

Examen d'algèbre I

Exercice 1. Parmi les propositions suivantes, déterminer celles qui sont vraies ou fausses tout en justifiant votre réponse.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, 2 < x < 4$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \text{ si: } \frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \Rightarrow a = b$
3. Toute fonction continue sur \mathbb{R} est dérivable.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}$ tel que $n(n+1) = 2p$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit sur E une relation binaire notée \mathfrak{R} par:

$$(a, b) \mathfrak{R} (c, d) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c, d) = (\lambda a, \lambda b).$$

1. Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 2)$.

Exercice 3. Soit $G = \mathbb{R}$. On définit sur G la loi de composition interne notée $*$ par

$$\forall a, b \in G, a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. Montrer que $*$ est une loi commutative
2. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
3. Soit

$$\begin{aligned} f &: (G, *) \rightarrow (\mathbb{R}, +) \\ x &\rightarrow 3x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Montrer que f est un isomorphisme de groupe..

Exercice 4. Calculer le pgcd de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$.

Corrigé

Exercice 1. Parmi les propositions suivantes, déterminons celles qui sont vraies ou fausses tout en justifiant les réponses.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, 2 < x < 4$.

Cette proposition est vraie car pour $x = 3 \in \mathbb{N}$, on a $2 < 3 < 4$

→ 1 pt

2. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \text{ si } \frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \Rightarrow a = b$.

Cette proposition est vraie, en utilisant le raisonnement par l'absurde. Supposons que $a \neq b$ et $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1}$, alors,

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+1} &= \frac{b}{b+1} \Rightarrow a(b+1) = b(a+1) \\ &\Rightarrow ab + a = ba + b \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

d'où la contradiction avec le fait que $a \neq b$.

→ 1,5 pts

3. Toute fonction continue sur \mathbb{R} est dérivable.

Cette proposition est fautive car la fonction $|x|$ est continue sur \mathbb{R} mais elle n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .

→ 1 pt

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}$ tel que $n(n+1) = 2p$.

Cette proposition est vraie, en utilisant le raisonnement par récurrence.

Pour $n = 0$, il existe un $p = 0$ tel que $0 \cdot (0 + 1) = 2 \cdot 0$ (Vraie)

Pour $n = 1$, il existe un $p = 1$ tel que $1 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 1$ (Vraie)

Supposons que la proposition est vraie pour n on la démontre pour $n + 1$. Alors,

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2) &= n(n+1) + 2(n+1) \\ &= 2p + 2(n+1) \\ &= 2(p+n+1) = 2p' \end{aligned}$$

D'où, il existe un $p' \in \mathbb{N}$ tel que la proposition est vraie pour $n + 1$.

→ 1,5 pts

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit sur E une relation binaire notée \mathfrak{R} par:

$$(a, b) \mathfrak{R} (c, d) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c, d) = (\lambda a, \lambda b).$$

1. Montrons que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.

a. \mathfrak{R} est réflexive car $(a, b) \mathfrak{R} (a, b)$ pour $\lambda = 1$. \rightarrow (1 pt)

b. \mathfrak{R} est symétrique car si $(a, b) \mathfrak{R} (c, d)$ alors, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(c, d) = (\lambda a, \lambda b)$, d'où $c = \lambda a$ et $d = \lambda b$, donc

$$a = \frac{1}{\lambda} c \text{ et } b = \frac{1}{\lambda} d$$

ainsi il existe un $\lambda' = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a, b) = (\lambda' c, \lambda' d)$. D'où $(c, d) \mathfrak{R} (a, b)$. \rightarrow (1 pt)

c. \mathfrak{R} est transitive car si

$$\begin{cases} (a, b) \mathfrak{R} (c, d) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c, d) = (\lambda a, \lambda b) \\ (c, d) \mathfrak{R} (e, f) \Rightarrow \lambda' \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (e, f) = (\lambda' c, \lambda' d), \end{cases}$$

donc, $(e, f) = (\lambda' c, \lambda' d) = (\lambda' \lambda a, \lambda' \lambda b)$. D'où il existe un $\lambda'' = \lambda' \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a, b) \mathfrak{R} (e, f)$. \rightarrow (1 pt)

2. Déterminons la classe d'équivalence de $(1, 2)$.

La classe d'équivalence de l'élément $(1, 2)$ est

$$\begin{aligned} \widehat{(1, 2)} &= \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 / (1, 2) \mathfrak{R} (c, d)\} \\ &= \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 / \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c, d) = (\lambda, 2\lambda)\} \end{aligned}$$

donc, $c = \lambda$ et $d = 2\lambda$. D'où

$$\widehat{(1, 2)} = \{\lambda(1, 2) / \lambda \in \mathbb{R}^*\}. \rightarrow$$
 (1 pt)

Exercice 3. Soit $G = \mathbb{R}$. On définit sur G la loi de composition notée $*$ par

$$\forall a, b \in G, a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. La commutativité: Soit $a, b \in G$, alors,

$$a * b = a + b + \frac{1}{6} = b + a + \frac{1}{6} = b * a. \rightarrow \text{1 pt}$$

Doù la commutativité.

2. Montrons que $(G, *)$ est un groupe.

a. L'associativité:

Soit $a, b, c \in G$, alors, d'une part

$$a * (b * c) = a * \left(b + c + \frac{1}{6} \right) = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}. \rightarrow \text{0,75 pts}$$

D'autre part

$$(a * b) * c = \left(a + b + \frac{1}{6} \right) * c = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}. \rightarrow \text{0,75 pts}$$

D'où l'associativité.

b. L'élément neutre. Comme la loi est commutative il suffit de démontrer l'existence de l'élément neutre uniquement à gauche ou à droite.

$$a * e = a \Leftrightarrow a + e + \frac{1}{6} = a \Rightarrow e = -\frac{1}{6} \in G. \rightarrow \text{1,5 pts}$$

c. L'élément symétrique: Soit $a \in G$, alors il existe un $a' \in G$ tel que $a * a' = e = -\frac{1}{6}$.
Alors

$$\begin{aligned} a * a' &= a + a' + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \\ \Rightarrow a' &= -a - \frac{1}{3} \in G. \rightarrow \text{1 pt} \end{aligned}$$

2. Soit

$$\begin{aligned} f &: (G, *) \rightarrow (\mathbb{R}, +) \\ x &\rightarrow 3x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Montrons que f est un isomorphisme de groupe.

a. f est un homomorphisme

Soit $x, y \in G$, alors,

$$\begin{aligned}
f(x * y) &= 3(x * y) + \frac{1}{2} \\
&= 3\left(x + y + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} = \left(3x + \frac{1}{2}\right) + \left(3y + \frac{1}{2}\right) \\
&= f(x) + f(y). \quad \rightarrow \text{1pt}
\end{aligned}$$

b. f est bijective

1. L'injection. Soit $x, y \in G$, alors

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{2} = 3y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y. \text{ d'où l'injection} \rightarrow \text{1pt}$$

2. La surjection: Soit $y \in \mathbb{R}$, alors, on démontre qu'il existe un $x \in G$ tel que $f(x) = y$. Alors

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\Leftrightarrow 3x + \frac{1}{2} = y \\
&\Leftrightarrow x = \frac{y}{3} - \frac{1}{6} \in G.
\end{aligned}$$

D'où la surjection. De 1 et 2 on déduit que f est une bijection. $\rightarrow \text{1pt}$

Exercice 4. Calculons le pgcd de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$. En utilisant l'algorithme d'Euclide donné par

$$\begin{cases} R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1}, n \geq 1 \\ R_0 = A, \text{ et } R_1 = B. \end{cases} \rightarrow \text{0,5pts.}$$

Alors, pour $n = 1$, on a

$$R_0 = R_1 Q_1 + R_2 \Leftrightarrow A = B Q_1 + R_2 \Leftrightarrow \underbrace{X^4 - 1}_{=A} = \underbrace{(X^3 - 1)}_{=B} \cdot \underbrace{X}_{=Q_1} + \underbrace{X - 1}_{=R_2} \rightarrow \text{1pt}$$

Comme $R_2 \neq 0$, on continue pour $n = 2$, c'est à dire

$$R_1 = R_2 Q_2 + R_3 \Leftrightarrow \underbrace{X^3 - 1}_{=R_1} = \underbrace{(X - 1)}_{=R_2} \cdot \underbrace{(X^2 + X + 1)}_{=Q_2} + \underbrace{0}_{=R_3} \rightarrow \text{1pt}$$

Comme $R_3 = 0$, alors le pgcd est le dernier reste non nul c'est à dire $\text{pgcd}(A, B) = X - 1 \rightarrow \text{0,5pts}$