Université Badji Mokhtar Annaba

Département M I Année 2019/2020

Algèbre 2(S2).

Corrigé de la Série1(Espaces vectoriels)

Exercice 1.

On a $\forall i = 1, 4 : F_i \subset \mathbb{R}^3$l'espace vectoriel.

a) $F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 1\right\}$.

$(0, 0, 0) \notin F_1$alors F_1n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) $F_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = a, a \in \mathbb{R}\right\}$.

Cas 1 Si $a = 0$:

Une condition nécessaire pour que F_2soit un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

est : $(0, 0, 0) \in F_2$, dans ce cas $a = 0$ et

$F_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$car :

1) $(0, 0, 0) \in F_2$ alors $F_2 \neq \phi$ et d'autre part $F_2 \subset \mathbb{R}^3$.

2) $\forall (x_1, y_1, z_1) \in F_2, \forall (x_2, y_2, z_2) \in F_2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha (x_1, y_1, z_1) + \beta (x_2, y_2, z_2) \in F_2$?

$(x_1, y_1, z_1) \in F_2 \Longrightarrow 2x_1 + y_1 - z_1 = 0,$

$(x_2, y_2, z_2) \in F_2 \Longrightarrow 2x_2 + y_2 - z_2 = 0,$

$\alpha (x_1, y_1, z_1) + \beta (x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2),$

$2 (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) - (\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha (2x_1 + y_1 - z_1) + \beta (2x_2 + y_2 - z_2) = 0.$

Donc F_2est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Cas 2 Si $a \neq 0$: F_2 n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(0, 0, 0) \notin F_2$

c) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} / z = 2x + y\}$.

F_3est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $z = 2x + y \Longrightarrow 2x + y - z = 0$

et $F_3 = F_2$ pour $a = 0$.

d) $F_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

F_4n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$car $(1, 0, 0) \in F_4$, or $(1,0,0)+(1,0,0)=(2,0,0)\notin F_4$.

Exercice 2.

Soit $\mathcal{F}=\{f/f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a $\forall i=1,4: F_i\subset\mathcal{F}$.

a) $F_1=\{f/f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et f est positive$\}$.

F_1n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$car :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$,est une fonction positive, $f\in F_1$.

et soit $\alpha=-1\in\mathbb{R}$, donc αf n'est pas positive, $\alpha f\notin F_1$.

b) $F_2=\{f/f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et f est croissante$\}$.

F_2n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$car :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x$, est une fonction croissante, $f\in F_2$.

et soit $\alpha=-1\in\mathbb{R}$, donc αf n'est pas croissante, $\alpha f\notin F_2$.

c) $F_3=\{f/f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et f est paire$\}$.

F_3est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$car :

1) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=0$ est une fonction paire, $f\in F_3$.

alors $F_3\neq\phi$ et d'autre part $F_3\subset\mathcal{F}$.

2) $\forall f_1\in F_3,\forall f_2\in F_3,\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall\beta\in\mathbb{R}$:

on a $\alpha f_1+\beta f_2$ une fonction paire, $\alpha f_1+\beta f_2\in F_3$ car :

$f_1\in F_3\Longrightarrow\forall x\in\mathbb{R}, f_1(-x)=f_1(x)$.

$f_2\in F_3\Longrightarrow\forall x\in\mathbb{R}, f_2(-x)=f_2(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R},(\alpha f_1+\beta f_2)(-x)=\alpha f_1(-x)+\beta f_2(-x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$

d) $F_4=\{f/f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $f(0)=0=f(1)\}$.

F_4est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$car :

1) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=0$,

on a $f(0)=0=f(1)$, $f\in F_4$.

alors $F_4\neq\phi$ et d'autre part $F_4\subset\mathcal{F}$.

2) $\forall f_1\in F_4,\forall f_2\in F_4,\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall\beta\in\mathbb{R}$:

on a $(\alpha f_1+\beta f_2)(0)=0=(\alpha f_1+\beta f_2)(1)$, $\alpha f_1+\beta f_2\in F_4$ car :

$f_1 \in F_4 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_1(0) = 0 = f_1(1)$.

$f_2 \in F_4 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_2(0) = 0 = f_2(1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, (\alpha f_1 + \beta f_2)(0) = \alpha f_1(0) + \beta f_2(0) = \alpha f_1(1) + \beta f_2(1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, (\alpha f_1 + \beta f_2)(0) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(1) = 0.$

Exercice 3.

E l'espace vectoriel des suites à termes réels et $F \subset E$

$F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E / u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$,

on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

alors $F \neq \phi$ et d'autre part $F \subset E$.

2) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}$:

on a : $\alpha (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ car :

on a : $\alpha (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n + \beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Posons : $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$.

Aors $w_{n+2} = \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} = \alpha (au_{n+1} + bu_n) + \beta (av_{n+1} + bv_n)$

$\Longrightarrow w_{n+2} = a(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + b(\alpha u_n + \beta v_n) = aw_{n+1} + bw_n$.

$\Longrightarrow w_{n+2} \in F$.

Exercice 4.

Montrons que : $F \cup G$ un sev de $E \Longleftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

1) $F \subset G$ ou $G \subset F \Longrightarrow F \cup G$ un sev de E.

Si $F \subset G$, $F \cup G = G$ et $F \cup G$ est un sev de E.

Si $G \subset F$, $F \cup G = F$ et $F \cup G$ est un sev de E.

2) $F \cup G$ un sev de $E \Longrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Supposons que : $F \cup G$ un sev de E et que :

F n'est pas inclus dans $G \Longrightarrow \exists u \in F$ et $u \notin G \Longrightarrow u \in F \cup G$.

et G n'est pas inclus dans $F \Longrightarrow \exists v \in G$ et $v \notin F \Longrightarrow v \in F \cup G$.

alors $u+v \in F \cup G$ (car $F \cup G$ un sev de E) $\Longrightarrow u+v \in F$ ou $u+v \in G$.

Si $u+v \in F \Longrightarrow \exists w \in F$, tel que $w = u+v$

$\Longrightarrow v = w - u \Longrightarrow v \in F$, ce qui est absurde.

Si $u+v \in G \Longrightarrow \exists w' \in G$, tel que $w' = u+v$

$\Longrightarrow v = w' - u \Longrightarrow v \in G$, ce qui est absurde.

D'où : $F \cup G$ un sev de $E \Longleftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

<u>Exercice 5.</u>

Soient $E = \{(a,b,0) \,/ a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\}, F = \{(0,b,c) \,/ b \in \mathbb{R},\, c \in \mathbb{R}\}$

et $G = \{(c,0,c) \,/ c \in \mathbb{R}\}$des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrons que :

1) $\mathbb{R}^3 = E + F$ et $\mathbb{R}^3 \neq E \oplus F$.

En effet, c'est facile de voir que : $E + F \subset \mathbb{R}^3$.

Il reste à montrer que : $\mathbb{R}^3 \subset E + F$.

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a,b,c) = (a,b,0) + (0,0,c) \in E + F$.

d'où : $\mathbb{R}^3 = E + F$.

Maintenant : $\mathbb{R}^3 \neq E \oplus F$. Il faut trouver $E \cap F$.

Soit $(a,b,c) \in E \cap F \Longrightarrow (a,b,c) \in E$ et $(a,b,c) \in F \Longrightarrow c = 0$ et $a = 0$.

Alors $E \cap F = \{(0,b,0) \,/ b \in \mathbb{R}\} \neq \{(0,0,0)\}$.

D'où : $\mathbb{R}^3 \neq E \oplus F$.

2) $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$.

En effet, c'est facile de voir que : $E + G \subset \mathbb{R}^3$.

Il reste à montrer que : $\mathbb{R}^3 \subset E + G$.

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a,b,c) = (a-c,b,0) + (c,0,c) \in E + G$.

d'où : $\mathbb{R}^3 = E + G$.

Maintenant : $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$. Il faut trouver $E \cap G = \{(0,0,0)\}$.

Soit $(a,b,c) \in E \cap G \Longrightarrow (a,b,c) \in E$ et $(a,b,c) \in G \Longrightarrow c = 0$ et $b = 0$ et $a = c$.

Alors $E \cap F = \{(0,0,0)\}$.

D'où : $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

Exercice 6.

Soient E un $\mathbb{k}$ espace vectoriel et u_1, u_2, u_3, u_4 des vecteurs linéairement indépendants de E, alors on a :

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

1) Si $v_1 = u_2 + u_3 + u_4, v_2 = u_1 + u_3 + u_4, v_3 = u_1 + u_2 + u_4, v_4 = u_1 + u_2 + u_3$.

Montrons que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une famille libre de E. En effet,

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0_E$

$\Longrightarrow \alpha_1 (u_2 + u_3 + u_4) + \alpha_2 (u_1 + u_3 + u_4) + \alpha_3 (u_1 + u_2 + u_4) + \alpha_4 (u_1 + u_2 + u_3) = 0_E$.

$\Longrightarrow (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) u_1 + (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) u_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) u_3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) u_4 = 0_E$.

alors $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ (1),

$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ (2),

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0$ (3),

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ (4).

$(1) - (2) \Longrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

$(3) - (4) \Longrightarrow \alpha_4 - \alpha_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_4 = \alpha_3$.

$(2) - (3) \Longrightarrow \alpha_3 - \alpha_2 = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = \alpha_2$.

Donc : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, en remplaçant dans (1) on trouve :

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

2) Si $v_1 = u_1, v_2 = u_1 + u_2, v_3 = u_1 + u_2 + u_3, v_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

Montrons que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une famille libre de E. En effet,

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0_E$

$\Longrightarrow \alpha_1 (u_1) + \alpha_2 (u_1 + u_2) + \alpha_3 (u_1 + u_2 + u_3) + \alpha_4 (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = 0_E$.

$\Longrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) u_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) u_2 + (\alpha_3 + \alpha_4) u_3 + (\alpha_4) u_4 = 0_E$.

alors $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ (1),

$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ (2),

$\alpha_3 + \alpha_4 = 0$ (3),

$\alpha_4 = 0$ (4).

Donc : on trouve :

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$

Exercice 7.

I) Soit $\mathcal{F} = \{f/f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a $\forall i = 1,4 : f_i \in \mathcal{F}$, tel que :

$f_1(x) = e^x \sin^2 x, f_2(x) = e^x \cos^2 x, f_3(x) = e^x \sin 2x, f_4(x) = e^x \cos 2x.$

1) $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est-elle famille libre?

On remarque que : $f_4(x) = e^x \cos 2x = e^x \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$

$$\Longrightarrow f_4(x) = e^x \cos^2 x - e^x \sin^2 x$$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_4(x) = f_2(x) - f_1(x) \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) - f_2(x) + f_4(x) = 0$

$\Longrightarrow (1)f_1 + (-1)f_2 + (0)f_3 + (1)f_4 = 0$, avec $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1.$

Donc $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ n'est pas libre.

2) $\{f_1, f_2, f_3\}$ est-elle famille libre?

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0.$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 e^x \sin^2 x + \alpha_2 e^x \cos^2 x + \alpha_3 e^x \sin 2x = 0.$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 \sin^2 x + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \sin 2x = 0$ (car $e^x > 0$).

Pour $x = 0 \in \mathbb{R}, \alpha_1 \sin^2(0) + \alpha_2 \cos^2(0) + \alpha_3 \sin 2(0) = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = 0.$

Pour $x = \dfrac{\pi}{2} \in \mathbb{R}, \alpha_1 \sin^2(\dfrac{\pi}{2}) + \alpha_2 \cos^2(\dfrac{\pi}{2}) + \alpha_3 \sin 2(\dfrac{\pi}{2}) = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0.$

Pour $x = \dfrac{\pi}{4} \in \mathbb{R}, \alpha_1 \sin^2(\dfrac{\pi}{4}) + \alpha_2 \cos^2(\dfrac{\pi}{4}) + \alpha_3 \sin 2(\dfrac{\pi}{4}) = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = 0.$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

Donc $\{f_1, f_2, f_3\}$ est pas libre.

II) $P_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 2 et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$P_1(x) = 1, P_2(x) = x - 1, P_3(x) = x^2, P_4(x) = x(x-2)$ des éléments de $P_2[x]$.

1) $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)\}$ est-elle famille libre?

On remarque que : $P_4(x) = P_3(x) - 2P_2(x) - 2P_1(x)$.

Donc $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)\}$ n'est pas libre.

2) $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ est-elle famille libre?

$\alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \alpha P_3(x) = 0.$

$\Longrightarrow \alpha_1(1) + \alpha_2(x-1) + \alpha_3\left(x^2\right) = 0.$

$\Longrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0.$

$\Longrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

Donc $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ est pas libre.

<u>Exercice 8.</u>

I) Soient $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,3)$ et $u_3 = (2,-1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

1) Montrons que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, tel que :

$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,2,3) + \alpha_3(2,-1,1).$

$\Longrightarrow (x,y,z) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,2,3) + \alpha_3(2,-1,1).$

$\Longrightarrow (x,y,z) = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2, 3\alpha_2) + (2\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3).$

$\Longrightarrow (x,y,z) = (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3).$

$\Longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = y, \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = z.$

On détermine : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en fonction de x, y, z.

On trouve : $\alpha_1 = x + y - z, \alpha_2 = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{3}{5}z, \alpha_3 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z.$

Comme card $B = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, on déduit que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons les coordonnées du vecteur $v = (-1,3,5)$ dans cette base B.

C'est à dire : $x = -1, y = 3, z = 5$, en les remplaçant dans $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

On trouve : $\alpha_1 = \;\;, \alpha_2 = \;\;, \alpha_3 = \;\;$. Ce sont ces coordonées.

II) Sachant que $P_2[x]$ a comme base $\left\{1, x, x^2\right\}$.

Montrons que $B' = \{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ (exercice7) est une base de $P_2[x]$.

On a B' est libre et comme card $B' = \dim P_2[x] = 3$,

on déduit que B est une base de $P_2[x]$.

Déterminons les coordonnées du vecteur $P_4(x)$ dans cette base B'.

On remarque que : $P_4(x) = (-2)P_1(x) + (-2)P_2(x) + (1)P_3(x)$.

On trouve : $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1$. Ce sont ces coordonées.

Exercice 9.

I) Soient $v_1 = (2,1,3,1), v_2 = (1,2,0,1)$ et $v_3 = (-1,1,-3,0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Et soit $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, déterminons une base de $[A]$ tel que :

$[A] = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 / \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée car : $v_1 = v_2 - v_3$.

$\Longrightarrow [A] = \{\alpha_1(v_2 - v_3) + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 / \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$.

$\Longrightarrow [A] = \{(\alpha_1 + \alpha_2) v_2 + (\alpha_3 - \alpha_1) v_3 / \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$.

$\Longrightarrow [A] = \{a v_2 + b v_3 / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$.

Alors $\{v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de $[A]$.

Elle est libre car : $a v_2 + b v_3 = (0,0,0,0)$.

$\Longrightarrow a(1,2,0,1) + b(-1,1,-3,0) = (0,0,0,0)$.

$\Longrightarrow (a, 2a, 0, a) + (-b, b, -3b, 0) = (0,0,0,0)$.

$\Longrightarrow (a - b, 2a + b, -3b, a) = (0,0,0,0)$. $\Longrightarrow a = 0, b = 0$.

D'où $B = \{v_2, v_3\}$ est une base de $[A]$ et dim $[A]$ =card $B = 2$.

Exercice 10.

Soient $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\right\}$

et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 2z = 0\right\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1)

a) Donnons une base de F et dim F.

$\Longrightarrow F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x + 2y\right\}$.

$\Longrightarrow F = \left\{(x, y, -x + 2y) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\right\}$.

$\Longrightarrow F = \{(x, 0, -x) + (0, y, 2y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

$\Longrightarrow F = \{x(1,0,-1) + y(0,1,2) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Alors $B_1 = \{(1,0,-1), (0,1,2)\}$ est une famille génératrice de F.

Elle est libre car : $a(1,0,-1) + b(0,1,2) = (0,0,0,0)$.

$\Longrightarrow (a,0,-a) + (0,b,2b) = (0,0,0,0)$.

$\Longrightarrow (a,b,-a+2b) = (0,0,0)$. $\Longrightarrow a = 0, b = 0$.

D'où B_1est une base de F et dim F =card $B_1 = 2$.

b) Donnons une base de G et dim G.

$\Longrightarrow G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x + 2z\right\}$.

$\Longrightarrow F = \left\{(x, 2x+2z, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\right\}$.

$\Longrightarrow F = \{(x,2x,0) + (0,2z,z) / x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

$\Longrightarrow F = \{x(1,2,0) + z(0,2,1) / x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

Alors $B_2 = \{(1,2,0), (0,2,1)\}$ est une famille génératrice de G.

Elle est libre car : $a(1,2,0) + b(0,2,1) = (0,0,0,0)$.

$\Longrightarrow (a,2a,0) + (0,2b,b) = (0,0,0,0)$.

$\Longrightarrow (a, 2a+2b, b) = (0,0,0)$. $\Longrightarrow a = 0, b = 0$.

D'où B_2est une base de G et dim G =card $B_2 = 2$.

2) Donner une base de $F \cap G$.

$(x,y,z) \in F \cap G \Longrightarrow (x,y,z) \in F, (x,y,z) \in G$.

$(x,y,z) \in F \cap G \Longrightarrow x - 2y + z = 0, 2x - y + 2z = 0$

$\Longrightarrow y = 0, z = -x$.

Alors $F \cap G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = -z, y = 0\right\}$.

$\Longrightarrow F \cap G = \left\{(-z,0,z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\right\}$.

$\Longrightarrow F \cap G = \left\{z(-1,0,1) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\right\}$.

$\Longrightarrow F \cap G$ est engendrée par$w = (-1,0,1) \neq (0,0,0)$, w est libre.

D'où $B_3 = \{w\}$ est une base de $F \cap G$ et dim $F \cap G$ =card $B_3 = 1$.

3) F et G sont-ils supplémentaires?

Non puisque : $F \cap G \neq \{(0,0,0)\}$ (car dim $F \cap G = 1$).