Université Badji Mokhtar Annaba **année 2019/2020**
Département MI **Semestre II**

Série d'exercices d'algèbre N°3

(Matrices et Résolution de systèmes d'équations)

Exercice 1 : Soients $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
Calculer $A + B, A - B, 2A, -3B, A^t, B^t$.

Exercice 2: On considère les deux matrices P et Q définies par :
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,$Q = \frac{1}{4}(P + I)$, où I désigne la matrice identité dans IR^3.

1. CalculerP^2, PQ et QP en fonction de P.
2. Calculer les produits $(4I - P)Q$ et $Q(4I - P)$, que peut on conclure pour la matrice Q.

Exercice 3: On considère les matrices suivantes
$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer tous les produits possibles de deux matrices choisie parmi les trois matrices. Justifier votre réponse.
2. Soit $f : IR^2 \to IR^2$ l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de IR^2 est A, que vaut $f(x, y)$?
3. Déterminer si les matrices sont inversibles ?

Exercice 4: Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(IR)$,
et le polynôme $P(X) = X^2 + 2X - 3$. Calculer $P(A)$. En déduire A^{-1}.

Exercice 5: Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(IR)$.

1. Trouver le rang de la matrice A.
2. Montrer que $A^2 = A + 2I$. En déduire A^3.
3. Déterminer a, b, c et d tels que $aA^3 + bA^2 + cA + dI = 0$.

4. Vérifier si $a = 0$ et $b = 1$, alors $d \neq 0$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse à partir de l'expression $bA^2 + cA + dI = 0$.

Exercice 6: Calculer les déterminants suivants :
$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 7: Soit f une application linéaire définie sur IR^3 dans lui-même et donnée par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, -x + 4y + z)$$

1. Déterminer la matrice associée A_f.
2. Déterminer des bases pour $Kerf$ et Imf.
3. L'application f est-elle un automorphisme?

Exercice 7: Soit $B = \{e_1; e_2; e_3\}$ la base canonique de IR^3. On considère un endomorphisme de IR^3 définit par sa matrice associée dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'application ou l'endomorphisme f.
2. Montrer que la partie $B' = \{e'_1 = (1, 2, 0), e'_2 = (-1, 0, -1), e'_3 = (0, 1, 0)\}$ est une base de IR^3.
3. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique B à la base B'.
4. Déterminer la matrice de passage Q de B' vers B. Quel est le lien entre P et Q?
5. Déterminer la matrice $N = A + B - I$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis calculer d'indice de nilpotence de la matrice N.

Exercice 9: Soit le système d'équation suivant :
$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que ce système est un sysème de Cramer.
2. Trouver la solution du système (S).

Correction de la série d'algèbre N°3

Correction de l'exercice 1:

On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Calcule de $A+B$

$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

Calcule de $A-B$

Multiplier d'abord les éléments de la matrice B par (-1)

$-B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

puis en somme les éléments de la matrice A et la matrice $-B$

$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Calcule de $2A$

$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 8 & 6 & 14 \end{pmatrix}$

Calcule de $-3B$

$-3B = -3\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 12 \\ -3 & 0 & 6 \\ 6 & -9 & -9 \end{pmatrix}$

Calcule de la transposée de la matrice A *notée* A^t

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Calcule de la transposée de la matrice B *notée* B^t

$B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 2:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \frac{1}{4}(P+I) = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1. *Calcule de* P^2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3P$$

Calcule de PQ

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P$$

Calcule de QP

$QP = \frac{1}{4}\left(P + I\right)P = \frac{1}{4}P^2 + \frac{1}{4}P = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}P = P$

Calcule de $(4I - P)Q$ et $Q(4I - P)$

$$(4I - P)Q = 4Q - PQ = 4Q - P = 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

De la même manière on trouve

$Q(4I - P) = I_3$

On peut conclure que la matrice Q est inversible et $(4I - P)$ est sa matrice inverse.

Correction de l'exercice 3:

1. Calculons tous les produits possibles

Le produit de deux matrices est possible sauf si le nombre de colonnes de la première matrice est égale au nombre de lignes de la deuxième matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

les produits possibles sont:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, CB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$$

car le nombres de colonnes de B est égale au nombre de lignes de A, et le nombres de colonnes de C est égale au nombre de lignes de B.

2. Trouvons $f(x,y)$:

$f : IR^2 \to IR^2$

$(x,y) \mapsto f(x,y) = ?$

$f(x,y) = f(xe_1+ye_2) = xf(e_1)+yf(e_2) = x(2,1)+y(2,3) = (2x+2y, x+3y)$

3. Déterminons si les matrice A, B *et* C *sont inversibles:*

On dit que A est inversible si les vecteurs colonnes de la matrice sont linéairement indépendants, alors

pour A:

$$\forall \alpha, \beta \in IR, \alpha(1,2) + \beta(2,3) = (0,0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

d'où A est inversible.

pour B:

$\forall \alpha, \beta \in IR, \alpha(1,0,-1) + \beta(5,2,0) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha + 5\beta = 0 \\ 2\beta = 0 \\ -\alpha = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

d'où B est inversible.

pour C: comme $(-1,0,2) + (1,-1,1) = (0,-1,3) \Rightarrow C$ n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 4:

on a $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,et $P(X) = X^2 + 2X - 3$.

Calculons P(A):

$$P(A) = A^2+2A-3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déduction de A^{-1} :

On a $P(A) = A^2 + 2A - 3I_3 = 0 \Rightarrow A^2 + 2A = 3I_3 \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}(A + 2I_3)\right) = I_3$

d'où A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 5:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(IR)$.

1. Trouvons le rang de la matrice A :

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour mettre la matrice sous forme échelonnée.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_3 \to L_3} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{0L_2 + L_1 \to L_2} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{0L_2 + L_1 \to L_2} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

d'où le rang de A est égal à 3 et non note $rg(A) = 3$.

2. Montrons que $A^2 = A + 2I$:

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A+2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Déduction de A^3 :

$A^3 = A^2 \cdot A = (A + 2I) \cdot A = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Déterminons a, b, c et d tels que $aA^3 + bA^2 + cA + dI = 0$:

$aA^3 + bA^2 + cA + dI = \begin{pmatrix} 2a + 2b + d & 3a + b + c & 3a + b + c \\ 3a + b + c & 2a + 2b + c & 3a + b + c \\ 3a + b + c & 3a + b + c & 2a + 2b + c \end{pmatrix}$

$aA^3 + bA^2 + cA + dI = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + d = 0 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases}$

4. Vérifier si $a = 0$ et $b = 1$, alors $d \neq 0$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse à partir de l'expression $bA^2 + cA + dI = 0$:

Si $a = 0$ *et* $b = 1$ on trouve $d = -2, c = -1$ d'où $A^2 - A - 2I = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(A - I) A = I$

il en résulte que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6:

Calculons les déterminons suivants

$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -2 \times 9 - 7 \times 6 = -60,$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 272,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 2\left(4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\right) + 7\left(2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 8(-14) + 14(7) = -14.$$

Correction de l'exercice 7:

On a $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, -x + 4y + z)$

1. Déterminons la matrice associée A_f:

$f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2x+4y+6z, -x+4y+z) = x(1,2,-1) + y(2,4,4) + z(3,6,1)$

d'où la matrice associée est $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminons une base de $K\operatorname{erf}$

$K\operatorname{erf} = \left\{(x,y,z) \in IR^3, f(x,y,z) = 0_{IR^3}\right\}$ ou $K\operatorname{erf} = \left\{X \in IR^3, A_f X = 0_{M_3(IR)}\right\}$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$A_f X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ -x + 4y + z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = \tfrac{-5}{3}z \text{ et } y = \tfrac{-2}{3}z$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} K\operatorname{erf} &= \left\{(x,y,z) \in IR^3,\ x = \tfrac{-5}{3}z \quad et \quad y = \tfrac{-2}{3}z \right\} = \left\{\left(\tfrac{-5}{3}z, \tfrac{-2}{3}z, z\right)/z \in IR\right\} \\ &= \left\{z\left(\tfrac{-5}{3}, \tfrac{-2}{3}, 1\right)/z \in IR\right\} \\ &= Vect\left\{\left(\tfrac{-5}{3}, \tfrac{-2}{3}, 1\right)\right\} \end{aligned}$$

c'est à dire le vecteur $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-2}{3}, 1\right)$ engendre $kerf$. Donc la famille $\left\{\left(\frac{-5}{3}, \frac{-2}{3}, 1\right)\right\}$ est une base de $kerf$, et $\dim K\operatorname{erf} = 1$, f n'est donc pas injective.

2. Déterminons une base de $\operatorname{Im} f$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f = \left\{f(x,y,z)/(x,y,z) \in IR^3\right\} &= \left\{(x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, -x + 4y + z)/(x,y,z) \in IR^3\right\} \\ &= \left\{x(1,2,-1) + y(2,4,4) + z(3,6,1)/(x,y,z) \in IR^3\right\} \end{aligned}$$

d'où $\operatorname{Im} f = \langle\{(1,2,-1), (2,4,4), (3,6,1)\}\rangle$, on sait d'aprés le thèorème du rang que

$\dim IR^3 = \dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f$, donc $\dim\operatorname{Im} f = 2$. On sait aussi que la famille des vecteurs $\{(1,2,-1), (2,4,4), (3,6,1)\}$ est une famille génératrice de

Im f. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $\{(1,2,-1),(2,4,4)\}$ est une telle famille. C'est donc une base de Im f qui est de rang 2.

3. f n'est pas un automorphisme car f n'est pas injective donc f n'est pas bijective.

Correction de l'exercice 8:

1. Déterminons l'application ou l'endomorphisme f.

$f : IR^3 \to IR^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

$f(x,y,z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(1,-1,0) + y(-1,1,0) + z\,(1,1,2)$

d'où $\quad f(x,y,z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z)$

2.Montrons que B' est une base de IR^3

$B' = \{e'_1 = (1,2,0), e'_2 = (-1,0,-1), e'_3 = (0,1,0)\}$

Montrons que B' est libre, soit

$\alpha(1,2,0) + \beta(-1,0,-1) + \gamma(0,1,0) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

d'où B' est libre, et comme *card* $B' = \dim IR^3 = 3$, alors B' est une base de IR^3.

3. Déterminons la matrice de passage P de la base canonique B à la base B':

$$\text{On a } \begin{cases} e'_1 = e_1 + 2e_2 \\ e'_2 = -e_1 - e_3 \\ e'_3 = e_2 \end{cases} \qquad \text{d'où } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Déterminons la matrice de passage Q de B' vers B:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + 2e_2 \\ e'_2 = -e_1 - e_3 \\ e'_3 = e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = e'_1 - 2e'_3 \\ e_2 = e'_3 \\ e_3 = -e'_1 - e'_2 + 2e'_3 \end{cases}$$

$$\text{d'où } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Trouvons le lien entre P et Q

$$Q \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

d'où $P = Q^{-1}$.

5. Déterminons la matrice N :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l'indice de nilpotence de la matrice N est le plus petit $k \in IN^*$ tel que $N^k = 0$,

comme $N^2 = 0$, l'indice de nilpotence de N est $k = 2$.

Correction de l'exercice 9:

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

1.Ecrivons le système (S) sous forme matricielle:

$$AX = B \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(S) est un système de Cramer si le $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

alors (S) est un système de Cramer.

2. Trouvons la solution du système (S) avec la méthode de Cramer:

Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \det A_1 = -1, x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \det A_2 = -2, y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \det A_3 = -3, z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-3}{-1} = 3$$

d'où la solution du système (S) est $x = 1, y = 2, z = 3$.