Université Badji Mokhtar Annaba

année 2019/2020
Semestre II

Série d'exercices d'algèbre N°2
(Applications linéaires)

Exercice1: Déterminer si les applications suivantes sont linéaires

$a)\ \begin{array}{c} f_1\colon IR^2 \to IR^2 \\ {\scriptstyle (x,y)\to(2x+y,x-y)} \end{array}$ $\quad b)\begin{array}{c} f_2\colon IR^3 \to IR^3 \\ {\scriptstyle (x,y,z)\to(xy,x,y)} \end{array}$ $\quad \begin{array}{c} f_1\colon IR_3[x] \to IR^3 \\ {\scriptstyle P\to(P(-1),P(0),P(1))} \end{array}$

Exercice2: On considère l'application linéaire f de IR^3dans IR^4définie par

$$f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de IR^3. En déduire une base de Imf et le rang de f
2. Déterminer une base de $Kerf$
3. L'application f est-elle injective ?surjective ?

Exercice 3: Soit $E = IR^3$. On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de IR^3 et l'endomorphisme de IR^3 défini par :

$$\varphi(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \varphi(e_2) = 3e_2; \varphi(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. Soit $\mu = (x, y, z) \in IR^3$. Calculer $\varphi(\mu)$
2. Déterminer une base de $Ker\varphi$
3. φ est-il injective ? surjective ?
4. Déterminer une base de $Im\varphi$. Déduire le rang de φ
5. Montrer que $E = Ker\varphi \oplus Im\varphi$.

Exercice 4: Soient E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes

1. $Ker(f) = Im(f)$
2. $f \circ f = 0$ et $n = 2rg(f)$

Exercice 5: Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $ker(f) \cap Im(f) = f(ker(f \circ f))$.

Exercice 6 : Soit $E = R_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P^{\acute{}}$$

Montrer que f est un endomorphisme de E, donner une base de Imf et de $Ker(f)$.

Correction de la série d'algèbre N°2

Correction exercice 1:

a) f_1 est linéaire si et seulement si $\begin{cases} 1. \forall u, v \in IR^2, f_1(u+v) = f_1(u) + f_1(v) \\ 2. \forall u \in IR^2 \forall \lambda \in IR, f_1(\lambda u) = \lambda f_1(u) \end{cases}$

1. $\forall u, v \in IR^2$, tel que $u = (x, y)$ et $v = (x\acute{}, y\acute{})$

$$\begin{aligned} f_1(u+v) &= f_1((x,y) + (x\acute{}, y\acute{})) \\ &= f_1(x + x\acute{}, y + y\acute{}) \\ &= (2(x + x\acute{}) + y + y\acute{}, x + x\acute{} - y - y\acute{}) \\ &= (2x + y, x - y) + (2x\acute{} + y\acute{}, x\acute{} - y\acute{}) \\ &= f_1(u) + f_1(v) \end{aligned}$$

2. $\forall u \in IR^2, \forall \lambda \in IR, f_1(\lambda u) = f_1(\lambda(x,y)) = f_1(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) = \lambda(2x + y, x - y) = \lambda f(u)$

d'où f_1 est une application linéaire.

b) f_2 est linéaire si et seulement si $\begin{cases} 1. \forall u, v \in IR^2, f_2(u+v) = f_2(u) + f_2(v) \\ 2. \forall u \in IR^2 \forall \lambda \in IR, f_2(\lambda u) = \lambda f_2(u) \end{cases}$

$\forall u, v \in IR^2$,tel que $u = (x, y)$ et $v = (x\acute{}, y\acute{})$

$$\begin{aligned} f_2(u+v) &= f_2((x,y) + (x\acute{}, y\acute{})) \\ &= f_2(x + x\acute{}, y + y\acute{}) \\ &= ((x + x\acute{})(y + y\acute{}), x + x\acute{}, y + y\acute{}) \\ &= (xy + x\acute{}y\acute{} + x\acute{}y + xy\acute{}, x + x\acute{}, y + y\acute{}) \\ &= (xy, x, y) + (x\acute{}y\acute{}, x\acute{}, y\acute{}) + (x\acute{}y + xy\acute{}, 0, 0) \\ &\neq f_2(u) + f_2(v) \end{aligned}$$

d'où f_2 n'est pas une application linéaire.

c)f_3 est linéaire si et seulement si

$\forall P, Q \in IR^3[x], \forall \lambda \in IR, f_3(\lambda P + Q) = \lambda f_3(P) + f_3(Q)$

on a

$$\begin{aligned} f_3(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q(-1), \lambda P + Q(0), \lambda P + Q(1)) \\ &= (\lambda P(-1), \lambda P(0), \lambda P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1)) \\ &= \lambda(P(-1), P(0), P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1)) \end{aligned}$$

$= \lambda f_3(P) + f_3(Q)$
d'où f_3 est une application linéaire.

Correction de l'exercice 2:
On a $f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$

1. *Calculons les images par f des vecteurs de la base canonique* (e_1, e_2, e_3) *de* IR^3

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,0,1)$$
$$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,1,1)$$
$$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,0,1,2)$$

Déduction d'une base de $\operatorname{Im} f$

Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$la base canonique de IR^3 alors $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, il suffit de vérifier l'indépendance linéaire des vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, or $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ et donc $f(e_3)$ est combinaison linéaire de $\{f(e_1), f(e_2)\}$. Ainsi, la famille $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est déja génératrice de Imf (car la grande famille $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$est génératrice de $\operatorname{Im} f$). Donc il suffit de vérifier que la famille $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre.

Soient $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in IR$ tel que $\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) = 0_{IR^4} \Leftrightarrow \alpha_1 (1,0,0,1) + \alpha_2 (0,1,1,1)) = 0_{IR^4}$ d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, alors $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre. On en déduit que$\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$. On peut déduire aussi que $dimImf = rgf = 2$.

2. *Déterminons une base de* $K\,\text{erf}$

$K\,\text{erf} = \left\{(x,y,z) \in IR^3, f(x,y,z) = 0_{IR^4}\right\}$

On a $f(x,y,z) = 0_{IR^4} \Leftrightarrow (x+z, y-x, z+y, x+y+2z) = 0_{IR^4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y-x=0 \\ z+y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow x=-z \text{ et } y=-z$$

On en déduit que

$$K\,\text{erf} = \left\{(x,y,z) \in IR^3,\ x=-z \quad et \quad y=-z\ \right\} = \{(-z,-z,z)\,/ z \in IR\}$$
$$= \{z(-1,-1,1)\,/ z \in IR\}$$

le vecteur $(-1,-1,1)$ engendre $kerf$. Comme il est non-nul, c'est une base de $kerf$. En particulier, on trouve que $kerf$. est de dimension 1.

3. f n'est pas injective, car $kerf \neq 0_{IR^3}$. f n'est pas surjective, car $\operatorname{Im} f \neq IR^3$, En effet, la dimension de $\operatorname{Im} f = 2 \neq 3$.

Correction de l'exercice 3:
On a

$$\varphi(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \varphi(e_2) = 3e_2; \varphi(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. *Calculons de* $\varphi(\mu)$:

   $\varphi(\mu) = \varphi(x,y,z) = \varphi(xe_1, ye_2, ze_3) = x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3) = x(-2,0,2) + y(0,3,0) + z(-4,0,4)$
   d'où $\varphi(\mu) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z)$.

2. *Déterminons une base de* $Ker\mu$:

   On a donc $Ker\mu = \left\{(x,y,z) \in IR^3, \mu(x,y,z) = 0_{IR^3}\right\}$
   $= \left\{(x,y,z) \in IR^3, (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z) = 0_{IR^3}\right\}$

   $$(x,y,z) \in \ker\mu \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}$$

   d'où $Ker\mu = \left\{(x,y,z) \in IR^3, x = -2z, y = 0\right\}$
   $= \{(-2z, 0, z)/z \in IR\}$
   $= \{z(-2,0,1)/z \in IR\}$
   $Ker\mu = \langle(-2,0,1)\rangle$ c'est à dire $Ker\mu$ est engendré par le vecteur $(-2,0,1)$.
   On en déduit que la famille $\{(-2,0,1)\}$ est une base de $Ker\mu$.

3. $Ker\mu \neq 0_{IR^3}$ et donc l'endomorphisme μ n'est pas injectif. Comme μ est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie IR^3, il n'est pas non plus surjectif, car on a alors

   $$\mu \text{ injectif} \Leftrightarrow \mu \text{ surjectif} \Leftrightarrow \mu \text{ bijectif.}$$

4. *Déterminons une base de* $\operatorname{Im}\mu$

   On sait, d'après le théorème du rang, que $\operatorname{Im}\mu$ est de dimension 2. On sait aussi que $\{\mu(e_1), \mu(e_2), \mu(e_3)\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}\mu$. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $\{\mu(e_1), \mu(e_2)\}$ est une telle famille. C'est donc une base de $\operatorname{Im}\mu$ qui est de rang 2.

5. *Montrons que* $E = Ker\varphi \oplus Im\varphi$.

   Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $Ker\mu$ et d'une base de $\operatorname{Im}\mu$ est une base de IR^3. Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille $\{(-2,0,1), (-2,0,2), (0,3,0)\}$ est une famille libre. Laissé au étudiants

Correction de l'exercice 4:
Montrons l'équivalence suivante

$$Ker(f) = Im(f) \Leftrightarrow f \circ f = 0 \text{ et } \ n = 2rg(f)$$

1. Montrons la premiere implication $\Rightarrow$

Soit $x \in E$ alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) \in Ker(f) \Rightarrow f(f(x)) = 0$ donc $f \circ f = 0$. D'après le théorème du rang

$rg(f) + \dim Ker(f) = \dim E = n$ et $rg(f) = \dim Ker(f)$, ainsi $2rg(f) = n$.

2. Montrons la deuxième implication $\Leftarrow$

Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in E$ tel que $y = f(x) \Rightarrow f(y) = f \circ f\ (x) = 0$, donc $y \in Ker(f)$, alors $\mathrm{Im}(f) \subset Ker(f)$. De plus, $n = 2rg(f)$

et $\dim \mathrm{Im}(f) = rg(f)$ et d'aprés le théorème du rang

$\dim E = n = rg(f) + \dim Ker(f)$ alors $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim Ker(f)$.

Nous avons alors $\mathrm{Im}(f) \subset Ker(f)$ et ces deux espaces ont la même dimension donc on a $\mathrm{Im}(f) = Ker(f)$.

Correction de l'exercice 5:

Montrons l'égalité suivante $ker(f) \cap Im(f) = f(ker(f \circ f))$.

1. Montrons la première inclusion $\subset$

Soit $y \in ker(f) \cap Im(f) \Rightarrow y \in ker(f)$ et $\ y \in Im(f) \Rightarrow f(y) = 0$ et $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$, de plus $f(f(x)) = f \circ f(x) = f(y) = 0$ donc $x \in Ker(f \circ f)$ et comme $y = f(x)$ alors $y \in f(ker(f \circ f))$. D'où la première inclusion.

2. On montre la deuxième inclusion $\supset$

Nous avons déja que $f(ker(f \circ f)) \subset f(E) = \mathrm{Im}(f)$, de plus $f(ker(f \circ f)) \subset Ker(f)$ car si $y \in f(ker(f \circ f)) \Rightarrow \exists x \in ker(f \circ f)$ tel que $y = f(x)$ et $f \circ f(x) = 0$ ce qui implique que $f(y) = 0$ donc $y \in Ker(f)$. Par conséquent $f(ker(f \circ f)) \subset ker(f) \cap Im(f)$.

Correction de l'exercice 6:

On a $f(P) = P + (1 - X)P^{\prime}$

1. Montrons que f est une application linéaire:

Soit $P_1, P_2 \in E, \lambda \in IR$, on montre que $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$

on a

$$\begin{aligned} f(\lambda P_1 + P_2) &= \lambda P_1 + P_2 + (1 - x)(\lambda P_1 + P_2)^{\prime} \\ &= \lambda P_1 + P_2 + (1 - x)(\lambda P_1^{\prime} + P_2^{\prime}) \\ &= \lambda(P_1 + (1 - x)P_1^{\prime}) + P_2 + (1 - x)P_2^{\prime} \\ &= \lambda f(P_1) + f(P_2), \text{ d'où } f \text{ est une application linéaire.} \end{aligned}$$

2. Donnons une base de $Ker(f)$

$Ker(f) = \{P \in E / f(P) = 0\}$

$f(P) = 0 \Rightarrow P + (1 - X)P^{\prime} = 0$, les polynômes qui vérifie cette équation sont $P(x) = 0$ ou $P(x) = x - 1$,

ainsi $Ker(f) = \{x - 1\}$ et $\dim Ker(f) = 1$.

3. Donnons une base de $\mathrm{Im}(f)$

On a $E = IR_n[x]$, $f : E \to E$ et comme $\left\{1, x, x^2, ..., x^n\right\}$ est une base canonique de E alors $B = \left\{f\left(1\right), f\left(x\right), f\left(x^2\right), ..., f\left(x^n\right)\right\}$ est une partie génératrice de $\text{Im}(f)$.On sait, d'après le théorème du rang, que $\text{Im}(f)$ est de dimension n, il suffit donc d'en extraire une famille libre à n éléments.

On a $f(1) = 1, f(x) = 1, f(x^2) = -x^2 + 2x, ..., etc$, on remarque que pour $k = 2, ..., n$, $f(x^k)$ est de degré k sans termes constant donc l'ensemble $B' = \{f(x), f(x^2), ..., f(x^n)\}$ est une famille de n vecteurs appartenent à $\text{Im}(f)$ est libre(car les degrés des polynômes sont distincts). Donc B' forme une base de $\text{Im}(f)$.