Université Badji Mokhtar Annaba

Année 2019-2020

Faculté des Sciences   Tronc commun de Mathématiques et Informatique

Examen du 1er semestre - Analyse1

Exercice 1. (6 Points)

Soit A la partie non vide de IR donnée par :$A=\{x_n,\ x_n=\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}, n\in IN\}$

1- Montrer que A est bornée.

2- Déterminer : supA , inf A, maxA et infA.(Justifier).

Exercice 2. (8 Points)

On considère la suite (U_n) définie par :$U_0>0\ et\ U_{n+1}=\frac{U_n}{2+4U_n^3}$

1- Montrer que $\forall n\geq 0:\ U_n>0$

2-Etudier la monotonie de la suite (U_n) .Que peut-on conclure ?

3- Montrer par récurrence que : $\forall n\geq 0,\ \ 0<U_n\leq\frac{U_0}{2^n}$

4-Calculer la limite de (U_n) en utilisant deux méthodes différentes.

Exercice 3. (8 Points)

I- On considère la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\alpha^2 sin\pi x+(2\alpha-4)x & si\ x\in\left[-\frac{1}{2},0\right[\\ -xcos\frac{\pi}{x} & si\ x\in\left]0,\frac{1}{2}\right].\end{cases}\quad(\alpha\in IR)$$

1- Peut-on prolonger f par continuité au point 0? Si c'est oui, définir son prolongement.

2-Trouver les valeurs de α pour que l'équation $f(x)=0$ admette une solution sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

II- En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que :

$$\forall x>0:\ \frac{1}{1+x}<\ln(1+x)-lnx<\frac{1}{x}.$$

Déduire $\lim_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-lnx]$.

III- Résoudre l'équation :$arccosx=2arccos\frac{3}{4}$.

Bon Courage

2019 - 2020

Corrigé de l'examen du 1er semestre (Analyse 1)

Exercice n°1. (6 points)

1) $A = \{ x_n \,/\, x_n = \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \}$.

- Pour $n = 0$: $x_0 = -\frac{1}{2} \in A$
- Si $n \to +\infty$ alors : $x_n \to 0$

$\Rightarrow \forall x_n \in A : -\frac{1}{2} \leq x_n < 0$ .... (0,5) pt

$\underbrace{A \text{ est donc bornée, } \exists \sup A, \exists \inf A}_{(0,5)\text{ pt}}$

2) $\inf A = -\frac{1}{2} \in A$, $\min A = -\frac{1}{2}$. (1 pt)

$\sup A = 0 \notin A$, $\nexists \max A$. (1 pt)

Montrons que $\sup A = 0$.

$$\sup A = 0 \iff \begin{cases} \forall x_n \in A : & x_n < 0 \text{ (vérifiée)} \\ \forall \varepsilon > 0 ; \exists x_{n_0} \in A : & x_{n_0} > 0 - \varepsilon . \end{cases}$$

$x_{n_0} \in A$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $x_{n_0} = \frac{n_0}{2n_0+1} - \frac{1}{2}$;

$x_{n_0} > 0 - \varepsilon \Rightarrow \frac{n_0}{2n_0+1} - \frac{1}{2} > -\varepsilon \Rightarrow \frac{2n_0 - 2n_0 - 1}{2(2n_0+1)} > -\varepsilon \Rightarrow$

$\frac{-1}{2(2n_0+1)} > -\varepsilon \Rightarrow 2(2n_0+1) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 4n_0 + 2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$4n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 2 \Rightarrow n_0 > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ ce n_0 existe car $\mathbb{R}$ est Archimédien, on peut prendre $n_0 = \left[\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right] + 1$

d'où $\sup A = 0$. (2 pts)

Exercice n°2 (8 points)

$U_0 > 0$; $U_{n+1} = \frac{U_n}{2+4U_n^3}$.

1- Montrons que : $\forall n \geq 0$: $U_n > 0$

- Pour $n = 0$: $U_0 > 0$ vraie par hypothèse.
- On suppose que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

Comme $U_n > 0$, alors : $U_n^3 > 0$ et par conséquent :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2+4U_n^3} > 0 .$$

(2 pts)

2- La monotonie de la suite (U_n) :

on a: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n}{2+4U_n^3} - U_n = \dfrac{U_n - 2U_n - 4U_n^4}{2+4U_n^3} = \dfrac{-U_n(1+4U_n^3)}{2+4U_n^3}$

la suite (U_n) est donc décroissante (1pt) et comme elle est aussi minorée par 0 (qst 1) elle converge alors vers une limite qu'on note l. (1pt)

3- Montrons que: $\forall n \geq 0: 0 < U_n \leq \dfrac{U_0}{2^n}$.

il nous reste à montrer que, $\forall n \geq 0: U_n \leq \dfrac{U_0}{2^n}$.

- Pour $n = 0$: $U_0 \leq \dfrac{U_0}{2^0}$ (vraie)
- On suppose que: $U_n \leq \dfrac{U_0}{2^n}$ et on montre que: $U_{n+1} \leq \dfrac{U_0}{2^{n+1}}$. ?

on a: $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2+4U_n^3} < \dfrac{U_n}{2}$. ainsi

$$U_{n+1} < \frac{U_n}{2} \leq \frac{U_0}{2^n} \cdot \frac{1}{2}.$$ ce qui donne: $U_{n+1} \leq \dfrac{U_0}{2^{n+1}}$

d'où: $\forall n \geq 0: 0 < U_n \leq \dfrac{U_0}{2^n}$. (2pts)

4. 1ère methode, on sait que: $l = \dfrac{l}{2+4l^3}$.

$$l(2+4l^3) - l = 0 \Rightarrow l(1+4l^3) = 0$$ (1pt)

$$\Rightarrow l = 0$$ car $\forall n \in \mathbb{N}: U_n > 0$.

2ème methode: selon qst 3, on a: $\forall n \geq 0: 0 < U_n \leq \dfrac{U_0}{2^n}$.

on passe alors à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ d'après le théorème d'encadrement: on trouve: (1pt)

$$l = \lim_{n \to +\infty} U_n = 0.$$

Exercice 03. (8 points).

I. $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 \sin \pi x + (2\alpha - 4)x & x \in [-\frac{1}{2}, 0[\\ -x \cos \frac{\pi}{x} & x \in]0, \frac{1}{2}] \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Pour prolonger la fonction f par continuité au point 0 il faut que: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = l$ (finie). (1pt)

• On a : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (\underbrace{-x}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\cos \frac{\pi}{x}}_{\text{bornée.}}) = 0$ (0,5 pt)

• $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[\alpha^2 \sin \pi x + (2\alpha - 4)x\right] = 0$ (0,5)

ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et cela en posant $f(0) = 0$. et on aura :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 \sin \pi x + (2\alpha - 4)x & x \in [-\frac{1}{2}, 0[\\ 0 & x = 0 \\ -x \cos \frac{\pi}{x} & x \in]0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$ (1 pt)

2) on va appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ... (0,5)

on a : $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \cos(2\pi) = -\frac{1}{2} < 0$. (0,5)

(0,5) ... $f(-\frac{1}{2}) = \alpha^2 \sin(-\frac{\pi}{2}) + (2\alpha - 4)(-\frac{1}{2}) = -\alpha^2 - \alpha + 2 = -(\alpha - 1)(\alpha + 2)$.

si $\alpha \in]-2, 1[$ alors $f(-\frac{1}{2}) > 0$ et selon le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une (0,5) solution sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

II. On va appliquer le T.A.F à $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[x, x+1]$: f étant continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. donc continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$.

ainsi : $\exists c \in]x, x+1[$ tel que,

$$\ln(x+1) - \ln x = (x+1-x) \cdot \frac{1}{c}.$$ (1 pt)

ce qui donne : $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$.

et comme : $x < c < x+1$ alors : $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ et par conséquent : $\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$.

En multipliant par $x > 0$: $\frac{x}{x+1} < x[\ln(1+x) - \ln x] < 1$, d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} x[\ln(1+x) - \ln x] \leq 1$$ (1 pt)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln(1+x) - \ln x] = 1$

III Résoudre l'équation : $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$.

on doit vérifier que $2\arccos\frac{3}{4} \in [0,\pi]$.

on a : $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} \leq 1$, comme la fonction arccos est décroissante sur $[-1,1]$ alors, $\arccos 1 \leq \arccos\frac{3}{4} \leq \arccos\frac{1}{2}$,

d'où $0 \leq \arccos\frac{3}{4} \leq \frac{\pi}{3}$ et $0 \leq 2\arccos\frac{3}{4} \leq \frac{2\pi}{3} \leq \pi$.

ainsi : $2\arccos\frac{3}{4} \in [0,\pi]$.

1pt

En prenant le cosinus dans l'équation on obtient :

$\cos(\arccos x) = \cos(2\arccos\frac{3}{4}) \Leftrightarrow x = \cos(2\arccos\frac{3}{4})$.

Comme $\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$ alors :

$$x = 2\left[\cos(\arccos\tfrac{3}{4})\right]^2 - 1 = 2\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - 1 = \tfrac{1}{8}.$$