UNIVERSITE BADJI MOKHTAR- ANNABA 2019 – 2020
FACULTE DES SCIENCES
Départ. SM 1° Année LMD

SERIE N°2

Distribution continue de charges électriques.

EX1

Soit un fil AB de longueur 2L, uniformément chargé avec une densité linéique de charges $\lambda > 0$. On désigne par O le milieu du segment AB.

1-Calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ créé en un point M de l'axe OX passant par le milieu du fil AB (OM = a).

2- Calculer le champ $\vec{E}$ lorsque :

a) Le point M est très éloigné de l'origine O (a>>L).

b) Le fil est de longueur infinie.

3- Calculer le champ $\vec{E}$ ainsi que le potentiel V créés par un point M appartenant à la droite (AB).

EX2

Une couronne circulaire limitée par deux cercles de centre O, de rayons a et R (a<R) est uniformément chargée avec une densité surfacique constante $\sigma > 0$.

1- Calculer le champ $\vec{E}$ (x) ainsi que le potentiel V(x) créés par cette distribution en un point M de son axe x'x (OM = x).

2-Calculer et tracer $E(x)$:

- Lorsque a = 0 (cas du disque plein).
- Lorsque a = 0 et R tend vers l'infini (cas du plan infini).

EX3

Soit une boucle circulaire de centre O, de rayon R, uniformément chargée avec une densité linéique constante $\lambda > 0$. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution de charges, en un point M de l'axe OZ passant par le centre de la boucle (OM = z) :

a) Directement.
b) A partir du potentiel électrostatique.

EX4

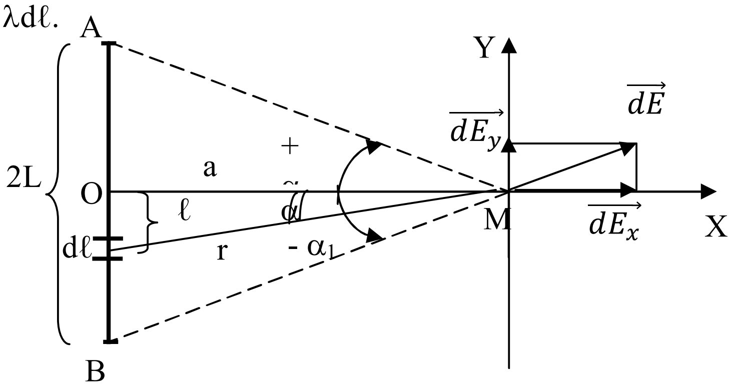
Soit un dipôle électrique constitué d'une charge +q placée en A et d'une charge -q placée en B. La distance entre les deux charges est ℓ. (O est le milieu de AB)

1- Donner l'expression du potentiel V au point *M* (*OM = r)*. Nous supposons que $r >> \ell$ *et* θ est l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OX})$.
2- Calculer les composantes et le module du champ électrique $\vec{E}$.
3- Montrer qu'un dipôle électrique placé dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_1$, est soumis à un couple de forces dont le moment est donné par : $\vec{M} = \vec{P} \wedge \vec{E_1}$.

Solution de la série 2

EX1

1- Soit l'élément de longueur dℓ de charge dq = λdℓ.



$\overrightarrow{dE} = \frac{K\,\lambda d\ell}{r^2}\overrightarrow{u}$ avec $\begin{cases} dE_x = dE\ \cos\alpha \\ dE_y = dE\ \sin\alpha \end{cases}$

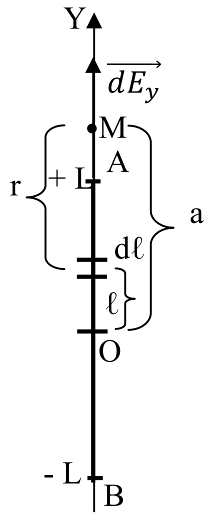
On exprime ce champ en fonction d'une seule variable et on choisit l'angle α :

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{\ell}{a} \Rightarrow d\ell = \frac{a\ d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$dE = \frac{K\,\lambda d\ell}{r^2} = K\lambda\left(\frac{a\ d\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\frac{\cos^2\alpha}{a^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}d\alpha$$

$$\begin{cases} dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\ \cos\alpha\ d\alpha \\ dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\ \sin\alpha\ d\alpha \end{cases}$$



On intègre entre les extrémités du fil repérées par les angles : α_1 et $_-\alpha_1$.

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\cos\alpha\ d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_1) = \boldsymbol{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha_1} \\ E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\sin\alpha\ d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\ (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_1) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Donc $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha_1\vec{\imath} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}.\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\ \vec{\imath}$ $\ (\vec{E}\ est\ porté\ par\ l'axe\ OX)$.

2- a) <u>Le point M est très éloigné du point O</u> : $a \gg L \Rightarrow \sin\alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \approx \frac{L}{a}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{E}} = \frac{\mathbf{2\lambda L}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0 a^2}}\boldsymbol{\vec{\imath}}$: champ créé par une charge Q = 2λ, concentrée en O.

b) <u>Fil infini</u> : $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin\frac{\pi}{2}\vec{\imath} = \ \boldsymbol{\vec{E}} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{2\pi\varepsilon_0 a}}\boldsymbol{\vec{\imath}}$

3- Le point M appartient à la droite (AB) :

<u>Le champ électrostatique</u> $\vec{E}$: $\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE_y}\,\vec{\jmath}$ avec $dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ d\ell = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0(a-\ell)^2}\ d\ell$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{d\ell}{(a-\ell)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{-\,d(a-\ell)}{(a-\ell)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a-\ell}\right]_{-L}^{+L} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{L}{(a^2-L^2)}$$

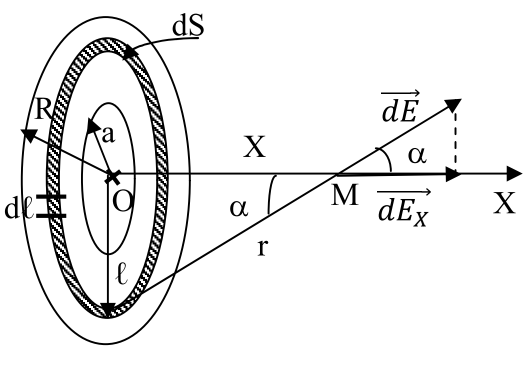
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{\jmath}$$

<u>Le Potentiel électrostatique V</u> : $dV = \frac{Kdq}{r} = \frac{\lambda\,d\ell}{4\pi\varepsilon_0(a-\ell)} \Rightarrow$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{d\ell}{(a-\ell)} = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{d(a-\ell)}{(a-\ell)} = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln(a-\ell)\right]_{-L}^{+L} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{a+L}{a-L}\right)$$

EX2

1-Par raisons de symétrie, le champ électrostatique $\vec{E}$ est suivant l'axe (OX) car les composantes de ce champ, suivant l'axe (OY) s'annulent deux à deux.



$dE = \frac{K\ dq}{r^2}$ avec $dq = \sigma ds = \sigma 2\pi\ell d\ell$.

$dE_x = dE\ \cos\alpha$ avec $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}}$

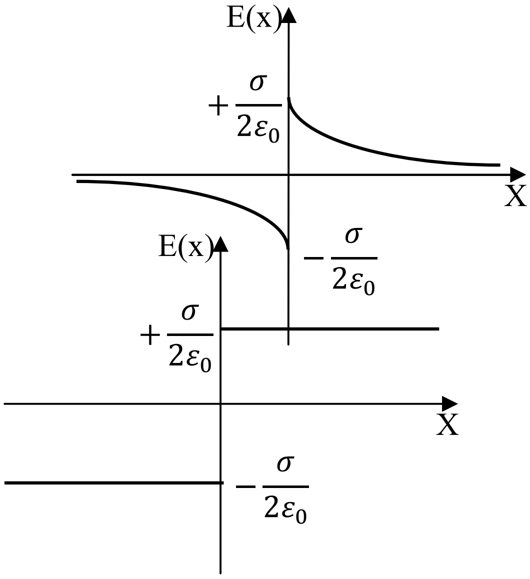
$$dE_x = \frac{x\sigma 2\pi\ell d\ell}{4\pi\varepsilon_0(x^2+\ell^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_a^R \frac{\ell d\ell}{(x^2+\ell^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+\ell^2}}\right]_a^R = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

<u>Le Potentiel électrostatique V</u> :

$$dV = \frac{Kdq}{r} = \frac{\sigma 2\pi\ell d\ell}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+\ell^2}} \Rightarrow V(x) = \int_a^R dV = \int_a^R \frac{\sigma\ell d\ell}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+\ell^2}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+\ell^2}\right]_a^R$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2} - \sqrt{x^2+a^2}\right]$$

2) - Disque plein : a=0 $\Rightarrow$ $E(x) = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$



$$\begin{cases} si\ x > 0 \Rightarrow E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right] et\ \ E(0) = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \\ si\ x < 0 \Rightarrow E(x) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right] et\ \ E(0) = \frac{-\sigma x}{2\varepsilon_0} \\ \qquad \begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow E(x) \to 0 \\ x \to -\infty \Rightarrow E(x) \to 0 \end{cases} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> :Il y a une discontinuité du champ électrostatique.

- Plan infini : a = 0 et R $\rightarrow \infty$ et $E(x) = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|x|}$

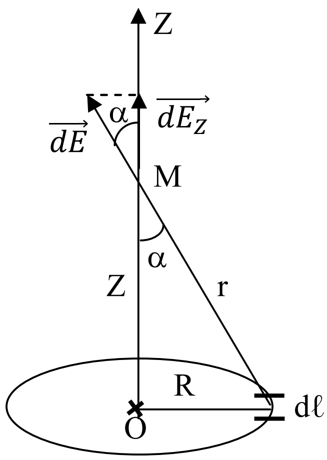
$$si\ x > 0 \Rightarrow E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$si\ x < 0 \Rightarrow E(x) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}$$

<u>EX3</u>

a) Par raisons de symétrie, le champ électrostatique $\vec{E}$ est porté par l'axe (OZ).

-Soit l'élément de longueur dℓ de charge dq = λdℓ.



$$\overrightarrow{dE} = \frac{K\lambda d\ell}{r^2}\vec{u}$$

$$dE_Z = dE\ cos\alpha = \frac{K\lambda d\ell cos\alpha}{r^2} \quad \text{avec} \quad cos\alpha = \frac{Z}{r} = \frac{Z}{\sqrt{Z^2+\ell^2}}$$

On intègre sur le périmètre de la boucle de 0 à 2πR.

$$dE_Z = \frac{z\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_0(z^2+\ell^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E_Z = \frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi R} d\ell = \frac{\lambda Rz}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda Rz}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}\ .$$

<u>Le Potentiel électrostatique V</u> :

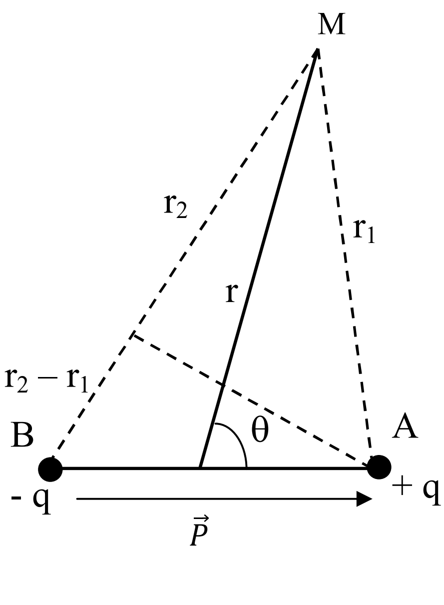
$$dV = \frac{Kdq}{r} = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}} \Rightarrow V(z) = \int_0^{2\pi R} dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}\int_0^{2\pi R} d\ell = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}$$

b) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$; $\vec{E}$ a une seule composante suivant (OZ).

$$E(z) = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{-\lambda R}{2\epsilon_0}\left[\frac{-2z}{2\sqrt{z^2+R^2}(z^2+R^2)}\right] = \frac{\lambda Rz}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

<u>EX4</u>

1- <u>Potentiel électrostatique créé par un dipôle au point M :</u>



$$V_M = V(+q) + V(-q) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q\,(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}$$

Approximations :

$$\begin{cases} \ell \ll r \\ r_2 - r_1 \approx \ell\ cos\theta \\ r_1 r_2 \approx r^2 \end{cases} \quad \text{d'où } V_M = \frac{q\ell cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Pcos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

avec $\vec{P} = q\vec{\ell}$ (moment électrique dipolaire)

2- <u>Champ électrostatique $\vec{E}$</u> : $\quad \vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ avec $\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2Pc}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Psin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{cases}$

$E \;= \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3cos\theta^2 + 1}$

3- Un dipôle électrique placé dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_1$, est soumis à un couple de forces F_+ et F_- :

$F_+ = F_- = qE_1$

$\mathcal{M} = F\ell sin\theta = qE_1\ell sin\theta = PE_1 sin\theta \Rightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}} = \vec{P} \wedge \overrightarrow{E_1}$

Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ tend à aligner le dipôle parallèlement au champ $\vec{E}_1$.