UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE Tronc Commun MI 1ère année /20019– 2020
Unité d'Enseignement de Transversale
Responsable du module d'électricité (Coefficient : 2, Crédit : 3) : Professeur A. GASMI
Mode d'Evaluation : Note EMD 60% et Note TD 40 %

Série de TD N° 1 : Electrostatique (du 16 /02/2020 au 19 /04/2020)

Exercice à traiter obligatoirement : 2, 3, 4, 5 et 6

Exercice 1 :

D'après la physique moderne l'atome d'hydrogène est constitué essentiellement d'un électron, de charge $q_e = - 1.6\ 10^{-19}$ C et de masse $M_e = 0{,}91\ 10^{-30}$ Kg et d'un proton, de charge $q_p = 1.16\ 10^{-19}$ C et de masse $M_p = 1{,}872\ 10^{-27}$ Kg. Supposons que l'électron tourne autour du proton à une distance
$r= 5{,}3\ 10^{-11}$ m.

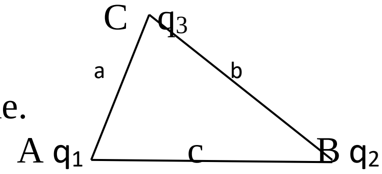
a- Quelle est la nature de la force.
b- Calculer cette force.
c- Calculer la vitesse de l'électron.

Exercice 2

Aux sommets des angles d'un triangle de côtés a = 8cm, b = 10cm et c = 12cm, on place trois charges

$q_1 = 210^{-6}$C, $q_2 = -310^{-6}$C et $q_3 = 10^{-6}$C. (figure1)

a) Calculer la force résultante qui agit sur la charge q_3
b) Calculer le potentiel électrique au centre de gravité de triangle.
c) Calculer le champ électrique au centre de gravité de triangle.



On donne la constante diélectrique dans le vide $\varepsilon_0 = 8{,}8510^{-12}$ C^2/Nm^2

figure1

Exercice 3 :

Deux charges ponctuelles, $q_1 = 40.\ 10^{-9}$ C et $q_2 = -30.\ 10^{-9}$ C, se trouvent à une distance $A_1 A_2$ = 10 cm l'une de l'autre.

1- Calculer le potentiel :
a) En un point A situé à mi-distance entre les charges.
b) En un point B situé à 8 cm de la charge q_1 et à 6 cm de la charge q_2.
2- Calculer le champ électrique en A et B.
3- Quel est le travail nécessaire pour transférer une charge $q = 25.\ 10^{-9}$ C de B en A ?

Exercice 4 :

On considère la distribution électrostatique uniforme λ sur le segment $x \in [-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$.

Calculer E et V sur l'axe OX pour $x > \frac{a}{2}$.

Exercice 5:

Soit une distribution circulaire, de centre O et de rayon R, uniformément chargé avec une densité linéique λ.

a)Déterminer le champ électrique E créé à la distance z de l'axe du cercle.

b) Déterminer le potentiel V créé à la distance z de l'axe du cercle.

Exercice 6:

Deux charges ponctuelles positives, de valeur q, sont fixées sur l'axe des Y aux coordonnées y=+a et y=-a.

a) Montrer que le potentiel en tout point de l'axe des X est donné par :

$$V(x)=K\times 2q\times (a^2+x^2)^{-1/2} \quad \text{avec } K=9\times 10^9 SI$$

b) Quelle est l'expression du champ électrique E sur l'axe des X, comparer avec dV(x)/dx. commenter

c) Quel est le travail effectué par la force électrique pour déplacer une charge de +6C du point $x_a=3a$ au point $x_B=4a$, sachant que $q=+e=1.6\times 10^{-19}$C et a=1A

Exercice 7

Un dipôle électrique est constitué de deux charge –q et +q placées en A et B.

Son moment dipolaire est défini par : $\vec{p} = q.\overrightarrow{AB}$

a) Déterminer le champ électrique E, crée par ce dipôle, en un point M situé sur l'axe AB a une distance r de son centre.

b) Si ce dipôle est soumis a un champ électrique E', montrer que son énergie potentielle électrique est donnée par :

$W_p=-p\times E'\times cos(\vec{P},\vec{E'})$

Exercice 8

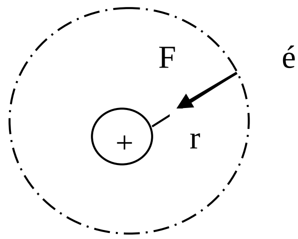
On considère la distribution électrostatique de densité de charge linéaire et uniforme λ sur un fil infiniment long.

a) Calculer le champ électrique E a une distance a du fil par la méthode directe et en appliquant le théorème de Gauss.

b) Appliquer le résultat pour calculer le champ électrique crée par deux fils perpendiculaires, chargés de densités de charges linéaires λ et 2λ.

SOLUTIONS DES EXERCICES DE LA SERIE N°1(ELECTROSTATIQUE)

Exo 01



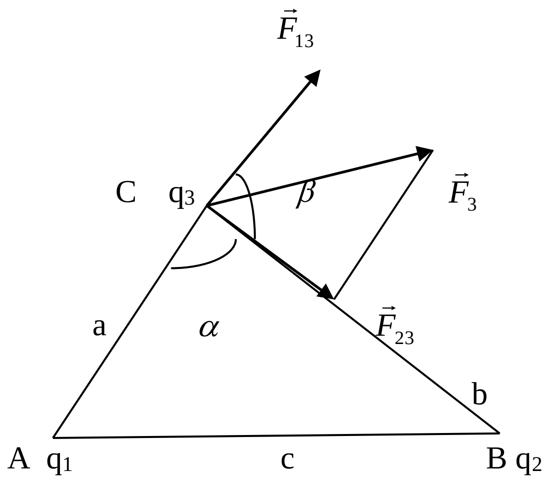
a) La force électrique est attractive

b) F = $K\dfrac{q_e q_p}{r^{2}} = 910^{9}\,\dfrac{1.6.10^{-19}1.6.10^{-19}}{(5.310^{-11})^{2}}$ =8.2 10^{-8} N

c) F est égale à à la force centripète qui maintient l'é sur orbitale circulaire

F= $\dfrac{\text{mv}^{2}}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{F_R}{m}} = \sqrt{\dfrac{8.2\ 10^{-8}5.310^{-11}}{.9110^{-30}}} = 2.1810^{6}\,ms^{-1}$

Exo 02 :



a) Calcul de La force électrique résultante

$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$

$F_3 = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2 + 2F_{13}F_{23}\cos\alpha}$

$F_{13} = K\dfrac{q_1 q_3}{a^2} = 910^{9}\,\dfrac{2.10^{-6}.10^{-6}}{(810^{-2})^{2}} = \dfrac{180}{64} = 2{,}8N$

$F_{23} = K\dfrac{q_2 q_3}{b^2} = 910^{9}\,\dfrac{3.10^{-6}.10^{-6}}{(10.10^{-2})^{2}} = 2{,}7N$

$\vec{BA} = \vec{BC} + \vec{CA} \Longrightarrow BA^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CA\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{144-100-64}{160} = -0{,}125$

$F_3 = \sqrt{(2{,}8)^2 + (2{,}7)^2 - 2.2{,}8.2{,}70{,}125}$ = $\sqrt{7{,}84 + 7{,}29 - 2.2{,}8.2{,}7 - 1{,}89}$ = 3,64N

b) Calcul du potentiel électrique au point G

$V_G = V_1 + V_2 + V_3$

$V_1 = \dfrac{Kq_1}{AG}$, $V_2 = \dfrac{Kq_2}{BG}$ et $V_3 = \dfrac{Kq_3}{CG}$

AG = 2/3 AH on a $\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{BH} \Rightarrow AH^2 = AB^2 + BH^2 + 2\vec{AB}.\vec{BH}$

$AH^2 = AB^2 + BH^2 - 2AB.BH\cos\hat{B}$

$AH^2 = c^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - b.c.\cos\hat{B}$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \Rightarrow \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\hat{B}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2.bc}$$

$$AH^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} = \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{2}$$

$$AH = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{2}} \quad ; \quad AH = \sqrt{\frac{64}{2} - \frac{100}{4} + \frac{144}{2}} = \sqrt{79} = 8{,}88cm$$

AG = 2 /3 AH $\Rightarrow$ AG = 5,92cm

BG = 2/3 BH' on a $\vec{BH}' = \vec{BA} + \vec{AH}' \Rightarrow \quad BH'^2 = BA^2 + AH'^2 - 2BA.AH'.\cos\hat{A}$

$$BH'^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - c.a.\cos\hat{A}$$

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} \Rightarrow \quad BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA.AC.\cos\hat{A}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}$$

$$BH'^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2}$$

$$BH' = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2}} \quad ; \quad BH' = \sqrt{\frac{144}{2} - \frac{64}{4} + \frac{100}{2}} = \sqrt{106} = 10{,}29$$

BG = 2 /3 BH' $\Rightarrow$ BG = 6,86cm

CG = 2/3 CH'' on a $\vec{CH}'' = \vec{CA} + \vec{AH}'' \Rightarrow \quad CH''^2 = CA^2 + AH''^2 - 2.C.A.AH''.\cos\hat{A}$

$$CH''^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{2}$$

$$CH'' = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{2}} \quad ; \quad CH'' = \sqrt{\frac{64}{2} - \frac{144}{4} + \frac{100}{2}} = \sqrt{46} = 6{,}78$$

CG = 2 /3 BH'' $\Rightarrow$ CG = 4,52cm

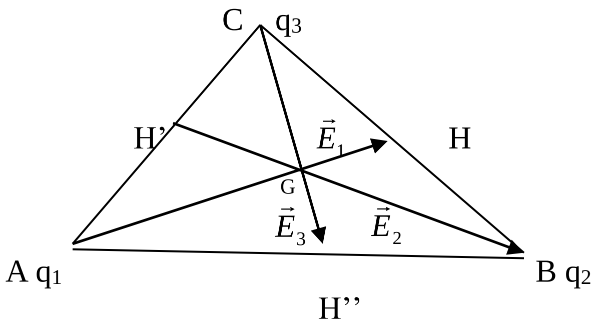
$V_G = 9 10^9 10^{-6}\left(\frac{2}{5{,}92 10^{-2}} - \frac{3}{6{,}86 10^{-2}} + \frac{1}{4{,}52 10^{-2}}\right) = 1{,}1016 10^5 V$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$E_1 = \frac{Kq_1}{AG^2} = \frac{9 10^9 .2 10^{-6}}{(5{,}92)^2 10^{-4}} = \frac{18 10^7}{(5{,}92)^2} = 0{,}5 10^7 V/m \ ,$$

$$E_2 = \frac{Kq_2}{BG^2} = \frac{9 10^9 . 3 10^{-6}}{(6{,}86)^2 10^{-4}} = \frac{18 10^7}{(6{,}86)^2} = 0{,}57 10^7 V/m$$

$$E_3 = \frac{Kq_3}{CG^2} = \frac{9 10^9 . 10^{-6}}{(4{,}52)^2 10^{-4}} = \frac{9 10^7}{20{,}43} = 0{,}44 10^7 V/m$$



Projection sur l'axe Gx

Ex = E1 $\cos\alpha$ +E2+ E3 $\cos\alpha$

Projection sur l'axe Gy

Ey = E1 $\sin\alpha$ - E3 $\sin\alpha$

Calcul de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$

$$B\vec{H} = B\vec{G} + G\vec{H} \Rightarrow BH^2 = BG^2 + GH^2 - 2BG.GH\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{BG^2 + GH^2 - BH^2}{2BG.GH}$$

On sait que BG = 6,86, GH = 1/3AH = 2,96 cm et GH = BC./2 = b/2 = 5 cm.

$$\cos\alpha = \frac{(6{,}86)^2 + (2{,}96)^2 - 5^2}{2 6{,}86.2{,}96} = 0{,}7589 \Rightarrow \alpha = 40{,}63$$

$$B\vec{H}'' = B\vec{G} + G\vec{H}'' = \Rightarrow BH''^2 = BG^2 + GH''^2 - 2BG.GH''\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{BG^2 + GH''^2 - BH''^2}{2BG.GH''}$$

Comme GH'' = 1/3CH'' = 1/3 6,78= 2,26 cm

BH'' AB/2 = c/2 = 12/2 = 6 cm

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{BG^2 + GH''^2 - BH''^2}{2BG.GH''} = \frac{(6{,}86)^2 + (2{,}26)^2 - (6)^2}{2.6{,}86.2{,}26} = 0{,}5214 \Rightarrow \beta = 58{,}57$$

$\sin\alpha$ = 0,65

$\sin\beta$ = 0,85

Ex = 0,5 10^7. 0,76 + 0,57 10^7 + 0,44 10^7 .0, 52 = 1,18 10^7 V /m

Ey = 0,5 10^7. 0,65 - 0,44 10^7 .0, 85 = 0,05 10^7 V /m

$$E_G = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \qquad E_G = \sqrt{1{,}18^2 + 0{,}05^2}\,10^7 = 1{,}18\ 10^7 \text{ V/m}$$

Exo 03 :

1- a- $V_{A1}=\frac{Kq_1}{AA_1} et V_{A2}=\frac{Kq_2}{AA_2}\Rightarrow V_A=K(\frac{q_A}{AA_1}+\frac{q_2}{AA_2})=910^9(\frac{40.10^{-9}}{5.10^{-2}}-\frac{30.10^{-9}}{5.10^{-2}})=1800V$

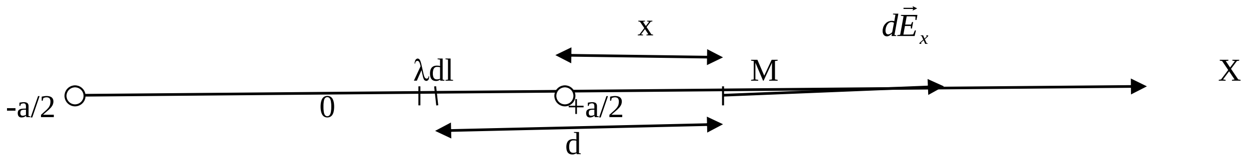
b-$V_B=K(\frac{q_A}{A_1B}+\frac{q_2}{A_2B})=910^9(\frac{40.10^{-9}}{8.10^{-2}}-\frac{30.10^{-9}}{6.10^{-2}})=0V$

$\vec{E}_A=\vec{E}_{A1}+\vec{E}_{A2}\Rightarrow E_A=E_{A1}+E_{A2}$

$E_A=K(\frac{q_A}{(A_1A)^2}+\frac{q_2}{(A_2A)^2})=910^9(\frac{40.10^{-9}}{25.10^{-4}}-\frac{30.10^{-9}}{25.10^{-4}})=25{,}2.10^4V/m$

$E_B=[\frac{Kq_A}{(A_1B)^2}]^2+[\frac{Kq_2}{(A_2B)^2}]^2+2K^2\frac{q_1q_2}{(A_2B)^2(A_1B)^2}\cos(\vec{E}_{A1},\vec{E}_{A2})$

<u>Exo 04 :</u>



Le champ électrique sur l'axe OX $\Rightarrow$ E_y et E_z = 0 donc E = $\int dE_X$

dE_X = dE comme dE = $\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2}$ et dq = λdx dE= $\frac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2}$

E = $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\frac{dx}{(d-x)^2}$ $\Rightarrow$ E = $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{d-\frac{a}{2}}-\frac{1}{d+\frac{a}{2}}]$

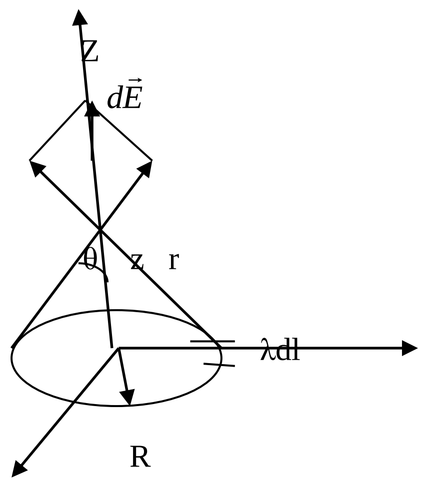
et finalement E = $\frac{\lambda a}{\pi\epsilon_0(4d^2-a^2)}$

Le potentiel électrique sur l'axe OX est :

dV = $\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(d-x)}=\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(d-x)}$ $\Rightarrow$ $V=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\frac{dx}{(d-x)}$ = $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left|d+\frac{a}{2}\right|-\ln\left|d-\frac{a}{2}\right|$

<u>Exo 05 :</u>

On remarque que le champ électrique est exclusivement axial puisque les composantes perpendiculaires à l'axe s'annulent deux à deux
Le champ électrique est donc dirigé sur l'axe OZ



$E_x = E_y = 0$ donc E = $\int dE_Z$

dE_Z = dE cos θ comme dE= $\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, dq = λdl

dE_Z= $\frac{\lambda dl\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ dE_Z= $\frac{\lambda\cos\theta\,dl}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)}$

Comme cos θ = $\frac{z}{l}=\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$ dE_Z= $\frac{\lambda z\,dl}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$

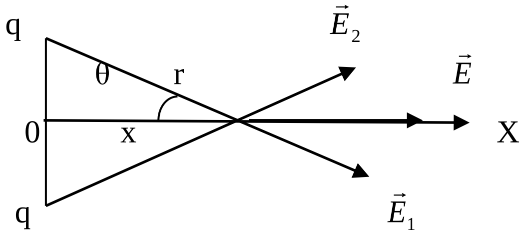
d'ou E = E_Z = $\int_0^{2\pi R}\frac{\lambda z\,dl}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$ = finalement E= $\frac{2\pi R\lambda z}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$

Le potentiel est : $\vec{E} = -grad\vec{V}$

$E_Z = -\dfrac{dV}{dZ}$ donc $E_Z = \int E_Z dZ$ $\quad \int \dfrac{2\pi R\lambda z dz}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} = \dfrac{2\pi\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + z^2\right)^{1/2}} + C$

$V(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0$ donc $V = \Rightarrow V = \dfrac{2\pi\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + z^2\right)^{1/2}}$

Exo 06 :



a) $V_x = V_1 + V_2 = \dfrac{2Kq}{r} = \dfrac{2Kq}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 2Kq\left(a^2 + x^2\right)$

b) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ Comme $E_1 = E_2$ donc $E = 2\,E_1\cos\theta = = \dfrac{2Kq}{r^2}\dfrac{x}{r} = \dfrac{2Kq}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} = 2Kq\left(a^2 + x^2\right)^{-3/2}$

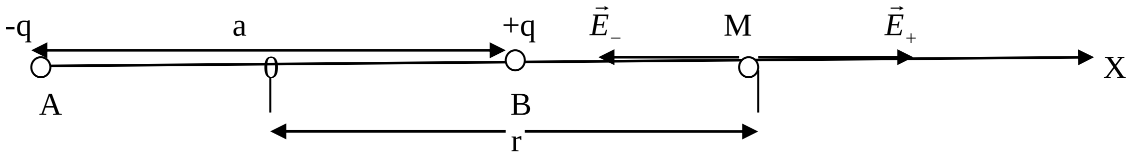
Le champ électrique $\vec{E}$ dérive d'un potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$ dans notre cas $E_x = -\dfrac{dV}{dx}$

On vérifie bien que $E_x = -\dfrac{dKq\left(a^2 + x^2\right)^{-1/2}}{dx} = 2Kqx\left(a^2 + x^2\right)^{-3/2}$

b) $W_{AB} = q(V_A - V_B) = = q[\dfrac{2Kq}{\sqrt{a^2 + x_A^{\,2}}} - \dfrac{2Kq}{\sqrt{a^2 + x_B^2}}]$

A. N. : $W_{AB} = = 6.10^{-6}[\dfrac{2.910^9.1{,}6.10^{-19}}{\sqrt{9+1}} - \dfrac{2Kq}{\sqrt{a^2 + x_B^2}}] = 1{,}26.10^{-5}\,J$

Exo 07 :



a) $\vec{E}_M = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \Rightarrow E_M = E_+ + E_-$

$$E_M = \frac{Kq}{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{Kq}{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2} = \frac{4Kq}{(r-a)^2} - \frac{4Kq}{(r+a)^2} = 4Kq\left[\frac{(2r+a)^2 - (2r-a)^2}{(2r-a)^2(2r+a)^2}\right]$$

$$E_M = 4Kq\left[\frac{\left(4r^2 + a^2 + 4ar\right) - \left(4r^2 - 4ra + a^2\right)}{(2r-a)^2(2r+a)^2}\right] = \frac{8ra}{(2r-a)^2(2r+a)^2}$$

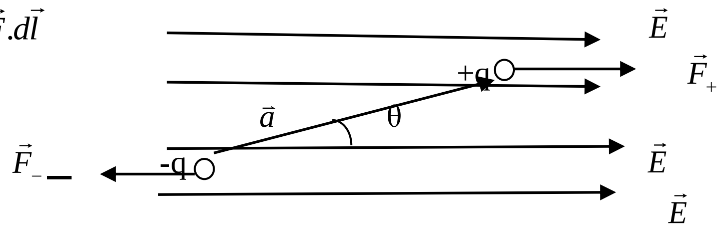
Comme r >> a $E_M = \dfrac{8ra.4Kq}{4r^2.4r^2} = \dfrac{32Kqar}{16r^4} = \dfrac{2Kqa}{r^3}$

On sait que le moment dipolaire est p = q a on a donc

$E_M = \frac{2Kp}{r^3}$

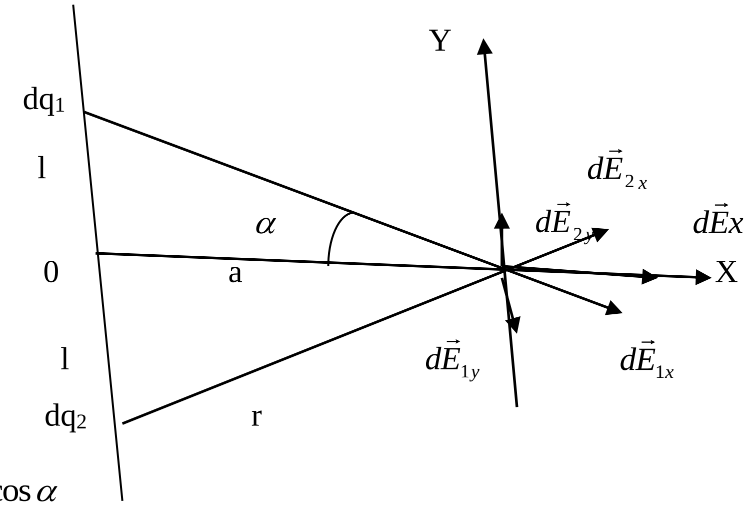
b) L'énergie électrostatique est W_p = - A = - $\vec{F}.d\vec{l}$

W_p = -F dl cosθ = -q E a cosθ –p E cosθ



Exo 08:

a) 1-Méthode directe



Comme $dq_1 = dq_2 = dq$

$\Rightarrow dE_1 = dE_2 = K\frac{dq}{r^2} = Kd\frac{dl}{r^2}$

D'après le principe de superposition

$E_Z = \vec{E} = \int d\vec{E}$

La projection suivant l'axe P_Y

Comme $\left|\overrightarrow{dE_1}\right| = \left|\overrightarrow{dE_2}\right|$ et leurs sens sont opposés

ce qui implique que leur résultante est nulle

Par contre la projection suivant l'axe P_x existe

$dE = dE_{1x} = dE_{2x} = dE_1 \cos\alpha + dE_2 \cos\alpha = 2\, dE_1 \cos\alpha$

$E = 2K \int \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha$

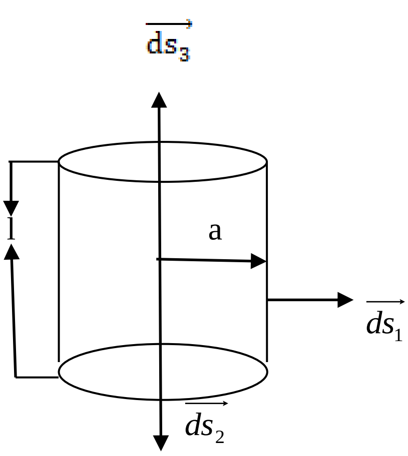
D'après la figure on tire :

$tg\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = atg\alpha \Rightarrow dl = a\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$ et $\cos\alpha = \frac{a}{\mathrm{r}} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\alpha} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$

Donc on a : E= $E = 2K\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{a}\cos\alpha\, \mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha \frac{a^2}{\cos^2}} = \frac{2K\lambda}{a}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{2K\lambda}{a}[\sin 1 - \sin 0]$

$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$

2-Théorème de Gauss : $\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int \frac{dq}{\varepsilon_0}$



$\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S}_1 + \oint_S \vec{E}d\vec{S}_2 + \oint_S \vec{E}d\vec{S}_3 = \int \frac{dq}{\varepsilon_0}$

$\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S}_3 = \int \frac{dq}{\varepsilon_0}$

$\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S}_3 = \oint_S EdS\cos\theta = \int \frac{dq}{\varepsilon_0}$

$\Phi = E\oint dS_3 = \int \frac{dq}{\varepsilon_0} = \int_0^l \frac{\lambda dl}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$

$E.\, S_3 = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.2\pi al = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$

b) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$E = \sqrt{E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2}}$

Comme $E_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$ et $E_2 = \dfrac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$ $\quad E = \sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0 a^2} + \dfrac{4\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0 a^2}} = \sqrt{\dfrac{5\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0 a^2}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{5}$

$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{5}$