UNIVERSITE BADJI MOJHTAR ANNABA
DEPARTREMENT M.I

# ALGEBRE 1

Rattrapage d'algèbre 1 — SEMESTER 1 — 2018/2019

Date: 02/05/2019 — Time: 10-11.30 ( reading time)

---

**Exercice 1.** 1. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}/\ (x+8)^2 = 9^2\}$. Sous quelle forme peut-on encore écrire l'ensemble $A$?

**1.** $A = \{1\}$, **2.** $A = \emptyset$, **3.** $A = \{-17\}$, **4.** $A = \{1, -17\}$.

2. Soit $E = \{a, b, c\}$. Quelle écriture est correcte ?

**1.** $\{a\} \in E$, **2.** $a \subset E$, **3.** $a \in E$, **4.** $\{a, b\} \in E$

3. Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$. Cochez la bonne réponse :

**1.** $\{a, 1\} \in A \times B$, **2.** $\{(a, 1)\} \in A \times B$, **3.** $(a, 1) \in A \times B$, **4.** $\{a, 1\} \subset A \times B$.

4. On considère l'application $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ définie par: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$. Quelle est la bonne réponse ?

**1.** $f^{-1}(\{2\}) = \{1\}$, **2.** $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$, **3.** $f^{-1}(\{2\}) = \{4\}$, **4.** $f^{-1}(\{2\}) = \{1, 4\}$.

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n.m) = nm$ et Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n, (n+1)^2)$.

**1.** $f$ est-elle injective, surjective ?

**2.** $g$ est-elle injective, surjective ?

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ estpair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $f$ est bien définie et bijective.

**Exercice 4.** Soit $\Re$ une relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par

$$(a, b) \Re (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b$$

**1.** Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

**2.** Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$, décrire la classe d'équivalence de $(p, q)$.

Corrigé

**Exo 1**

**1.** $A = \{1, -17\} \to$ **(0,75pts)**.

**2.** $a \in E \to$ **(0,75pts)**

**3.** $(a, 1) \in A \times B$, **et** $\{a, 1\} \subset A \times B \to$ **(1,5pts)**.

**4.** $f^{-1}(\{2\}) = \{1, 4\} \to$ **(1pt)**.

**Exo2.** Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n, m) = nm$ et Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n, (n+1)^2)$,

**a) L'injectivité de $f$**

Soient $(m, n)$ et $(m', n') \in \mathbb{N}^2$, si on choisis les deux couples $(1, 2) \neq (2, 1)$ on a $f(1, 2) = f(2, 1) = 2$. Alors, f n'est pas injective$\to$ **(1.5pts)**.

**b) La surjectivité de $f$**

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on doit trouver un couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(n, m) = p$, alors si on prend le couple $(1, p)$, on trouve que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists\ (1, p) \in \mathbb{N}^2$ trel que $f(1, p) = p$, d'où la surjectivité de $f \to$ **(1.5pts)**.

**c) L'injectivité de $g$**

Soient $n$ et $n'$ dans $\mathbb{N}$, alors si $g(n) = g(n') \Leftrightarrow (n, (n+1)^2) = (n', (n'+1)^2) \Leftrightarrow n = n'$ et g est injective$\to$ **(1,5pts)**.

**d) La surjectivité de $g$**

IL suffit dee démontrer que le couple $(1, 1)$ n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $g(p) = (1, 1) = (p, (p+1)^2) \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ (p+1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ $p = 1$ et $p = 4$ ce qui est absurd. D'où $g$ n'est pas surjective$\to$ **(1,5pts)**.

**Exo3.**

**a) Le bien définie de $f$**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n$ est pair alors $f(n) = n/2 \in \mathbb{Z}$ et si $n$ est impair alors $f(n) = -(n+1)/2 \in \mathbb{Z}$. Dans les deux cas $f(n) \in \mathbb{Z}$.
$\to$ **(1pt)**

**b) L'injectivité de $f$**

Soient $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons $f(n) = f(n_0)$. Si $n$ et $n_0$ sont pairs alors $n/2 = n_0/2$ donc $n = n_0$. Si $n$ et $n_0$ sont impairs alors $-(n+1)/2 = -(n_0+1)/2$ donc $n = n_0$. Ainsi $f$ est injective.$\rightarrow$ $(\mathbf{1,5pts})$

**c) La surjectivité de $f$**

Soit $m \in \mathbb{Z}$. Alors, si $m \geq 0$ alors pour $n = 2m \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = 2m/2 = m.\rightarrow$ $(\mathbf{1,5pts})$

Maintenant, si $m \leq 0$ alors pour $n = -2m-1 \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = -((-2m-1)+1)/2 = m$. Ainsi $f$ est surjective.$\rightarrow$ $(\mathbf{1,5pts})$

Finalement f est bijective.$\rightarrow$ $(\mathbf{0,5pts})$.

**Exo4.** Soit $\Re$ une relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par

$$(a,b)\,\Re\,(a',b') \Leftrightarrow ab' = a'b$$

**1.** Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence.

**a) La reflexivité.**
$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a $(a,b)\,\Re\,(a',b')$ car $ab = ab$, d'où $\Re$ est reflexive.$\rightarrow$ $(\mathbf{1pt})$

**b) La symétrie**
Soient $(a,b)$ et $(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, alors si $(a,b)\,\Re\,(a',b') \Leftrightarrow ab' = a'b \Leftrightarrow a'b = b'a \Leftrightarrow (a',b')\,\Re\,(a,b)$. D'où la symétrie de $\Re$. $\rightarrow$ $(\mathbf{1pt})$.

**c) La transitivité**
Soient $(a,b)$, $(a',b')$ et $(a'',b'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

$$\text{Alors si } \left\{ \begin{array}{c} (a,b)\,\Re\,(a',b') \\ \text{et} \\ (a',b')\,\Re\,(a'',b'') \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} ab' = a'b \\ \text{et} \\ a'b'' = a''b' \end{array} \right. \Rightarrow a' = \tfrac{ab'}{b}, \text{ car } b \in \mathbb{N}^*.$$

d'où

$$\frac{ab'}{b}b'' = a''b' \Leftrightarrow ab'' = a''b \Leftrightarrow (a,b)\,\Re\,(a'',b''),$$

de cette fait on obtient la transitivte et l'équivalence de la relation $\Re$. $\rightarrow$ $(\mathbf{1pt})$.

**2.** Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, avec $p \wedge q = 1$, alors $\widehat{(p,q)} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* /\ (p,q)\,\Re\,(a,b)\} \Leftrightarrow pb = aq$, donc $q$ divise $pb$ et $p \wedge q = 1$. D'après le théorème de Gauss $q$ divise $b$, c'est à dire, qu'il existe un $d \in \mathbb{Z}$ qui vérifie $b = qd$, maintenant de la relation $pb = aq$ on obtient $pqd = aq \Leftrightarrow pd = a$. Alors $\widehat{(p, q)}$ sont les couples de la forme $(pd, qd)$. $\rightarrow$ **(1pt)**