Université Badji Mokhtar- Faculté des Sciences

Tronc commun de Mathématiques et Informatique

2019-2020

Corrigé de la série d'exercices n°2

Equations différentielles du premier et second ordre

I-Equations différentielles du premier ordre.

Exercice 1. Résolution des équations différentielles.

a) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$

On peut l'écrire : $\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0$, c'est une équation de la forme :

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Avec : $M_1(x) = 1$, $M_2(x) = x,\ N_1(y) = \sqrt{y^2+1}\ et\ N_2(y) = -y$

Qui est une équation à variables séparables. Divisons alors par $x\sqrt{y^2+1}$ pour avoir

$$\frac{dx}{x} - \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = 0$$

D'où en intégrant : $\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2ydy}{\sqrt{y^2+1}}$ =C.Et la solution générale est donc: $ln|x| - \sqrt{y^2+1} = c$

b) $(1+e^x)yy' = e^x$, y(0)=1

On peut l'écrire : $(1+e^x)ydy - e^x\,dx = 0$ qui est une équation à variables séparables. Divisons alors par $(1+e^x)$ pour avoir : $ydy - \frac{e^x\,dx}{(1+e^x)} = 0$

D'où par intégration : $y^2 - 2ln(1+e^x) = C$

Par Hypothèse on a y(0)=1, en remplaçant $x\ par\ 0\ et\ y\ par\ 1$ dans la solution générale on obtient $C = 1 - 2ln2$, ainsi $y^2 = 2ln(1+e^x) + 1 - 2ln2$

$$y^2 = ln(\frac{1+e^x}{2})^2 + 1$$

Par conséquent la solution est $y(x) = \sqrt{ln(\frac{1+e^x}{2})^2 + 1}$

Remarque : $y(x) = -\sqrt{ln(\frac{1+e^x}{2})^2 + 1}$ ne vérifie pas la condition initiale.

c) $(2x + y)dx - (4x - y)dy = 0$

Cette équation peut être écrite sous la forme : $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{4x-y}$

C'est une équation homogène du premier ordre (On vérifie aisément que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ où $f(x, y) = \frac{2x+y}{4x-y}$)

Posons : $u = \frac{y}{x}$ (ou bien $y = ux$) ce qui donne $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

Remplaçons dans notre équation pour obtenir : $u + x\frac{du}{dx} = \frac{2x+ux}{4x-ux}$

Séparons les variables : $\frac{4-u}{u^2-3u+2}du = \frac{dx}{x}$ ou encore $\frac{4-u}{(u-1)(u-2)}du = \frac{dx}{x}$

En passant à l'intégrale on obtient : $-\int \frac{3}{u-1}du + \int \frac{2}{u-2}du = \int \frac{dx}{x}$

Ce qui donne: $ln\frac{|u-2|^2}{|u-1|^3} = ln|x| + ln|c|$

Et les solutions générales sont donc : $\frac{(u-2)^2}{(u-1)^3} = kx,\ k \in IR$

Ou encore : $(y - 2x)^2 = k(y - x)^3$.

d) $y' = \frac{x+y+1}{x-y}$

Cette équation est de la forme : $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ où $c = 1\ et\ c_1 = 0$

Pour la ramener à une équation homogène on effectue le changement :

$$x = X + \alpha\ , \qquad y = Y + \beta$$

On a alors

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + \alpha + Y + \beta + 1}{X + \alpha - Y - \beta}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + Y + \alpha + \beta + 1}{X - Y + \alpha - \beta}$$

En résolvant le système : $\begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$ on trouve $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$

Et l'équation devient :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + Y}{X - Y}$$

Qui est une équation homogène du premier ordre posons alors $U = \frac{Y}{X}$, ($Y = UX$) ce qui donne après dérivation : $\frac{dY}{dX} = U + X\frac{dU}{dX}$. On remplace dans l'équation pour avoir :

$$u + X\frac{dU}{dX} = \frac{1+U}{1-U}$$

Ce qui donne $$X\frac{dU}{dX} = \frac{1+U^2}{1-U}$$

On sépare les variables :

$$\frac{1-U}{1+U^2}dU = \frac{dX}{X}$$

$$\left(\frac{1}{1+U^2} - \frac{1}{2}.\frac{2U}{1+U^2}\right)dU = \frac{dX}{X}$$

Et en intégrant, on trouve : $arctan\ U - \frac{1}{2}\ln(1+U^2) = ln|X| + ln|c|$

$$arctan\ U = ln\left|cX\sqrt{1+U^2}\right|$$

Ou bien : $cX\sqrt{1+U^2} = \exp(\arctan U)$

Comme U=$\frac{Y}{X}$ on aura alors : $cX\sqrt{1+\frac{Y^2}{X^2}} = \exp\left(\arctan\frac{Y}{X}\right)$

$$c\sqrt{X^2+Y^2} = \exp\left(\arctan\frac{Y}{X}\right)$$

Et en revenant aux variables $x\ et\ y$ on trouve

$$c\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2} = \exp\left(\arctan\frac{y+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)$$

e) $y' = -y + xe^{-x}$

Elle est de la forme $y' = a(x)y + b(x)$ où $a(x) = -1\ et\ b(x) = xe^{-x}$

Qui est une équation linéaire du premier ordre dont la solution générale est

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

Sachant que $y_h(x)$ est la solution de l'équation homogène associée $y' = -y$

Dont la solution est donnée par $y_h(x) = Ke^{A(x)}, K \in IR$. Où

$$A(x) = \int a(x)dx = \int (-1)dx = -\,x$$

Ainsi $y_h(x) = Ke^{-x}, K \in IR$

Cherchons maintenant la solution particulière $y_p(x)$ en utilisant la méthode de la variation de constante sous la forme : $y_p(x) = K(x)e^{-x}$ ce qui donne par dérivation

$$y'_p(x) = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x}$$

En remplaçant y_p *et* y'_p dans notre équation on obtient

$$K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} = -K(x)e^{-x} + xe^{-x}$$

$$K'(x) = x$$

$$K(x) = \int xdx$$

$$K(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Donc $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ et les solutions générales sont données alors par :

$$y(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

f) $y' = y - 2xy^3$, $2y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$

C'est une équation de Bernoulli de la forme

$$y' = a(x)y + b(x)y^n$$

Avec : $a(x) = 1$, $b(x) = -2x$, $n = 3$

Divisons alors par y^3 : $y'y^{-3} = y^{-2} - 2x$ et on pose $z = y^{-2}$, on dérive : $z' = -2y^{-3}y'$ c'est-à-dire $y^{-3}y' = -\frac{z'}{2}$

et on remplace pour trouver: $-\frac{z'}{2} = z - 2x$ ou encore $z' = -2z + 4x$ (équation linéaire du premier ordre) dont la solution générale est: $z(x) = z_h(x) + z_p(x)$, sachant que z_h est la solution de l'équation homogène associée donnée par : $z_h(x) = ke^{A(x)}$,

$A(x) = -\int 2dx = -\,2x$

Ainsi, $z_h(x) = ke^{-2x}$

Cherchons maintenant la solution particulière sous la forme : $z_{p(x)=}\ k(x)e^{-2x}$

On a $z_p'(x) = K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x}$

on remplace alors dans l'équation pour obtenir :

$$K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x} = -2K(x)e^{-2x} + 4x$$

D'où $k'(x) = 4xe^{2x}$ et par une intégration par parties on obtient : $k(x) = 2xe^{2x} - e^{2x}$ et donc $z_p(x) = 2x - 1$

La solution générale de l'équation linéaire est donc : $z(x) = ke^{-2x} + 2x - 1$

Et comme : $z = y^{-2}$, on déduit que les solutions de l'équation de Bernoulli sont données par

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{ke^{-2x} + 2x - 1}} \ ou \ y(x) = \frac{-1}{\sqrt{ke^{-2x} + 2x - 1}}$$

D'un autre coté on a par hypothèse $2y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$ ce qui nous donne $k = 4$

g) $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2 \ ou\ encore\ y' = 2xy - y^2 + 2 - x^2$

Elle est de la forme $y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$. **(**Equation de Riccati)

avec $a(x) = 2x, b(x) = -1\ et\ c(x) = 2 - x^2$

$y_0(x) = x + 1$ est une solution particulière de notre équation. En effet.

$$2xy_0 - {y_0}^2 + 2 - x^2 = 2x(x + 1) - (x + 1)^2 + 2 - x^2 = 1 = y'_0$$

On fait alors le changement : $y(x) = y_0(x) + z = \ x + 1 + z$ ce qui donne $y' = 1 + z'$

En remplaçant dans l'équation de Riccati on trouve

$$1 + z' = 2x(x + 1 + z) - (x + 1 + z)^2 + 2 - x^2$$

$$z' = -2z - z^2$$

Qui est une équation de Bernoulli (à résoudre).

II- Equations différentielles du second ordre.

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 2y' + y = 0.$ C'est une équation du deuxième ordre sans second membre.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$

$r = 1$ est donc une solution double et les solutions générales sont :

$y(x) = (\lambda_1 x + \lambda_{2)} e^x$, $\lambda_1, \lambda_2 \in IR$

b) $y" + 9y = x + 1$. C'est une équation du second ordre avec second membre dont la solution générale est donnée par : $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

On résout tout d'abord l'équation : $y" + 9y = 0$ ... (E_0)

L'équation caractéristique est $r^2 + 9 = 0$ qui admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$ de la forme r_1=$\alpha + i\beta$ et r_2=$\alpha - i\beta$ avec $\alpha = 0$ et β =3

La solution de l'équation (E_0) est donnée par

$$y_0(x) = e^{0.x}(\lambda_1 cos3x + \lambda_2 sin3x) = \lambda_1 cos3x + \lambda_2 sin3x \text{ ; } \lambda_1, \lambda_2 \in IR$$

Cherchons maintenant une solution particulière. On a le second membre de l'équation est $g(x) = x + 1$ du type $g(x) = e^{ax}p(x)$ avec $a = 0$ et $p(x) = x + 1$ (un polynôme de degré 1).

On remarque que $a = 0$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique, Dans ce cas on doit chercher la solution particulière sous la forme $y_p(x) = e^{ax}q(x), a = 0$ et $q(x)$ est un polynôme de degré 1 (Même degré que $p(x)$). C'est-à-dire

$y_p(x) = a'x + b'$, ceci nous donne $y'_p = a' et\ y''_p = 0$

On remplace maintenant dans notre équation (Avec second membre) pour avoir :

$9(a'x + b') = x + 1$ ou encore $9a'x + 9b' = x + 1$ ce qui donne par identification $a' = b' = \frac{1}{9}$ ainsi, $y_p(x) = \frac{1}{9}x + \frac{1}{9}$

Les solutions générales sont donc $y(x) = \lambda_1 cos3x + \lambda_2 sin3x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{9}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in IR$

c) $y" + 2y' = (4 + 3x)e^x$. C'est une équation du second ordre avec second membre dont la solution générale est donnée par : $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

Sachant que $y_0(x)$ est la solution de l'équation : $y" + 2y' = 0$ ... (E_0)

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r = 0$ qui admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = -2$

Par conséquent, Les solutions de l'équation (E_0) sont :

$y_0(x) = \lambda_1 e^{0.x} + \lambda_2 e^{-2x} = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2x}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in IR$

Cherchons maintenant la solution particulière sous la forme $y_p(x) = Axe^x$ ceci donne :

$y'_p(x) = Ae^x + Axe^x$ et $y''_p(x) = 2Ae^x + Axe^x$

On remplace alors dans notre équation pour avoir :

$$2Ae^x + Axe^x + 2(Ae^x + Axe^x) = (4 + 3x)e^x$$

Ce qui donne après identification $A = 1$ et la solution particulière est donc $y_p(x) = xe^x$

Par conséquent, la solution générale est donnée par

$y(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2x} + xe^x$; $\lambda_1, \lambda_2 \in IR$