Master I (Actuariat)

ASSURANCE VIE

Introduction générale

Définitions de l'assurance

La technique assurantielle réside dans la mutualisation des risques c.à.d une division du coût   des conséquences de sa survenue entreplusieurs. A ce stade, les définitions évoquées ci-dessus sont suffisamment larges pour inclure dans le champ de l'assurance les régimes de sécurité sociale obligatoires qui ne seront pourtant pas traités dans le présent cours (cours de prévoyance sociale).

Classification de l'assurance

On distingue deux branches principales au sein du secteur de l'assurance:

Branche vie

- Assurances vie oudécès
- Assurance de personnes

Branche non-vie

- Assurance dommages

- IARD (Incendie Automobileet Risques Divers)

- Assurance des biens

Définition de l’assurance vie

On appelle **assurance sur la vie** (ou assurance-vie) une opération **viagère** pour laquelle les **risques** liés à la **durée aléatoire de la vie humaine** sont pris en charge par un **organisme spécialisé** (le plus souvent une compagnie d’assurance sur la vie) qui les **mutualise** dans un ensemble suffisamment étendu d’opérations similaires, de sorte qu’on puisse appliquer la **loi des grands nombres**. Le terme d’assurance sur la vie recouvre donc une gamme d’opérations plus restreinte que celui d’opération viagère.

L'assurance-vie est un placement financier qui permet au souscripteur d'épargner de l'argent dans l'objectif de le transmettre à un bénéficiaire lorsque survient un événement lié à l'assuré : son décès ou sa survie. Ce produit d’épargne permet au souscripteur de percevoir des intérêts sur son contrat en fonction du capital investi.

- En cas de vie du souscripteur, il reste le bénéficiaire et titulaire des fonds et peut récupérer librement le capital et les intérêts
- En cas de décès du souscripteur, le contrat sera dénoué et le capital et les intérêts seront transmis à le (ou les) bénéficiaire(s) de son choix (enfants, conjoints, concubin, frères et sœurs, etc...)

L'assurance vie est principalement utilisée de nos jours comme un contrat pour épargner de l'argent en bénéficiant des avantages de la fiscalité de l'assurance vie cumulés avec ceux liés à la transmission du patrimoine. Les contrats sont ouverts dans l'objectif de préparer sa retraite, se constituer un capital à terme ou anticiper un projet immobilier.

Il convient néanmoins de faire la distinction entre l'assurance décès et l'assurance vie. Dans un contrat d'assurance décès, l'assureur s'engage à verser un capital ou une rente déterminé aux bénéficiaires désignés par l'assuré dans le cas où celui-ci vient à décéder avant une certaine date. L'assurance décès est généralement souscrite pour permettre à la famille de rembourser un emprunt ou pour payer les études des enfants si l'assuré décède brutalement.

A quoi sert une assurance-vie ?

L’assurance-vie est une convention règlementée entre un assureur et un souscripteur qui permet à ce dernier d’organiser son patrimoine dans deux buts :

- constituer un patrimoine en effectuant des versements libres ou programmés : ce peut être pour financer un projet, prévoir un complément de retraite, etc.

- faire fructifier un patrimoine financier et ainsi préserver la situation financière de sa famille en cas de problème (décès, invalidité…) moyennant le versement de primes.

Il existe différents types d'assurance-vie tels que : **l'assurance en cas de décès**, **l'assurance en cas de vie**, l'assurance « **mixte** ».

L'assurance-vie assure le versement d'un capital ou d'une rente si l'assuré est encore en vie à échéance du contrat.

L'assurance décès garantit le versement d'un capital ou d'une rente en cas de décès de l'assuré.

L'assurance mixte, qui est un double contrat : assurance décès et assurance vie sur une durée unique.

C'est ce dernier type de contrat auquel il est communément fait référence lorsqu'on parle d'assurance-vie ou assurance sur la vie. C'est finalement un quasi livret d'épargne, souple et en plus liquide : il est possible de récupérer son épargne à tout moment.

Bon à savoir :
Un épargnant peut ouvrir autant de contrats assurance-vie qu'il le souhaite.

Le capital placé sur un contrat d'assurance-vie n'est pas bloqué ; des rachats partiels ou totaux sont possibles.

Les intérêts d'un contrat assurance vie bénéficient d'une fiscalité avantageuse après 8 ans.

En cas de décès du souscripteur, la transmission du capital est assurée par l'assureur, et est exonérée des droits de succession.

Le souscripteur peut désigner comme bénéficiaire la ou les personnes de son choix .

La co-souscription d'un contrat d'assurance vie est possible.

Le souscripteur peut choisir un contrat en unités de compte ou encore un contrat multi-support, s'il souhaite augmenter le risque afin de faire fructifier son capital plus rapidement.

Il n'est pas possible de transférer un contrat d'assurance-vie d'un établissement à un autre.

Contrat d'assurance Un contrat d'assurance offre une couverture d'assurance. Cette dernière couvre les conséquences financières d'un événement dommageable. La caractéristique de Bases de l'assurance l'événement dommageable est que l'on ne sait en général pas s'il surviendra et quand il se produira. Dans le contrat d'assurance, des choses et des personnes peuvent être assurées contre des événements dommageables (assurance de choses ou de personnes).

En assurance-vie à travers le calcul de réserves ou de primes d'assurances, les actuaires font appel :

- A la **démographie** (risque demortalité)
- Aux **mathématiques financières** élémentaires(taux composé, actualisation,capitalisation)
- A **la finance.**

Opérations viagères

Définition

Par **opération viagère**, on entend une opération dont les flux (montants et / ou échanges des capitaux) dépendent d l **survie** o d **décès** d'une ou plusieurspersonnes.

Exemples

1) en contrepartie d'une prime fixée, une compagnie d'assurance s'engage à payer au moment du décès d'une personne X une somme fixée à un bénéficiaire désigné Y.

2) en contrepartie d'un capital payé à Y,X acquière le droit d'entrer en possession au moment du décès de Y d'un immeuble appartenant àY.

Les opérations viagères dépendent donc de quantités aléatoires à savoir les durées de vie d'une ou de plusieurs personnes. Nous nous limiterons dans ce cours aux opérations pour lesquelles la durée de la vie humaine est le seul élément aléatoire.

A. Généralités

La tarification consiste à déterminer le niveau de la prime demandée au souscripteur. On a la décomposition suivante:

Prime commerciale = prime pure + chargements

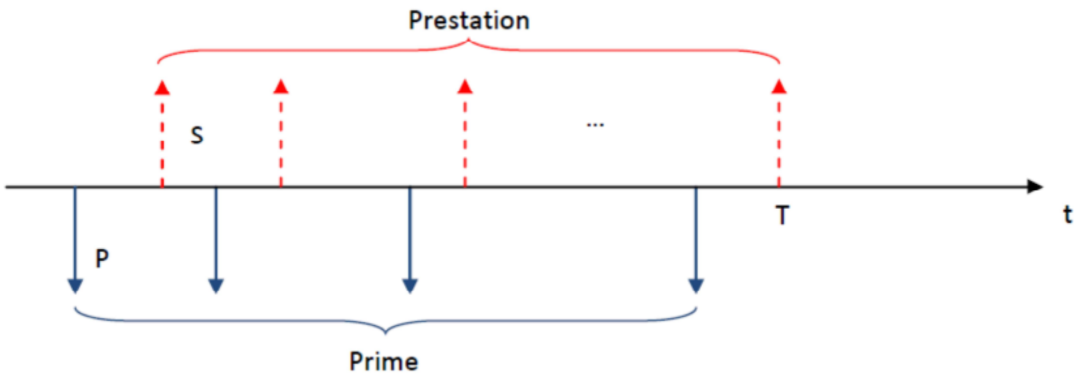
coût du risque seul (prime pure) — *coûts de gestion* (chargements)

Cette prime doit être suffisante (en raison de l'inversion du cycle de production, l'assureur fixe son prix de vente avant de connaître le prix de revient du produit). En toute généralité, l'opération correspond à deux séquences de flux aléatoires :

• Le paiement des primes, lorsque la condition est vérifiée ;

• Le versement des prestations, lorsque la condition est vérifiée.

Remarque : le contrat d'assurance a nécessairement une durée maximale (notée) T.



B. Contraintes de tarification

Plusieurs contraintes pèsent sur la tarification.

• **La loi de l'offre et de la demande** (concurrence avec d'autres acteurs) => pèse à la baisse sur les tarifs ;

• **La réglementation** (tarif fixé à la souscription, paramètres de calcul imposés) =>instaure des marges de prudence.

L'assureur doit pouvoir faire face à ses engagements (et donc proposer un tarif « suffisant ») tout en étant compétitif.

Remarques :

• À garantie égale, le coût du risque est très proche d'un organisme à l'autre.

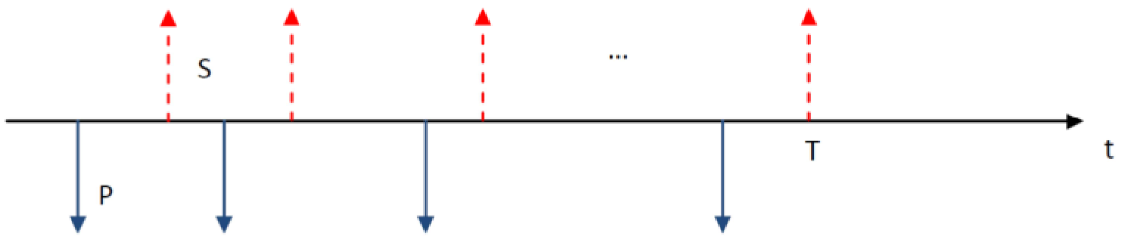
• Les marges de prudence imposées par la réglementation augmentent le tarif *a priori*, mais certains mécanismes (participation aux bénéfices) permettent de restituer *a posteriori* ces marges aux assurés.

C. Primes uniques et primes périodiques

La prime peut être payée par le souscripteur :

En une seule fois (prime unique)

De manière périodique (prime périodique annuelle, dite fractionnée si la périodicité est semestrielle, trimestrielle ou mensuelle)



NOTATIONS

- Π les primes pures uniques (respectivement Π'' les primes commerciales uniques) ;
- P les primes pures annuelles (respectivement P'' les primes commerciales annuelles) ;
- $P^{(k)}$ le cumul des primes pures fractionnées – payables par

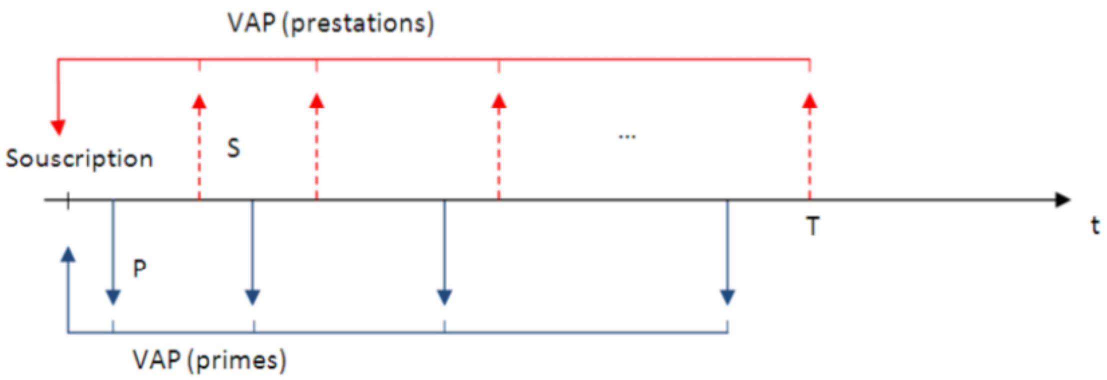
$k^{\text{ième}}$ tous les $k^{\text{ième}}$ d'année (respectivement $P^{(k)''}$).

Les primes périodiques sont généralement constantes sur la durée du contrat (atout commercial) et sont alors qualifiées de **primes nivelées**.

- Avantage commercial et psychologique ;
- Imposent la constitution de provisions mathématiques.

2. Prime pure

Le calcul de la prime pure repose sur les principes et concepts énoncés dans les parties précédentes : les principes d'équivalence financière, de l'espérance mathématique (mutualisation) et le concept de valeur actuelle probable.



Le **principe d'équivalence financière** repose sur le fait que l'assureur va placer les primes jusqu'au versement des prestations.
Ces investissements sont effectués sur des supports diversifiés qui ont des taux de rendement variables.
Ce taux doit être choisi avec **prudence** : il est préférable de constater qu'on a été trop prudent dans les tarifs, et de rétrocéder une partie des marges de prudence aux assurés que de constater une insuffisance de tarif.
Hypothèse sur le taux d'actualisation (taux d'intérêt technique) :
Les investissements effectués ont un taux de rendement identique fixe.
On pose le principe général suivant pour la tarification :

Principe général : résultat nul au terme du contrat
L'espérance mathématique du résultat au terme du contrat est nulle, sous l'hypothèse d'un rendement constant des placements, et si le souscripteur ne met pas fin au contrat de manière prématurée.

Conséquence :

Contrainte de tarification
Sous l'hypothèse que le souscripteur ne mettra pas fin de manière prématurée au contrat,
les primes pures sont telles que leur VAP soit égale, à la date de souscription, à la VAP des prestations de l'assureur. Autrement dit :

pour tout *t =0* , VAP(primes pures de l'assuré) *égale* VAP(prestations de l'assureur)

Sauf que… l'article L. 132-20 du Code des assurances stipule que :
« En assurance sur la vie, l'assureur n'a pas d'action pour exiger le paiement des primes ».
Le souscripteur peut donc mettre fin au contrat quand il le souhaite.
On modifie la contrainte précédente en conséquence.

Contrainte de tarification
La VAP des primes à verser jusqu'à une époque **quelconque** est supérieure ou égale à la VAP des prestations de l'assureur jusqu'à la même époque. Autrement dit : pour tout *t >0* , VAP(primes pures de l'assuré) *supérieure ou égale* VAP(prestations de l'assureur)

3. Prime commerciale

A. Généralités
Le calcul de la prime pure n'intègre ni les coûts de commercialisation, ni les coûts de gestion. Cette prime pure est donc majorée de chargements par l'assureur.
• Coût du risque = prime pure ;
• Prime pure + chargements de gestion = prime d'inventaire ;
• Prime d'inventaire + chargements d'acquisition = prime commerciale.
B. Les différents chargements
Frais d'acquisition : Commercialisation, commissions, préparation des

dossiers, *etc.*
Frais de gestion des contrats : Encaissement des primes et comptabilisation, relation client, *etc*

Frais de gestion financière : Paiement des sinistres, gestion des contentieux, *etc.*
Frais généraux : Direction générale, comptabilité générale, *etc*

L'assureur doit donc adopter une structure de chargement qui reflète au mieux la structure des frais (fixes, proportionnels, viagers, *etc.*).

On retient la structure suivante :
Frais d'acquisition : Frais fixes f, versés par l'assureur au début du contrat
Frais d'encaissement des primes commerciales : Frais variables ; $\alpha\Pi''$
Frais de gestion annuels :

- Une proportion g_1 pour la gestion des primes (quittance, appel des primes) ; dure tant que les primes sont versées.
- Une proportion g_2 pour les autres frais annuels ; dure tant que le contrat existe.(*Souvent exprimés en pourcentage du capital pour les contrats temporaires décès ou les capitaux différés, ou en pourcentage d'un arrérage pour une rente*.)

Frais de règlement des prestations : Proportionnels aux prestations, au taux r. À la souscription, la VAP des prestations étant égale à la prime pure, les frais s'écrivent $r\Pi$.

C. Cas de la prime unique commerciale

La prime est unique : il n'y aura pas de versements de primes annuelles susceptibles de dépendre de l'état viager de l'assuré.

Prime commerciale unique = prime pure unique + frais d'acquisition + frais d'encaissement des primes (tant que les primes sont payées) + autres frais de gestion (tant que le contrat existe) + frais de règlement des prestations

$$\mathbf{\Pi''} = \Pi + f + \alpha\Pi'' + g_2\ddot{a}_G + r\Pi$$

Finalement :

$$\Pi'' = \frac{\Pi(1+r) + f + g_2\ddot{a}_G}{(1-\alpha)}$$

G fait référence à la condition du maintien de la garantie. Par exemple :

• Pour un contrat vie entière, $\ddot{a}_G = \ddot{a}_x$. Les frais $g_2\ddot{a}_x$ correspondent en effet à une certaine somme versée chaque année tant que l'assuré est en vie, ce qui est la définition d'un contrat de vie entière.

• Pour un temporaire décès de *n* années, on aura $\ddot{a}_G =_{|n} \ddot{a}_x$.

D. Cas de la prime annuelle commerciale payée d'avance

Par définition de la prime fractionnée :

$$\Pi = \mathrm{P}.\ddot{a}_H$$

Prime commerciale annuelle = prime pure annuelle + frais d'acquisition + frais d'encaissement des primes (tant que les primes sont payées) + frais de gestion des primes (tant que les primes sont payées) + autres frais de gestion (tant que le contrat existe) + frais de règlement des prestations

$$\mathbf{P''}.\boldsymbol{\ddot{a}_H} = P\ddot{a}_H + f + \alpha P''\ddot{a}_H + g_1\ddot{a}_H + g_2\ddot{a}_G + rP\ddot{a}_H$$

Soit Finalement :

$$P'' = \frac{P(1+r) + g_1 + g_2\dfrac{\ddot{a}_G}{\ddot{a}_H} + \dfrac{f}{\ddot{a}_H}}{(1-\alpha)}$$

Attention !

En passant d'une prime unique à une prime annuelle, les frais ont une structure différente. La relation sur les primes pures Π = $P\ddot{a}_H$ n'est plus vraie pour les primes commerciales. En particulier, on a pas Π'' = $P''\ddot{a}_H$

$$\Pi'' - P''\ddot{a}_H = \Pi + f + g_2\ddot{a}_G + \alpha\Pi'' + r\Pi - (P\ddot{a}_H + f + g_1\ddot{a}_H + g_2\ddot{a}_G + \alpha P''\ddot{a}_H + rP\ddot{a}_H)$$

$$\Leftrightarrow \Pi'' - P''\ddot{a}_H = g_1\ddot{a}_H + \alpha\Pi'' - \alpha P''\ddot{a}_H$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)(\Pi'' - P''\ddot{a}_H) = g_1\ddot{a}_H$$

$$\Leftrightarrow \Pi'' - P''\ddot{a}_H = \frac{g_1\ddot{a}_H}{1-\alpha}$$

La différence est liée aux frais proportionnels à $g_1$qui n'existent que quand la prime est annuelle.

Le regroupement du chargement d'acquisition et du chargement d'encaissement en un seul élément proportionnel à la prime commerciale $(\theta\Pi'' \text{ou } \theta P'')$conduit à modifier les formules générales données précédemment sous la forme :

Prime unique :

$$\Pi'' = \frac{\Pi(1+r) + g_2\ddot{a}_G}{(1-\theta)}$$

Prime annuelle :

$$P'' = \frac{P(1+r) + g_1 + g_2\frac{\ddot{a}_G}{\ddot{a}_H}}{(1-\theta)}$$

Le capital différé en cas de vie

Exemple :

Engagement : verser à l'assuré *c Da* dans *k* années si il est vivant.

Imaginons un assureur vendant n_a contrats de ce type au prix Π''
Son résultat net en n de contrat sera donc :

$$R_{n_a} = n_a.\Pi''.(1+i)^k - c.\mathcal{N}_V$$

où i est le taux d'intérêt et $\mathcal{N}_V$ représente le nombre d'assurés encore vivants en $t = k$ (aléatoire).

En supposant que tous les assurés ont la même probabilité p d'être en vie en $t = k$, et que ces probabilités sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_{n_a}) &= n_a.\Pi''.(1+i)^k - c.n_a.p \\ \sigma(R_{n_a}) &= c.\sigma(R_{n_a}) = c.\sqrt{n_a.p.(1-p)} \end{aligned}$$

<u>Application numérique :</u>

$$n_a = 10.000,\ c = 100.000,\ t = 8,\ i = 6\%,\ p = 0,9865$$

$$\Pi'' = 63.000$$

$$\mathbb{E}(R_{n_a}) = 17.614.290 \qquad \sigma(R_{n_a}) = 1.154.030$$

<u>Remarques :</u>

- faible écart-type; contrat relativement "sûr" pour l'assureur
- ici Π'' fixée; en général on cherchera la prime telle que

$\mathrm{IE}(R1) = 0$
et on parlera de **prime actuarielle** (ou actuariellement juste)
"**juste**" : engagement de l'assuré = engagement de l'assureur

- la différence entre la prime commerciale et la prime actuarielle constitue **les provisions mathématiques.**

<u>Tables de mortalité</u>

Dans l'exemple précédent, probabilité de survie p la même pour tous,
- dans les faits : utilisation de tables de mortalité réglementaires
- dépendantes de l'âge uniquement
- utilisation de la survie :
si l_x = (nombre d'assurés d'âge x à $t = 0$), et
l_{x+k} = (nombre d'assurés d'âge x à $t = 0$ vivant à $t = k$)
- probabilité(un individu d'âge x en $t = 0$ soit vivant en $t = k$) = l_{x+k}/l_x
- probabilité (un individu d'âge x en $t = 0$ décède avant $t = k$) = $\mathrm{l_x\text{-}l_{x+k}/l_x}$

<u>Exemple :</u> probabilité (un individu de 35 ans décède avant 45 ans)=1 – l_{45} / l_{35}

Loi de survie d'un individu d'âge x: l_x, l_{x+1},...,l_{x+k},...,l_w
où w est l'âge extrême de la vie humaine (≈ 100 ans)
- Tables de mortalité: loi de survie en partant de $l_0 = 100000$
Il existe différentes tables. Choix fixé par la réglementation
- TD et TV 88-90 (arrêté d'avril 1993) ; observations INSEE 1988-1990
- TD 88-90: population d'hommes ; utilisée pour assurance en cas de décès
- TV 88-90: population de femmes ; utilisée pour assurance en cas de vie
- remplacée par TH et TF 00-02 ; applicables depuis 2006
lissées : correctif d'âge écarts de mortalité entre générations
- ICI on utilisera TD et TV 88-90 (plus simples d'utilisation)

Capital différé

Rappel : verser à l'assuré c Da dans k années si il est vivant
On cherche Π tel que $\mathbb{E}(R_1) = 0$, c'est-à-dire
$\Pi(1+i)^k - c.p = 0$
où p représente la probabilité que l'assuré soit encore vivant dans k années
- En notant $v \equiv 1/1+i$ le taux d'actualisation, on a :

$$\Pi = \frac{c.p}{(1+i)^k} = c.v^k.\frac{l_{x+k}}{l_x}$$

C'est la Valeur Actuelle Probable du contrat.

Application numérique :

$x = 40$, $k = 8$, $c = 100000$

Π	TD 88-90	TV 88-90
$i = 3.5\%$	...	74.917
$i = 7\%$	56.412	57.416

- taux d'actualisation (8 ans) plus important que l'aléa de mortalité,
- tarification prudente : $i = 3{:}5\%$ & TV (réglementaire),
- Charge de la prestation (pour l'assureur) pour un contrat vue en $t = 0$:

$$X_i = \begin{cases} c.v^k & \text{avec probabilité } p = \frac{l_{x+k}}{l_x} \\ 0 & \text{avec probabilité } (1-p) \end{cases}$$

d'où $\mathbb{E}(X_i) = \Pi$ et

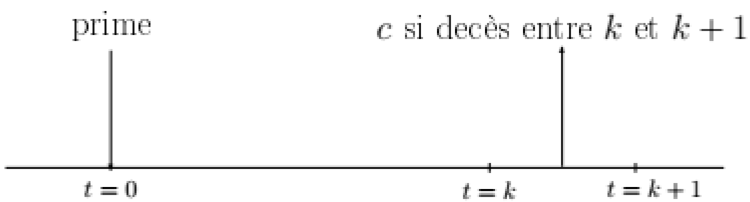
$$\sigma(X_i) = c.v^k.\sqrt{\frac{l_{x+k}}{l_x}\left(1 - \frac{l_{x+k}}{l_x}\right)}$$

soit pour n contrats (identiques et indépendants) : $E(X) = n.\Pi$ et $\sigma(X) = n^{1/2}\,\sigma(X_i)$
c'est-à-dire avec 10000 contrats et la tarification prudente supra :
$E(X) = 749170000$ et $\sigma(X) = 100.\sigma(X_i) = 876150$.

On aboutit donc avec un intervalle de confiance à 95% pour la charge totale des prestation :
$[X]_{95\%} = [747452746; 750887254]$
On peut remarquer que l'intervalle est petit alors peu de risque pour l'assureur.

Le temporaire décès

Engagement (en $t = 0$): verser au bénéficiaire c Da à la mort de l'assuré si celui-ci meurt entre $t = k$ et $t = k + 1$.



Attention : versé à la mort de l'assuré pas à la fin du contrat
Hypothèse : les décès sont uniformément répartis sur l'année en espérance tous les décès on lieu en $k + 12$, ainsi en $t = k + 1$.

$$\mathbb{E}(R_1) = \underbrace{\left(\Pi(1+i)^{k+\frac{1}{2}} - cq\right)}_{\text{en } t=k+\frac{1}{2}} .(1+i)^{\frac{1}{2}}$$

où q représente la probabilité de décès entre $t = k$ et $t = k + 1$.

La prime pure s'écrit donc

$$\Pi = \frac{c.\frac{l_{x+k}-l_{x+k+1}}{l_x}}{(1+i)^{k+\frac{1}{2}}}$$

Application numérique :

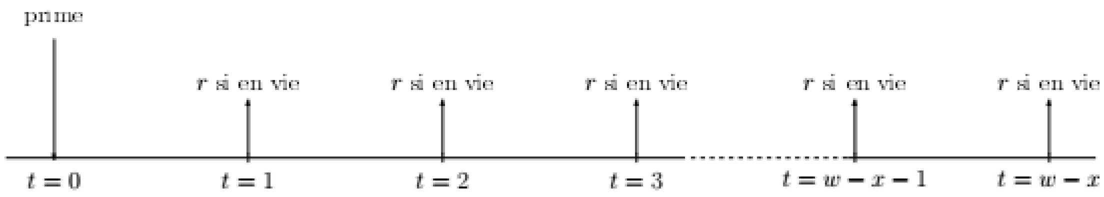
x = 40, k = 0 (immédiate), c = 100000

Π	TD 88-90	TV 88-90
$i = 3.5\%$	280	122
$i = 7\%$	275	...

peu d'impact du taux (immédiat), gros aléa de mortalité
tarification prudente :i = 3:5% & TD (réglementaire)
$\sigma(Xi) = cv^{1/2}\,((1-l_{x+1}/l_x)\, l_{x+1}/l_x)$= 5239, 7 (très important). Pour 10000 contrats (avec la tarification prudente),
$[X]_{95\%}$ = [1774160; 3828120]), *alors* l'incertitude est forte!

La rente viagère

Engagement: verser à l'assuré r Da à la fin de chaque année (à terme échu) tant qu'il est vivant



On veut calculer la prime pure Π .
Si on pose r = 10000, x = 65 (retraite)

Π	TD 88-90	TV 88-90
$i = 3.5\%$	107.932	132.524
$i = 7\%$	...	97.581

(somme à verser à 65 pour obtenir 10000 Da par an jusqu'à sa mort)
fort impact du taux et de la mortalité! tarification prudente : i = 3; 5% et TV
Charge d'un contrat :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\ \dots & \text{avec probabilité } \dots \\ \dots & \text{avec probabilité } \dots \\ . & \\ . & \\ . & \\ \dots & \text{avec probabilité } \dots \end{cases}$$

d'où, avec la tarification prudente
$\mathbb{E}(X_i) = \Pi = 132524$ et $\sigma(X_i) = 44448,72$
soit pour 10000 assurés, $[X]_{95\%} = [1316528050; 1333951950]$.

Calcul de VAP et notations

Soient $T_x \equiv$ durée aléatoire de survie d'un individu d'âge x, $P(T_x > k) = l_{x+k}/l_x \equiv {}_kp_x$ *et*

$P(k < T_x < k + k') = l_{x+k}-l_{x+k+k'}/l_x \equiv {}_{k/k'}q_x$
Valeur actuelle probable des engagements fondamentaux ${}_{k/k'}VAP_x$

où k représente le différé et k' la durée

Engagements élémentaires

Engagement élémentaire en cas de vie (1 Da versé dans k année si l'assuré âgé de x ans est encore vivant)

$${}_kE_x \equiv v^k.\frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Engagement élémentaire en cas de décès (1 Da versé si l'assuré âgée de x ans meurt entre k et $k + 1$)

$$_{k|1}A_x \equiv v^{k+\frac{1}{2}}.\frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}$$

Annuité viagère :

payable d'avance : $\ddot{a}_x = {}_0E_x + {}_1E_x + ::: + {}_{w-x-1}E_x$
à terme échu : $a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + ::: + {}_{w-x}E_x$

Garantie décès vie entière (≈ contrat obsèques) :

$$A_x = {}_{0|1}A_x + {}_{1|1}A_x + ... + {}_{k|1}A_x + ... + {}_{w-x-1|1}A_x$$

Les nombres de commutation sur une tête :
Pour faciliter les calculs : commutations
Tables : pour un taux d'intérêt une table de mortalité donnée

Commutations en cas de vie

$$D_x \equiv v^x l_x \quad \text{et} \quad N_x \equiv D_x + D_{x+1} + ... + D_w$$

donnent

$$_kE_x = \frac{D_{x+k}}{D_x}, \quad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}, \quad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad \text{et} \quad {}_{m|n}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

Commutations en cas de décès

$$C_x \equiv v^{x+\frac{1}{2}}(l_x - l_{x+1}) \quad \text{et} \quad M_x \equiv C_x + C_{x+1} + ... + C_{w-1}$$

donnent

$$_{k|1}A_x = \frac{C_{x+k}}{D_x}, \quad A_x = \frac{M_x}{D_x} \quad \text{et} \quad _{m|n}\mathrm{A}_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Tables de mortalité brutes

Principe : à partir d'une cohorte initiale à la naissance on suit année après année le nombre de survivants,

l_x =*nombre des survivants à l'âge x.* l_0 =1.000.000, Age ultime : premier âge où plus de survivants l_ω = 0, par exemple 100 ans en Algérie.

Exemple d'une table de mortalité brute :

Age (x)	Table (l_x)
0	1.000.000
1	999.415
2	999.012
: :	: :
50	955.971
70	767.567
91	250.345

Nombre de décès à l'âge x :

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Probabilités de survie et décès

Probabilité annuelle de décès - quotient de mortalité

Probabilité étant en vie à l'âge x de décéder dans l'année :

$$q_x = d_x / l_x$$

Remarque : Les principaux facteurs explicatifs des quotients de mortalité sont : l 'âge, le sexe, l'époque et le lieu.

Probabilité annuelle de survie

Probabilité étant en vie à l'âge x d'être encore envie à l'âge $x+1$:

$$p_x = l_{x+1}/l_x = 1 - q_x$$

Probabilité de survie dans n années :

Probabilité étant en vie à l'âge x d'être encore en vie à l'âge $x+n$ (ou de décéder après l'âge $x+n$) :

$$_np_x = l_{x+n}/ l_x = p_x p_{x+1} \ldots p_{x+n-1}$$

Probabilité de décès dans les n années

Probabilité étant en vie à l'âge x de décéder avant l'âge $x+n$:

$$_nq_x = (l_x - l_{x+n})/l_x = 1 - {_np_x}$$

Probabilité étant en vie à l'âge x de décéder dans n années entre les âges $(x+n)$ et $(x+n+1)$:

$$_{n/}q_x = (l_{x+n} - l_{x+n+1})/l_x = {_np_x} \cdot q_{x+n}$$

Espérance de vie

Définition de l'espérance de vie à l'âge *x*:

Moyenne à l'âge *x* du nombre d'années restant à vivre

Espérance de vie abrégée : (décès en début d'année):

$$\mathbf{e\ x} = \sum_{t=1}^{\omega-x} t \ \ {}_{\underline{t}}q_x \quad = \sum_{t=1}^{\omega-x} t \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

Espérance de vie complète : (décès en milieu d'année): $\mathbf{e_x} \quad = \ \mathbf{e_x} \ + \quad \frac{1}{2}$

Autre forme de l'espérance de vie :

$$\mathbf{e\ x} = \sum_{t=1}^{\omega-x} \ {}_tp_x$$

Durée de vie : Expression en fonction de la variable aléatoire « durée de vie future » T(x)= variable aléatoire = durée de vie future d'un individu d'âge x, x+T(x) = âge au décès .L'espérance de vie est l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

TAUX INSTANTANÉ DE MORTALITÉ

Objectif : définir le taux de mortalité instantané, noté .

Soit un assuré pris en observation à l'âge *x* et supposé vivant à la date *t* (donc à l'âge *x+t*), on cherche la probabilité qu'il décède dans l'intervalle de temps *(t ; t+ Δt*). Le nombre cherché est :

$$\mathbb{P}(t < T_x < t + \Delta t / T_x > t) = \frac{\mathbb{P}(t < T_x < t + \Delta t)}{\mathbb{P}(T_x > t)} = \frac{{}_{t|\Delta t}q_x}{{}_t p_x}$$

Or

$${}_{t|\Delta t}q_x = \mathbb{P}(t < T_x < t + \Delta t) = \mathbb{P}(T_x > t) - \mathbb{P}(T_x > t + \Delta t) = {}_t p_x - {}_{t+\Delta t}p_x$$

Lorsque $\Delta t \to 0$, cette expression tend vers 0. Mais si on suppose la fonction ${}_t\boldsymbol{p}_x$ dérivable par rapport à t, alors, pour Δt infiniment
petit :

$$\begin{aligned} {}_t p'_x &= \frac{{}_t p_x - {}_{t+\Delta t}p_x}{t - (t + \Delta t)} = -\frac{1}{\Delta t}\left({}_t p_x - {}_{t+\Delta t}p_x \right) \\ &\Leftrightarrow {}_t p_x - {}_{t+\Delta t}p_x = - {}_t p'_x \times \Delta t \\ &\Leftrightarrow {}_{t|\Delta t}q_x = - {}_t p'_x \times \Delta t \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{{}_{t|\Delta t}q_x}{{}_t p_x} == -\frac{{}_t p'_x}{{}_t p_x} \times \Delta t$$

Comme : ${}_t\boldsymbol{p}_x = \frac{\mathbf{l}_{x+t}}{\mathbf{l}_x}$, alors : ${}_t\boldsymbol{p}'_x = \frac{\mathbf{l'}_{x+t}}{\mathbf{l}_x}$, et

$$\frac{{}_{t|\Delta t}q_x}{{}_t p_x} = -\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}\Delta t$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Delta t}\frac{{}_{t|\Delta t}q_x}{{}_t p_x} = -\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{\Delta t}\mathbb{P}(t < T_x < t + \Delta t / \, T_x > t) = -\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}$$

La limite de l'expression $\frac{1}{\Delta t}\mathbb{P}(t < T_x < t + \Delta t / \, T_x > t)$ lorsque $\Delta t \to 0$ est égale à $-\frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}}$.

C'est une fonction μ_{x+t} de l'âge atteint $x + t$ qu'on appelle le taux instantané de mortalité à l'âge $x + t$. Donc pour un âge y :

$$\boldsymbol{\mu_y = \frac{l'_y}{l_y} = -\frac{d}{dy}\left[ln(l_y)\right]}$$

Si on connaît la fonction μ_y, on aura, par intégration entre x et $x + t$:

$$\ln(l_{x+t}) - \ln(l_x) = -\int_{x}^{x+t} \mu_y \, dy$$

Soit :

$$\ln({}_t p_x) = -\int_{x}^{x+t} \mu_y \, dy$$

D'où :

$${}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_y \, dy}$$

ESPÉRANCE DE VIE À L'ÂGE

L'espérance de vie à l'âge x est l'espérance mathématique de la durée de vie T_x. Pour rappel : ${}_tq_x = \mathbb{P}(T_x \leq t)$.

On note :

$$\dot{e}_x = \int_0^{\omega-x} t \quad {}_{t|dt}q_x$$

Comme : ${}_{t|dt}q_x = - \quad {}_tp'_x \times dt = -\frac{l'_{x+t}}{l_x}\ dt$

$$\dot{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} t\,.\,l'_{x+t}\,.\,dt$$

On observe que :

$$d(t.\,l_{x+t}) = dt.\,l_{x+t} + t.\frac{dl_{x+t}}{dt} = dt.\,l_{x+t} + t.\,l'_{x+t}\,.\,dt = dt.\,(l_{x+t} + t.\,l'_{x+t})$$

Donc :

$$\dot{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} (d(t.\,l_{x+t}) - dt.\,l_{x+t}\ ) = \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} d(t.\,l_{x+t}) + \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} l_{x+t}\,.\,dt$$

$$\dot{e}_x = \frac{1}{l_x}\left([t.\,l_{x+t}]_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\,.\,dt\right)$$

Comme $l_\omega = 0$,

$$\dot{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} l_{x+t}\,.\,dt = \frac{1}{l_x}\int_x^{\omega} l_y\,.\,dy$$

En approchant l'intégrale par la méthode des trapèzes :

$$\boldsymbol{\dot{e}_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_{\omega-1}}{l_x} + \frac{1}{2}}$$

Modèle de Gompertz et Makeham

Le modèle de Gompertz (ou loi de mortalité de Gompertz-Makeham) établit que le taux de mortalité est la somme de termes indépendants de l'âge (termes de Makeham) et de termes dépendants de l'âge (fonction de Gompertz).

Ce modèle suggère également la diminution exponentielle du nombre d'organismes vivants proportionnellement à l'augmentation linéaire de l'âge.

La mathématisation de la science de la population progresse au XIXe siècle, notamment grâce à la loi de la mortalité établie par Benjamin Gompertz, mais également grâce à la loi logistique de Pierre François Verhulst, selon laquelle la croissance de la population ralentit.

En effet en 1825, Benjamin Gompertz propose que la force de mortalité augmente de façon exponentielle avec l'âge . Cependant, se pose le problème de prendre en compte les causes de décès qui ne seraient pas directement liées à l'âge. C'est ainsi que William Makeham propose d'extrapoler la force de mortalité aux grands âges sur la base d'une loi de Gompertz modifiée et tenant compte des causes de décès indépendantes de l'âge . Ajustement analytique de tables brutes de mortalité suivant un modèle explicatif des causes de mortalité 2 causes principales de mortalité :

ACCIDENT : indépendant
de l'âge.
MALADIE : croit exponentiellement
avec l'âge.

3 modèles classiques:
modèle accident:
- taux instantané constant
modèle maladie – **GOMPERTZ (1825)**
- taux instantané exponentiel
modèle accident- maladie – **MAKEHAM (1860)**
-taux instantané constant+ exponentiel

Modèle accident :

$\mu_x = A$ *alors* $l_x = k \exp(-Ax)$

Population décroissant exponentiellement

Modèle maladie de GOMPERTZ :

$\mu_x = B\ c^x$ alors $l_x = k\ exp(-Bc^x/lnc)$

Population décroissant doublement exponentiellement.

Modèle de MAKEHAM :

$\mu_x = A + B\ c^x$ alors $l_x = k\ exp(-Ax)exp(-Bc^x/lnc)$

Population décroissant sous deux effets.

Ecriture canonique de Makeham :

$$\boxed{l_x = k\, s^x\, g^{c^x}}$$

Avec:

$$s = e^{-A} < 1 \qquad\qquad c > 1$$

$$g = e^{-\frac{B}{\ln c}} < 1$$

$$k \ tel \ que \ \ l_0 = 1.000.000$$

$$k = \frac{1.000.000}{g} > 1.000.000$$

Avantages de la table de MAKEHAM
logique explicative
dépend de 4 paramètres

facilité d'utilisation (cf. 2 têtes – voir plus loin)

Les inconvénients de la table de MAKEHAM
ne capture pas des phénomènes tels que :
- mortalité infantile
- bosse des accidents à 20 ans
- comportement aux grands âges

Probabilités sur 2 têtes

Probabilités relatives à un couple de personnes d'âge x et y :

Hypothèse (discutable…) : indépendance des durées de vie

a) Probabilité pour que les 2 têtes soient encore en vie dans n années

$_n p_{xy} = {}_n p_x \quad {}_n p_y$

b) Probabilité pour qu'au moins une des 2 têtes soit encore en vie dans n années

$$_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy}$$

c) Probabilité pour que les 2 têtes soient décédées dans n années :

$$_n q_{\overline{xy}} = 1 - {}_n p_{\overline{xy}}$$

Notion d'âge moyen :
Substituer à un couple d'âges *x* et *y* un couple de même âge et ayant la même probabilité de survie (Objectif : remplacer une table à double entrée par une table
à une entrée).

$$\boxed{_n p_{mm} = {}_n p_{xy}}$$

En général , m dépend non seulement de *x* et de *y* mais aussi de *n*.

C'est à dire :

$$c^m = \frac{c^x + c^y}{2}$$

$$\boxed{m = \ln\left(\frac{c^x + c^y}{2}\right) / \ln c}$$

On a aussi dans Makeham :

$$\mu_m = \frac{\mu_x + \mu_y}{2}$$

Cas particulier : *Table de MAKEHAM*

Montrons que dans ce cas l'âge moyen ne dépend que des deux âges de départ .

$$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{k\, s^{x+n} g^{c^{x+n}}}{k\, s^x g^{c^x}} = s^n\, g^{c^x (c^n - 1)}$$

m est alors solution de l'équation :

$$(s^n g^{c^m (c^n - 1)})^2 = s^n g^{c^x (c^n - 1)}\; s^n g^{c^y (c^n - 1)}$$

Annexes

ANNUITÉS VIAGÈRES

Rappels de notations

l_x : nombre de survivants à l'âge x au sein de la génération ;

$d_x = l_x - l_{x+1}$: nombre de décès entre l'âge x et $x+1$;

$v = \frac{1}{1+i}$;

NOMBRES DE COMMUTATIONS EN CAS DE VIE

$$D_x = l_x v^x$$

$$N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}$$

$$S_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} N_{x+k}$$

NOMBRES DE COMMUTATIONS EN CAS DE DÉCÈS

$$C_x = d_x v^{x+\frac{1}{2}}$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k}$$

$$R_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} M_{x+k}$$

VALEUR ACTUELLE PROBABLE DES ENGAGEMENTS VIAGERS EN CAS DE DÉCÈS

1. **Engagement vie entière**

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{d_{x+k}}{l_x} v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M_x}{D_x}$$

2. **Temporaire décès de n années**

$$_{|n}A_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_{x+k}}{l_x} v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

3. **Temporaire décès de n années avec différé de m années**

$$_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{d_{x+k}}{l_x} v^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

4. **Vie entière avec différé de m années**

$$_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

VALEUR ACTUELLE PROBABLE DES ENGAGEMENTS VIAGERS EN CAS DE VIE

1. **Capital différé sans contre-assurance**

$$ {}_{n}E_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

2. **Rentes viagères**

	À TERME ÉCHU	**À TERME D'AVANCE**
Rente viagère immédiate et illimitée	$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{N_{x+1}}{D_x}$	$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{N_x}{D_x}$
Rente viagère immédiate et temporaire de *n* années	${}_{\vert n}a_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$	${}_{\vert n}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$
Rente viagère différée de *m* années et illimitée	${}_{m\vert}a_x = \sum_{k=m+1}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$	${}_{m\vert}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{N_{x+m}}{D_x}$
Rente viagère différée de *m* années temporaire de *n* années	${}_{m\vert n}a_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$	${}_{m\vert n}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$

ANNUITÉS FINANCIÈRES

Annuités à terme échu constantes

Annuité temporaire de n années, immédiate	$a_n = \sum_{k=1}^{n} \nu^k = \nu \, \frac{1-\nu^n}{1-\nu} = \frac{1-\nu^n}{i}$
Annuité illimitée, immédiate	$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{i}$
Annuité temporaire de n années, différée de m années	${}_m a_n = \sum_{k=1}^{n} \nu^{m+k}$

Annuités d'avance constantes

Annuité temporaire de n années, immédiate	$\ddot{a}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k = \frac{1-\nu^n}{1-\nu}$
Annuité illimitée, immédiate	$\ddot{a} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_n = \frac{1}{1-\nu} = 1 + \frac{1}{i}$
Annuité temporaire de n années, différée de m années	${}_m \ddot{a}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{m+k}$

Annuités fractionnées à terme échu

Soit $p \in \mathbb{N}$, le versement est de $\frac{1}{p}$, effectué au terme de chaque p-ième fraction d'année. On définit le taux périodique équivalent : $(1+i_p)^p = (1+i)$ et on pose : $\nu_p = \nu^{\frac{1}{p}}$. Alors :

$$\boxed{a_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{p}(\nu_p)^k = \frac{\nu_p}{p}\frac{1-\nu^n}{1-\nu_p} = \frac{1}{p}\frac{i}{i_p}\frac{1-\nu^n}{i} = g_p a_n}$$

avec $g_p = \frac{1}{p}\frac{i}{i_p}$.

Annuités fractionnées d'avance

Soit $p \in \mathbb{N}$, le versement est de $\frac{1}{p}$, effectué au début de chaque p-ième fraction d'année. Alors :

$$\boxed{\ddot{a}_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{np-1} \frac{1}{p}(\nu_p)^k = \frac{1}{p}\,\frac{1-\nu^n}{1-\nu_p}}$$

Remarque : $\ddot{a}_n^{(p)} = \frac{1}{p} + a_n^{(p)} - \frac{1}{p}\nu^n$

Références

[1] B. Denuit et A. Charpentier (2010) Mathématiques de l'assurance non-vie I.*Economica*.
[2] B. Denuit et A. Charpentier (2010) Mathématiques de l'assurance non-vie II.*Economica*.
[3] C. Hess (2000) Méthodes actuarielles de l'assurance vie. *Economica*.
[4] S. Loisel (2002) Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine, *Troisème année ISFA*.
http://isfaserveur.univ-lyon1.fr/~stephane.loisel/poly3a-temp.pdf
[5] D. Pierre-Loti-Viaud (2008) Actuariat Introduction. *Notes de cours*.
[6] D. Pierre-Loti-Viaud et P. Boulongne (2014) Mathématique de l'assurance,premiers éléments. *Ellipse*, 56 (6), 1907-1911.