UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE M.I

04 Mars 2019

MODULE : **Mécanique**

Examen de rattrapage

Exercice 1 :

Dans le repère (OXYZ) de base orthonormée ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), on donne les vecteurs

$$\vec{V}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \text{ et } \vec{V}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

1- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}_1$ parallèle au vecteur $\vec{V}_1$ et le vecteur unitaire $\vec{u}_2$ parallèle au vecteur $\vec{V}_2$ et trouver un vecteur unitaire perpendiculaire au plan ($\vec{V}_1, \vec{V}_2$) et en déduire les cosinus directeurs du vecteur $\vec{V}_1$.

2- Calculer l'angle $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$

3- Calculer la projection de $\vec{V}_1$ *sur* $\vec{V}_2$

4- Calculer la longueur de la projection de $\vec{V}_1$ sur le plan (XOY).

5- Calculer la surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ *et* $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$

6- Le produit mixte $\vec{V}_1 . [\vec{V}_2 \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)] = 0$. Pourquoi ce produit est nul ? Justifier votre réponse sans faire les calculs.

Exercice 2 :

Le mouvement d'un point M dans le plan (OXY) est donné par les équations suivantes :

$x = \sin t$ et $y = \cos 2t$

1- Donner l'équation de la trajectoire et représenter là graphiquement.
2- Trouver les vecteurs vitesse et accélération et écrire le vecteur accélération en fonction de x et y.
3- Calculer le rayon de courbure de la trajectoire au point P(0,1)

Exercice 3 :

Les équations paramétriques dans le système des coordonnées polaires (r, θ) d'un point M se déplaçant dans le plan (XOY) sont données par :

$r = 4t^2 + 2t$ et $\theta = 2t$

Dans le système des coordonnées polaires :

1- Déterminer l'équation de la trajectoire.
2- Ecrire les relations du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$
3- Déterminer ces trois vecteurs en fonction du temps et calculer leurs modules.

Bonne réussite

Rattrapage de Mécanique (corrigé)

Ex. 1 (7 pts)

$\vec{V_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{V_2} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

1- (0,5) $\vec{u_1} = \dfrac{\vec{V_1}}{|\vec{V_1}|} = \dfrac{2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{14}}$, (0,5) $\vec{u_2} = \dfrac{\vec{V_2}}{|\vec{V_2}|} = \dfrac{3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{17}}$

$\vec{w} \perp$ plan $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$, $\vec{w} = \dfrac{\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}}{|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}|}$ $\quad \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = 8\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$

$\vec{w} = \dfrac{8\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{138}}$ (1)

Cosinus directeurs de $\vec{V_1}$ sont : $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \dfrac{-3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$ (1)

2- Angle $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$: $\cos(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = \dfrac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{|\vec{V_1}|\,|\vec{V_2}|} = \dfrac{6 + 6 - 2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \dfrac{10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}}$ (1)

3- $\text{Proj}\ \vec{V_1}/\vec{V_2} = \dfrac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{|\vec{V_2}|} = \dfrac{10}{\sqrt{17}}$ (0,5)

4- $\text{Proj}\ \vec{V_1}/_{xoy} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

$\text{Proj}\ \vec{V_1}/_{xoy} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ (0,5)

5- $S = \dfrac{1}{2} |\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{138}$ (1)

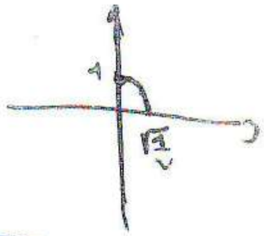
6- Soit : $\vec{V_1} \cdot [\vec{V_2} \wedge (\vec{V_1} + \vec{V_2})] = 0$ car $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ et $\vec{V_1} + \vec{V_2} \in$ tous au (1) même plan

ou bien $= \underbrace{\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_1})}_{0} + \underbrace{\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_2})}_{0} = 0$

Ex. 2 : $M \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$ (7 pts)

1- $y = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = (1 - \sin^2 t) - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$

(1) $\boxed{y = 1 - 2x^2}$ c'est une parabole



2- $\vec{V} \begin{cases} V_x = \cos t \\ V_y = -2\sin 2t \end{cases}$ $\quad |\vec{V}| = \sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 2t}$ (1)

$\vec{a} \begin{cases} a_x = -\sin t = -x \\ a_y = -4\cos 2t = -4y \end{cases}$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 t + 16\cos^2 2t}$ (1)

3) $$a_T = \frac{d|\vec{V}|}{dt} = \frac{-2\cos t \sin t + 16 \sin 2t \cos 2t}{2\sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 2t}}$$ (1)

$$= \frac{-\cos t \sin t + 8 \sin 2t \cos 2t}{\sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 2t}}$$

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = (\sin^2 t + 16\cos^2 2t) - \frac{-\cos t \sin t + 8\sin 2t \cos 2t}{\sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 2t}}$$ (1)

au point $P(0,1)$: $x = \sin t = 0$

Pour $t = 0$ $\quad y = \cos 2t = 1 \Rightarrow t = 0, \pi$ (1)

$\rho = \frac{V^2}{a_N}$ $\quad |\vec{V}| = 1$ $\quad a_N^2 = 0 + 16 - 0 = 16 \Rightarrow a_N = 4$

$\rho = \frac{1}{4}$ (1)

Ex 3

(6 pts)

$M \begin{cases} r = 4t^2 + 2t \\ \theta = 2t \end{cases} \rightarrow r = \theta^2 + \theta$ équation de la Trajectoire ①

2- $\vec{OM} = r\,\vec{u_r}$

$\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ ①

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u_\theta}$

3- $r = 4t^2 + 2t$ $\qquad \theta = 2t$

$\dot{r} = 8t + 2$ $\qquad \dot{\theta} = 2$

$\ddot{r} = 8$ $\qquad \ddot{\theta} = 0$

$\vec{V} = (8t+2)\,\vec{u_r} + (8t^2 + 4t)\,\vec{u_\theta}$ ①

$|\vec{v}| = \sqrt{(8t+2)^2 + (8t^2+4t)^2}$ ①

$\vec{a} = (8 - 16t^2 - 8t)\,\vec{u_r} + (32t + 8)\,\vec{u_\theta}$ ①

$= 8(-2t^2 - t + 1)\,\vec{u_r} + 8(4t+1)\,\vec{u_\theta}$

$|\vec{a}| = 8\sqrt{(-2t^2 - t + 1)^2 + (4t+1)^2}$ ①