Université Badji Mokhtar Annaba — Année 2018-2019

Faculté des Sciences — Durée : 1h30mn

Tronc commun de Mathématiques et Informatique

Examen de Rattrapage (Analyse1)

Exercice 1. (4 points)

Trouver le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure s'ils existent des ensembles donnés par : $E_1 = \left\{-\frac{1}{x}, x \in [1,2]\right\}, E_2 = [0,1] \cap Q$.

Exercice 2. (6 points).

Soit f la fonction donnée par : $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3}$$

1) Etudier la variation de la fonction f.
2) Montrer que : $\forall n \in IN, 0 \leq U_n \leq 3$.
3) Montrer que $(U_n)_n$ est croissante.
4) Déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3. (6 points)

On considère la fonction : $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & si\ x \in]-\infty, 1[\\ \frac{1}{x} & si\ x \in [1, +\infty[\end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de $f\ en\ x_0 = 1$.
2) Montrer que f satisfait les hypothèses du théorème des accroissements finis sur [0,2].
3) Donner les deux valeurs de la constante c telles que : $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

Exercice4. (4 points) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} sinx\ , \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2}, \quad \lim_{x\to\pi} \frac{sin^2 x}{1+cosx}$$

⊡

Corrigé de l'examen
de rattrapage (Analyse 1)

Exercice 01 :

1) $E_1 = \left\{ -\frac{1}{x},\ x \in [1, 2] \right\}$.

on a ; $1 \leq x \leq 2$, donc, $-1 \leq -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}$.

ainsi : $\sup E_1 = \max E_1 = -\frac{1}{2}$. (1)

$\inf E_1 = \min E_1 = -1$. (1)

2) $E_2 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, il est clair que $E_2 \subset [0,1]$

ainsi : $\max E_2 = \sup E_2 = 1$ (1) ; $\min E_2 = \inf E_2 = 0$. (1)

Exercice n°2.

1) on a ; $f(x) = \sqrt{2x+3}$, définie sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$. (0,5)

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0, \quad \forall x \in]-\tfrac{3}{2}, +\infty[\ (0,5)$$

la fonction f est donc croissante. (0,5)

2) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq 3$.

* pour $n = 0$: on a : $0 \leq U_0 = 3 \leq 3$

* supposons que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq 3$, et montrons que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_{n+1} \leq 3$. (1)

On a : $0 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 0 \leq 2U_n \leq 6 \Rightarrow$

$$3 \leq 2U_n + 3 \leq 9. \Rightarrow$$

$$0 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{2U_n+3} \leq 3.$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 3.$$

3) Montrons que (U_n) est croissante

on a ; $U_0 = 0$, $U_1 = \sqrt{2U_0+3} = \sqrt{3}$ (0,5)

$U_1 - U_0 = \sqrt{3} > 0$.

et comme la fonction $f(x) = \sqrt{2x+3}$ est croissante, la suite (U_n) est aussi croissante.

4) la suite (U_n) étant croissante et majorée (par 3.) (1) elle est donc convergente, et sa limite ℓ vérifie l'équation: $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell^2 = 2\ell + 3$

$\Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell - 3 = 0, \quad \Delta = 16$

$\ell_1 = -1 \notin D_f, \quad \ell_2 = 3$, donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 3$. (1)

Exercice n°3. on considère la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2}, & x \in]-\infty, 1[\\ \dfrac{1}{x} ; & x \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

1) continuité en $x_0 = 1$.
Pour que f soit continue en $x_0 = 1$, il faut que:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = f(1) = 1.$$

- $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{3 - x^2}{2} = 1 = f(1)$ (1)
- $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1 = f(1)$ (1)

f est donc continue en $x_0 = 1$.

* Dérivabilité en $x_0 = 1$, pour que f soit dérivable en $x_0 = 1$, il faut que:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \ell \text{ (finie)}$$ (1)

- $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} -\frac{1}{x} = -1$

- $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{3-x^2-2}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{2(x-1)}$ (1)

$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x+1)}{2} = -1.$

f est donc dérivable en $x_0 = 1$, et $f'(1) = -1$.

2) • f est continue et dérivable sur $]\infty, 1[$ et $]1, +\infty$

• f est continue et dérivable en $x_0 = 1$ (d'après :

• f est continue et dérivable sur $[0, 2]$

donc : f est continue (1)

f est dérivable sur $]0, 2[$.

et par conséquent elle satisfait les hypothèses du Théorème des accroissements finis :

$\exists c \in]0, 2[$ tel que, $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

3) d'après 2 : on sait que,

$\exists c \in]0, 2[$ tel que, $f(2) - f(0) = 2f'(c)$ (*)

on a deux cas : • si $c \in]0, 1[$: $f'(c) = -c$

(*) $\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2.c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \in]0, 1[$ (1)

• si $c \in]1, 2[$: (*) $\Leftrightarrow -1 = -\frac{2}{c^2} \Leftrightarrow c^2 = 2$

$\Rightarrow c = \sqrt{2} \in [1, 2[$ $\left(f'(c) = -\frac{1}{c^2}\right)$.

Exercice n°4

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\to 0} \underbrace{\sin x}_{\text{bornée}} = 0$ (1)

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2x^2} = 0/0 \ (F.I)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[2\sqrt{1+x} - (2+x)\right]\left[2\sqrt{1+x} + 2 + x\right]}{2x^2\left[2\sqrt{1+x} + 2 + x\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{2x^2\left[2\sqrt{1+x} + 2 + x\right]} = -\frac{1}{8}.$$

(1,5)

3) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = 0/0 \ F.I.$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x}$$

(1,5)

$$= \lim_{x \to \pi} 1 - \cos x = 2.$$