UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
Faculté des sciences
Département **MI**

16 janvier 2020

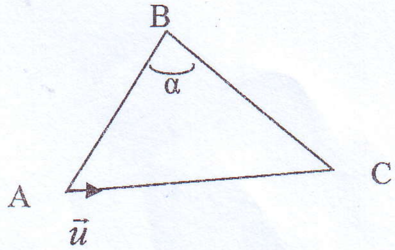
Durée : $1^{h}30$

Examen de mécanique

Exercice1 : (7 points)

Dans le repère (O,X,Y,Z) de base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les cordonnées des points suivants : A(2,3,-1), B(3,-2,2) ,C(4,-3,3), D(-1,-2,0)

A,B,C sont les sommets d'un triangle et B un point quelconque



1- Trouver les vecteurs : $\vec{V_1} = \vec{AC} + \vec{BD}$ et $\vec{V_2} = \vec{AD} - \vec{CD}$

2- Calculer la projection du vecteur $\vec{V_2}$ sur le vecteur $\vec{V_1}$

Ainsi que la projection de $\vec{V_1}$ sur le plan XOY

3- Calculer l'angle α

4- Calculer la surface du triangle (ABC)

5- Calculer le vecteur unitaire $\vec{u}$ du vecteur $\vec{AC}$ et en déduire un vecteur unitaire $\vec{w}$ perpendiculaire au Triangle ABC

5-Montrer que les points A, B, C, D appartiennent au même plan. Déterminer l'équation de ce plan

6-On définit le double produit vectoriel par : $\vec{u} \wedge (\vec{AB} \wedge \vec{u}) = \vec{AB}.(\vec{u}.\vec{u}) - (\vec{AB}.\vec{u}).\vec{u}$

Identifier ces 3 vecteurs et représenter les sur un schéma.

Exercice 2 : (7points)

Dans le système des coordonnées cartésiennes, le mouvement d'un point M est donné par les équations suivantes : $x = t^2$ et $y = t^2 - t$. Déterminer :

1-L'équation de la trajectoire du mouvement du point M.

2-Les vecteurs vitesse et accélérations ainsi que leurs modules.

3-Les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure.

4-Ecrire les vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ainsi que dans la base de Frinet $(\vec{u_t},\vec{u_n},\vec{k})$

Exercice 3 : (6 points)

Les équations paramétriques dans le système des coordonnées polaires (r ,θ) d'un point M se déplaçant dans le plan (XOY) sont données par : $r = e^{-t/2}$ et $\theta = 2t$

Dans ce système de coordonnées :

1-Déterminer l'équation de la trajectoire.

2 - Ecrire les relations du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans la base $(\vec{u_r},\vec{u_\theta})$

3-Déterminer ces trois vecteurs en fonction du temps et calculer leurs modules.

Bonne réussite

Corrigé Mécanique

Exo1

1- $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix}-4\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\-5\\1\end{pmatrix}$ $\vec{CD}\begin{pmatrix}-5\\1\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{V}_1 = \vec{AC}+\vec{BD} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\2\end{pmatrix}$ $\vec{V}_2 = \vec{AD}-\vec{CD} = \begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$ 0,5

2- $\text{Proj}\,\vec{V}_2/\vec{V}_1 = \dfrac{\vec{V}_2\cdot\vec{V}_1}{|\vec{V}_1|} = \dfrac{-4+36+8}{\sqrt{4+36+4}} = \dfrac{40}{\sqrt{44}} = \dfrac{20}{\sqrt{11}}$ 0,5

$\vec{\text{Proj}}\,\vec{V}_1/xOy = -2\vec{i}-6\vec{j}$ 0,5 $|\text{Proj}\,\vec{V}_1/xOy| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

3- $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{CB}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{BC}|}$ 0,5 $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$ $\vec{CB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\cos\alpha = \dfrac{-1-5-3}{\sqrt{35}\,\sqrt{3}} = \dfrac{-9}{\sqrt{105}} = -0{,}878$ 0,5 $(\alpha \simeq 151°)$

4- $S = \frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{CB}|$ $\vec{AB}\wedge\vec{CB} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -5 & 3\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ 0,5

$S = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+16} = \dfrac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$ 0,5

5- $\vec{u} = \dfrac{\vec{AC}}{|AC|} = \dfrac{2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}}{\sqrt{4+36+16}} = \dfrac{2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}}{\sqrt{56}} = \dfrac{\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{14}}$ 0,5

$\vec{W} \perp$ Triangle ABC : On sait que le vecteur $\vec{AB}\wedge\vec{CB} \perp$ Triangle ABC

$\vec{W} = \dfrac{\vec{AB}\wedge\vec{CB}}{|\vec{AB}\wedge\vec{CB}|} = \dfrac{2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}}{\sqrt{24}} = \dfrac{\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{6}}$ 0,5

5bis- Si $A, B, C, D \in$ au même plan $\Rightarrow \vec{AB}\cdot(\vec{BC}\wedge\vec{CD}) = 0$

ou bien $\vec{AD}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{CB}) = 0$

$\vec{AD}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{CB}) = \begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix} = 4+12-16=0$ 0,5

Equation du plan(P) soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in$ plan(P)

alors: $\vec{AM}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{CB})=0$ $\quad \vec{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\\z+1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x-2\\y-3\\z+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}=0 \iff 2(x-2)-2(y-3)-4(z+1)=0$

$2x-4-2y+6-4z-4=0$

$2x-2y-4z=2$

0,5 $\boxed{x-y-2z=1}$ equation du plan contenant les points A, B, C et D

6- $\underbrace{\vec{u}\wedge(\vec{AB}\wedge\vec{u})}_{\vec{b}} = \underbrace{\vec{AB}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{u})}_{\vec{a}} - \underbrace{(\vec{AB}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u}}_{\vec{c}}$

0,5 $\vec{a}=\vec{AB}$ (Puisque $\vec{u}\cdot\vec{u}=1$

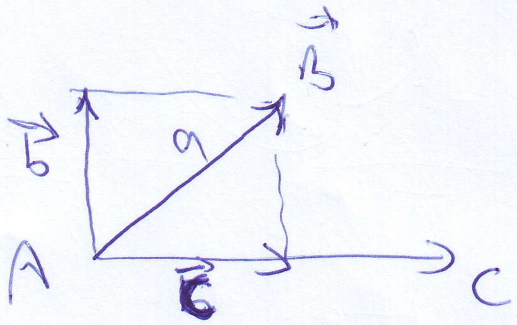
0,5 $\vec{C} = \text{Proj}\ \vec{AB}/\vec{u}$

$\Rightarrow \vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$

$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$

$\vec{AB}=\vec{b}+\vec{c}$

$\Rightarrow$ donc $\vec{b}\perp\vec{c}$ 0,5



Exo. 2

$$M\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 - t \end{cases}$$

1 - $y = x - \sqrt{x}$ 0,5 equation de la trajectoire

2 - $\vec{V}\begin{cases} V_x = 2t \\ V_y = 2t - 1 \end{cases}$ 0,5 $\qquad |\vec{V}| = V = \sqrt{4t^2 + (2t-1)^2}$

$= \sqrt{8t^2 - 4t + 1}$ 0,5

$\vec{a}\begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = 2 \end{cases}$ 0,5 $\qquad |\vec{a}| = a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 0,5

3 - $a_T = \dfrac{d|\vec{V}|}{dt} = \dfrac{16t - 4}{2\sqrt{8t^2 - 4t + 1}} = \dfrac{8t - 2}{\sqrt{8t^2 - 4t + 1}}$ 1

$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = \dfrac{8(8t^2 - 4t + 1) - (8t-2)^2}{8t^2 - 4t + 1} = \dfrac{4}{\sqrt{8t^2 - 4t + 1}}$

$a_N = \dfrac{2}{\sqrt{8t^2 - 4t + 1}}$ 1 $\quad ; \quad \rho = \dfrac{V^2}{a_N} = \dfrac{(8t^2 - 4t + 1)^{\frac{3}{2}}}{2}$ 0,5

4 - $\vec{V}$ et $\vec{a}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

0,5 $\vec{V} = 2t\,\vec{i} + (2t-1)\,\vec{j}$ et $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ 0,5

$\vec{V}$ et $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{k})$

$\vec{V} = |\vec{V}|.\,\vec{u}_T = \sqrt{8t^2 - 4t + 1}\;\vec{u}_T$ 0,5

$\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N = \dfrac{(8t-2)\,\vec{u}_T + 4\,\vec{u}_N}{\sqrt{8t^2 - 4t + 1}}$ 0,5

Exo. 3

$$M\begin{cases} r = e^{-\frac{t}{2}} \\ \theta = 2t \end{cases}$$

1- $r = e^{-\frac{\theta}{4}}$ (equation de la trajectoire) 0,5

2- $\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r$ 0,5

$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ 0,5

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$ 0,5

3- $r = e^{-t/2}$

$\dot{r} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$ $\qquad \theta = 2t$

$\ddot{r} = \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}$ $\qquad \dot{\theta} = 2$

$\qquad \ddot{\theta} = 0$

$\overrightarrow{OM} = e^{-\frac{t}{2}}\vec{u}_r$ 0,5 , $\vec{V} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\vec{u}_r + 2e^{-\frac{t}{2}}\vec{u}_\theta$ 1

$|\vec{V}| = e^{-\frac{t}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}e^{-\frac{t}{2}}$ 0,75

$\vec{a} = \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}}\right)\vec{u}_r + \left(-2 \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \cdot 2 + 2 \cdot 0\right)\vec{u}_\theta$

$\vec{a} = -e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{15}{4}\vec{u}_r + 2\vec{u}_\theta\right)$ 1

$|\vec{a}| = e^{-\frac{t}{2}}\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 4} = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{4}\sqrt{225+64}$

$|\vec{a}| = \frac{\sqrt{289}}{4}e^{-\frac{t}{2}} = \frac{17}{4}e^{-\frac{t}{2}}$ 0,75