Révision2

Probabilités

- ## Exercice 1:

Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges, le tableau ci-dessous donne deux informations :

-La proportion(ou pourcentage) d'assurés appartenant à chaque classe ;

-la probabilité qu'un assuré, d'une classe donnée, déclare au moins un accident au cours d'une année.

classe	AGE	proportion	Probabilité
1	Moins de 25 ans	0.25	0.12
2	De 25 à 50 ans	0.53	0.06
3	Plus de 50ans	0.22	0.09

1) Un assuré est tiré au hasard dans le fichier de la compagnie, qu'elle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un accident au cours de l'année ?

2) Qu'elle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident en cours d'année, ait moins de 25 ans ?

solution

- Modélisation: Soit les événements :

Ci : l'assuré appartient à la classe i/i=1,2ou3.

A : l'assuré déclare au moins un accident.

On a les probabilités p(Ci) et p(A|Ci).

- 1-On cherche p(A), la formule des probabilités totale appliqué à un système complet $\Omega=\{C1, C2, C3\}$

$\cup Ci= \Omega$ et $\cap Ci=\Phi$(ensembles disjoint

- $P(A)=p(A\cap(C1\cup C2\cup C3))$

  $=p(A\cap C1)+ p(A\cap C2)+ p(A\cap C3)$ ………….**probabilité totale**

- $=p(C1)*P(A|C1)+ p(C2)*P(A|C2)+p(C3)*P(A|C3)$ …**probabilité composé**

  $=0.25*0.12+0.53*0.06+0.22*0.09 =0.0816.$

- 2-calcule qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident, ait moins de 25ans
- $P(C1|A)=p(A\cap C1)/p(A)=p(A|C1)*p(C1)/p(A)$…………….**formule de bayes**
- $=0.12*0.25 /0.0816=0.3676$

Les étapes du test

- Identifier l'hypothèse H0
- Calculer des effectifs théoriques
- Vérifier des conditions d'application du test
- Calculer la distance : observée et théorique
- Appliquer la règle de décision

Test d'ajustement

- H0: X suit une loi LOIS

N(μ,δ),B(n,p),P(λ)….OU
Lois inconnue : définit par
la distribution de probabilités:
p(xi) (voir exo3 série3

- Les effectif théoriques:
- 1-calcule des probabilités: Pi issue de la LOIS
- Si N(μ,δ)ou … => probabilité p(X<xi)=pi depuis la table de la loi N…
- Si B(n,p) ou P(λ)..=>probabilité p(X=xi)=pi depuis la formule de la loi

- 2-les effectifs théorique : n'i=n*pi / n:effectif de l'échantillon observé.

Exo2: test de chi-deux (d'ajustement)

- Une enquête réalisée sur les salaires mensuels nets de jeunes diplômés des grandes écoles fournit les résultats suivants :

Salaire mensuel	2100-2300	2300-2500	2500-2700	2700-2900	2900-3100
Nombre de salariés	4	7	18	13	8

- Peut-on considérer que la distribution des salaires mensuels des jeunes diplômés suit une loi normale (au seuil 1%)?(arrondir à 10^{-4})

Test d’ajustement

- H0: X suit une loi LOIS

H0: x~N(2656, 226.42) les deux paramètres estimés

- Calcule des probabilités:

Les modalités de x sont des intervalles:
1-centrer et réduire la variable pour se ramener à la loi normale centrée réduite.
2-on prend les extrémités inférieurs des intervalles pour calculer les pi=p(x>xi) ,puis calculer les probabilités des intervalles

Extrémités inférieurs des classes	(xi-2656)/226.42=ui	P (U>ui)
2100	-2.46	P(U<2.46)=0.9931
2300	-1.57	P(U<1.57)=0.9418
2500	-0.69	P(U<0.69)=0.7549
2700	0.19	1-P(U<0.19)=1-05753=0.4247
2900	1.08	1-P(U<1.08)=0.1401
3100	1.96	1-P(U<1.96)=0.0250

*P(u>-2.46)=1-p(u<-2.46) sachant que F(u)=1-F(-u) {caractéristique de la courbe de la loi normale}
=>p(u>-2.46)=1-(1-p(U<2.46))= p(U<2.46)
*P(u>0.19)=1-p(u<0.19)

-condition d'application

Les classes	Probabilités des classes	N*pi
2100-2300	0.9931-0.9418=0.0513	2.565
2300-2500	0.9418-0.7549=0.1869	9.345
2500-2700	0.7549-0.4247=0.3302	16.510
2700-2900	0.4247-0.1401=0.2846	14.230
2900-3100	0.1401-0.0250=01151	5.755

Pi= P(u>ui)-p(u>ui+1)

- Vérification des conditions:
- Pour le test de chi-deux:
- si les n’i$\geq$5,on peut continuer
- Sinon **regrouper** les classes jusqu’avoir la condition vérifier

-condition d’application

Les classes	Probabilités des classes		N*pi (ajusté)
---	---		--
2100-2500	0.0513+0.1869		11.910
2500-2700	0.7549-0.4247=0.3302		16.510
2700-2900	0.4247-0.1401=0.2846		14.230
2900-3100	0.1401-0.0250=01151		7.350

Pi= P(u>ui)-p(u>ui+1)

Si l’effectifs théorique <5=> on regroupe avec la classe suivante jusqu’à obtenir un effectif≥5

L’effectif totale théorique est <50=> ajouter à la dernière case le reste de l’effectif.

Groupement des classes=> addition des effectifs

- Calcule de la distance:
- **Observé** :$D=\chi 2= \Sigma(ni-ni')^2/ni'$
- **théorique** : $\chi^2_{(1-\alpha)}(ddl)$
- $ddl=k-r-1$
- k:nombre de modalités du x étudié et
- r: nombre de paramètres estimés de LOIS

Calcul de la distance :

-observé

Les classes	NI	N*pi (ajusté)
2100-2500	11	11.910
2500-2700	18	16.510
2700-2900	13	14.230
2900-3100	8	7.350

$D=(11-11.91)^2/11.91+(18-16.51)^2/16.51+(13-14.23)^2/14.23+(8-7.35)^2/7.35=0.3678$

-théorique

$\chi^2_{(1-\alpha)}(ddl)= \chi^2_{(1-0.01)}(k-r-1)= \chi^2_{(0.99)}(4-2-1)=6.63$

Règle de décision : $D<\chi^2_{th}$ => H0 est acceptée

Régression linéaire simple

- Exercice 3:

On veut déterminer de quelle façon la force de tension d'un certain alliage dépend du pourcentage du zinc qu'il contient .on a les données suivantes :

%de Zinc	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0	5.1
Force de tension	1.0	1.1	1.2	1.4	1.5	1.5	1.7

1) calculer le modèle de régression linéaire correspondant, en prenant x : le pourcentage du zinc et y : la force de tension

2) prédire la valeur de Y avec X=6 .

solution

1) calcule des coefficients :

La forme du modèle de régression linéaire simple : $Y=\beta_0+\beta_1 X+\varepsilon$

Selon la méthode des moindres carrés on peut estimer β_0 et β_1 somme suit :

$\widehat{\beta 1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{x})*(yi-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{x})^2}$, $\widehat{\beta 0}=\bar{y}-\widehat{\beta 1}\bar{x}$

$\bar{y}=1.34$

$\bar{x}=4.8$

xi	$xi-\bar{x}$	$(xi-\bar{x})^2$	yi	$Yi-\bar{y}$	$(xi-\bar{x})*(Yi-\bar{y})$
4.5	-0.3	0.09	1.0	-0.34	0.102
4.6	-0.2	0.04	1.1	-0.24	0.048
4.7	-0.1	0.01	1.2	-0.14	0.014
4.8	0	0	1.4	0.06	0
4.9	0.1	0.01	1.5	0.16	0.016
5.0	0.2	0.04	1.5	0.16	0.032
5.1	0.3	0.09	1.7	0. 36	0.108
TOTAL	---	0.28	---	---	0.320

=>$\widehat{\beta 1}$=0.320 /0.28 =1.1428 d'où $\widehat{\beta 0}$=1.34-1.1428*4.8=-4.145 => Y=-4.145+ 1.1428 *X

2) Y=-4.145+ 1.1428 *(6)=**2.7118**