1}{4} arctan\left(\frac{x^2}{2}\right) + C.$$

6) $I_6 = \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

On pose $t = \sqrt{x}$ ou bien $t^2 = x$ *et* $dx = 2tdt$

$$\boldsymbol{I_6} = \int \frac{sin}{t} 2tdt = 2\int \sin t\, dt \qquad \boldsymbol{I_6 = -2\cos t + C}.$$

<u>Exercice 2 : (</u>Intégration par parties)

1) $I_1 = \int Arcsinx\, dx$

On pose $U = Arcsinx \rightarrow U' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Et $V' = 1 \rightarrow V = x$

La formule de l'intégration par parties

$$\int UV'\, dx = UV - \int U'V dx$$

D'où

$$\boldsymbol{I_1} = x\, Arcsinx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\, Arcsinx - \int x\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= x\, Arcsinx + \frac{1}{2}\int \underbrace{(-2x)}_{U'}\underbrace{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{U^{\beta}} dx = x\, Arcsinx + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= x\, Arcsinx + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$I_1 = x\, Arcsinx + \sqrt{1-x^2} + C.$$

2) $I_2 = \int \sin(\ln x)\, dx$

On pose $U = \sin(\ln x) \rightarrow U' = \frac{\cos(\ln\ \ )}{x}$

Et $V' = 1 \rightarrow V = x$

Alors

$$I_2 = \int sin(ln\,x)\,dx = xsin(ln\,x) - \int \frac{cos(ln\,x)}{x}\,x\,dx$$

$$I_2 = \int sin(ln\,x)\,dx = xsin(ln\,x) - \int cos(ln\,x)\,dx$$

On fait une deuxième intégrations par partie, donc

On pose $J = \int cos(ln\,x)\,dx, \; tel\; que$

$F = cos(ln\,x) \rightarrow F' = \frac{-sin(ln\,x)}{x}$ et

$G' = 1 \rightarrow G = x$

On obtient,

$J = \int cos(ln\,x)\,dx = x\,cos(ln\,x) + \int sin(ln\,x)\;dx,$

On remplace J dans I_2, *on a,*

$$I_2 = \int sin(ln\,x)\,dx = xsin(ln\,x) - x\,cos(ln\,x) - \int sin(ln\,x)\;dx$$

$$2\int sin(ln\,x)\,dx = xsin(ln\,x) - x\,cos(ln\,x)$$

$$I_2 = \int sin(ln\,x)\,dx = \frac{x}{2}[sin(ln\,x) - cos(ln\,x)] + C.$$

3) $I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x^2\cos x\,dx$

On pose $U = x^2 \rightarrow U' = 2x$

Et $V' = cos\,x \rightarrow V = sin\,x$

Alors

$$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x^2\cos x\,dx = [x^2 sinx]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\;\sin x\;dx$$

Posons $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\;\sin x\;dx,$

faisant une deuxième intégrations par partie, on pose :

$$\boldsymbol{F = x \rightarrow F' = 1}$$

Et $G' = sin\,x \rightarrow G = -\cos x$

On obtient,

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\;\sin x\;dx = [-x\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\;\;dx,$$

$$= [-x\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}.$$

Remplaçant J dans I_3, on trouve,

$$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x^2 \cos x \, dx = [x^2 \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - 2[-x\cos x + \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0},$$

$$I_3 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

<u>Exercice 3</u> (Fractions rationnelles*)*

1) $I_1 = \int \frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2} dx$, on remarque que,

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}$ ne possède pas des pôles réels, on ne peut pas décomposer $R(x)$ en éléments simple de première espèce.

$$I_1 = \int \frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2} dx = \int dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx,$$

La forme canonique de $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$

Rappel : la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \ avec \ \Delta = b^2 - 4ac.$$

$$I_1 = \int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx = \int dx + \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$= \int dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx,$$

On pose alors $U = x + 1, dU = dx$ et

$$I_1 = x + \int \frac{1}{U^2 + 1} dU = x + \arctan U + C$$

$$I_1 = x + \arctan(x+1) + C.$$

2) $I_2 = \int \frac{1}{x^2-x+1} dx,$ on remarque que ,$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2-x+1}$ ne possède pas des pôles réels, on ne peut pas décomposer $R(x)$ en éléments simple de première espèce.

La forme canonique de $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

On pose alors $t = x - \frac{1}{2}, dt = dx\ \ et$

$$\boldsymbol{I_2} = \int \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}} arctan\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

$$\boldsymbol{I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C.}$$

3) $\boldsymbol{I_3 = \int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx,}$

$\boldsymbol{R(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{x^3}{(x-2)(x+2)}$**,** $\boldsymbol{R(x)}$ admet deux pôles réels simples ***:*** $\boldsymbol{x = 2, x = -2,}$ on décompose $\boldsymbol{R(x)}$**,** on a

$\boldsymbol{R(x)} = E(x) + \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}.$

On remarque que $\boldsymbol{d°P} > d°\boldsymbol{Q}$***, on fait*** alors la division Euclidienne pour trouver $\boldsymbol{E(x)}$ (la partie entière de $\boldsymbol{R(x)}$***)***

$P(x) = E(x) \times Q(x) + Reste$, on trouve,

$\boldsymbol{R(x)} = x + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$,Par identification on a $\boldsymbol{a = b = 2,}$

Par conséquent ***:***

$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2},$

Et $\boldsymbol{I_3} = \int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx = \int \left(x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}\right)dx$

$$\boldsymbol{I_3 = \frac{x^2}{2} + 2\,ln|x-2| + 2\,ln|x+2| + C.}$$

4) $\boldsymbol{I_4 = \int \frac{dx}{x(x^2-1)}}$

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$**,** $\boldsymbol{R(x)}$ admet trois pôles réels simples :

$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$, on décompose R(x), on a

$R(x) = E(x) + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$. Comme $d°P < d°Q$, alors $E(x) = 0$ et

$R(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$. Par identification on a : $a = -1, b = c = \frac{1}{2}$.

Donc $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

Et $\boldsymbol{I_4} = \int \frac{1}{x(x^2-1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}\right) dx$

$$\boldsymbol{I_4 = -ln|x| + \frac{1}{2} ln|x-1| + \frac{1}{2} ln|x+1| + C.}$$

Exercice 4 : Intégration des fonctions en $sinx$ et $cosx$:

1] $\boldsymbol{I1} = \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int \frac{(\sin x+1)-1}{1+\sin x} dx = \int 1dx - \left(\int \frac{1}{1+sinx} dx\right)$; on utilise un changement de variable

Soit : $t = \tan(x/2)$, alors : $\begin{cases} sinx = \frac{2t}{1+t^2} \\ cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$; on obtient

$\boldsymbol{I1 = x} - \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \boldsymbol{x} - 2\int \frac{dt}{(1+\mathrm{t})^2} = \boldsymbol{x} + \frac{2}{1+\mathrm{t}} + c \xLeftrightarrow{on\ remplace\ t=\tan(x/2)}$ on trouve que : $\boldsymbol{I1 = x + \frac{2}{1+tan(x/2)} + c.}$

2] $\boldsymbol{I2 = \int \frac{1}{5+3\cos x} dx}$; posons : $t = \tan(x/2)$, on trouve que :

$\boldsymbol{I2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{2\mathrm{t}^2+8} = \int \frac{dt}{\mathrm{t}^2+4}$, on sait que $\int \frac{dt}{\mathrm{t}^2+\mathrm{a}^2} = \frac{1}{\mathrm{a}} arctan\left(\frac{t}{a}\right) + c$.

Alors $I2 = \frac{1}{2} arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c = \boldsymbol{\frac{1}{2} arctan\left(\frac{tan(x/2)}{2}\right) + c}$.

3] $\boldsymbol{I3 = \int \sin x^2\, dx} = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}[x - \frac{1}{2}\sin 2x] + c$.

4] $\boldsymbol{I4 = \int cosx^3 dx} = \int cosxcosx^2 dx$ Intégration par partie

Soit : $U = \cos x^2 \to U' = -2\sin x \cos x$.

$V' = \cos x \to V = \sin x$.

On a : $\boldsymbol{I4} = \sin x \cos x^2 + 2\int \cos x \sin x^2\, dx$

avec $\int \cos x \sin x^2\, dx = \int (\sin x)'(\sin x^2) dx = \frac{1}{3}\sin x^3 + c$ *d'où*

$\boldsymbol{I4 = \sin x \cos x^2 + \frac{2}{3}\sin x^3 + c.}$

5] $\boldsymbol{I5 = \int \sin x^2 \cos x^3\, dx,}$ *de la forme* $\boldsymbol{\int \sin x^p \cos x^q\, dx,}$ *p=2, q= 3 (impair)*

$$I5 = \int \sin x^2 \cos x^2 \cos x \, dx$$

$$= \int \sin x^2 (1 - \sin x^2) \cos x \, dx = \int (\sin x^2 \cos x - \sin x^4 \cos x) \, dx .$$

Posons$t = \sin x \to dt = \cos x dx$, on obtient

$\boldsymbol{I5} = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 + c = \mathbf{\frac{1}{3} \sin x^3 - \frac{1}{5} \sin x^5 + c.}$

6] $\boldsymbol{I6 = \int \sin 3x \sin 2x dx}$

On sait que : $\sin p \sin q = \frac{1}{2}(\cos(p-q) - \cos(p+q))$;

$\boldsymbol{I6}$ devient $\boldsymbol{I6} = \frac{1}{2}\int (\cos(3x - 2x) - \cos(3x + 2x)) \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x) dx.$

$$\boldsymbol{I6 = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + c.}$$

Exercice 5 : (Intégration de Riemann)

1) $f(x) = \alpha \quad\quad constante\ sur\ [a, b]$

Soit la subdivision $d = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ de $[a, b]$.

Les sommes de Darboux :

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \quad M_k = \underbrace{sup}_{[x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \quad m_k = \underbrace{inf}_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

On a $M_k = \alpha \ \ et\ m_k = \alpha$, on remplace , on trouve que :

$$S = \alpha \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \alpha[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = \alpha(x_n - x_0)$$

$$= \alpha(b - a)$$

De même pour s tel que $s = \alpha \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \alpha(b - a)$;

On a $\lim_{\Delta x_k \to 0} S = \lim_{\Delta x_k \to 0} s = \alpha(b - a)$, la fonction $f(x) = \alpha$ est donc intégrable au sens de Riemann et $\int_a^b f(x) dx = \alpha(b - a)$.

2)$\boldsymbol{f(x) = x^3}$ sur $[0,1]$.

Soit la subdivision $d = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n} \dots x_n = 1\right\}$ de $[0,1]$. On a donc

$x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, la fonction $f(x) = x^3$ est croissante, alors $M_k = x_k^3 = \left(\frac{k}{n}\right)^3$

et $m_k = x_{k-1}^3 = \left(\frac{k-1}{n}\right)^3$ donc :

$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}$ et

$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^3 = \frac{(n-1)^2n^2}{4n^4}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{4}$ alors la fonction $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ est Riemann intégrable et $\int_0^1 x^3 = \frac{1}{4}$.

Exercice 6 : (Calcul des sommes)

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \int_a^b f(x)dx,\ c_k = a + k\frac{b-a}{n},$ en comparant , on trouve que $a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}\ et\ f(x) = \sin x$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = {}_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos x] = 1.$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n} = \int_0^1 \tan x\, dx = -\ln\cos 1.$
- $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_1^n \ln\left(\frac{n}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_1^n \ln\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right) = \int_0^1 \ln(1 + x)\, dx$

(intégrale par partie)

Exercice 7 :

1) $- \quad I(m,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, x^m\, cos\, x^n\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, x^{m-1}\, sin\, x\, cos\, x^n\, dx \quad par\ parties$

$U = \sin x^{m-1} \to U' = (m-1)\sin x^{m-2}\cos x$

$V' = \sin x \cos x^n \to V = -\frac{1}{n+1}\cos x^{n+1}$, on obtient

$$I(m,n) = {}_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{n+1} sin\, x^{m-1}\, cos\, x^{n+1}\right] + \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, x^{m-2}\, cos\, x^{n+2}\, dx.$$

$=\frac{m-1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, x^{m-2}\, cos\, x^n\, cosx^2 dx = \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, x^{m-2}\, cos\, x^n\, (1 - sinx^2)dx.$

$= \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, x^{m-2}\, cos\, x^n\, dx - \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, x^m\, cos\, x^n\, dx.$ d'ou

$I(m,n) = \frac{m-1}{n+1} I(m-2,n) - \frac{m-1}{n+1} I(m,n)$, alors $I(m,n) = \frac{m-1}{n+m} I(m-2,n).$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx^8 cosx^2 dx = I(8,2) = \frac{8-2}{8+2} I(8-2,2) = \frac{7}{10} \times \frac{5}{8} I(4,2)$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} I(0,2)$$

$$I(8,2) = \frac{7}{10} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx^0 cosx^2 dx = \frac{7}{10} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx^2 dx$$

Avec $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx^2 dx = \frac{\pi}{4}$ (voir Exercice 1). Alors$I(8,2) = \frac{7}{10} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{2^9}$.