UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA   14 janvier 2019

Faculté des sciences

Département de MI

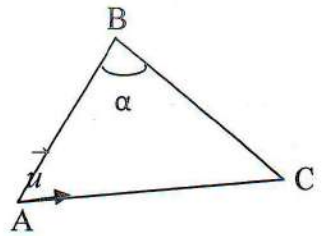
Durée : 1^h30

Examen de mécanique

Exercice 1 : (8 points)

Dans le repère (O,X,Y,Z) de base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les coordonnées des points suivants : A(2,2,1), B(3,4,-2) ,C(0,5,-4), D(-1,3,0) .

A,B,C sont les sommets d'un triangle et D un point quelconque



1- Calculer l'angle α

2- Calculer la surface du triangle ABC

3-Calculer le vecteur unitaire $\vec{w}$ perpendiculaire au triangle ABC

4-Déterminer la projection de $\vec{AB}$ *sur* $\vec{AC}$

5-Montrer que les points A, B ,C et D appartiennent au même plan. Déterminer l'équation de ce plan

6-On définit le double produit vectoriel comme suit :

$$\vec{u}\wedge(\vec{AB}\wedge\vec{u}) = \vec{AB}.(\vec{u}.\vec{u}) - (\vec{AB}.\vec{u}).\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de $\vec{AC}$. Identifier ces 3 vecteurs et représenter les sur un schéma

Exercice 2 : (7points) :

Dans le système des coordonnées cartésiennes, le mouvement d'un point M est donné par les équations suivantes : $x = t^2$ et $y = t^2 - 2t$

Déterminer :

1- L'équation de la trajectoire du mouvement du point M.

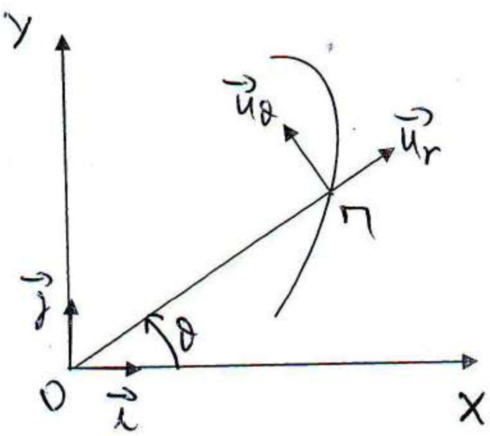
2- Le vecteur vitesse et calculer son module.

3- Le vecteur accélération et calculer son module.

4- Les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure en fonction du temps.

5- Calculer l'angle compris entre le vecteur position et le vecteur vitesse en fonction du temps et à l'instant t = 1s.

Exercice 3 : (5points) : Trouver les expressions du vecteur position $\vec{OM}$, du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans le système de coordonnées polaires (r,θ) de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$



بالتوفيق

Ex 1. Corrigé mécanique

$A\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\5\\-4\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$

1 - $\cos\alpha = \dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\,|\vec{BC}|}$ (0,5) $\quad \vec{BA}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$

$\cos\alpha = \dfrac{3-2-6}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{-5}{14}$ (0,5)

2 - $S = \frac{1}{2}|\vec{BA}\wedge\vec{BC}|$ (0,5) $\quad \vec{BA}\wedge\vec{BC} = \vec{i} - 11\vec{j} - 7\vec{k}$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{1+121+49} = \dfrac{\sqrt{171}}{2}$ (0,5)

3 - $\vec{W} = \dfrac{\vec{BA}\wedge\vec{BC}}{|\vec{BA}\wedge\vec{BC}|} = \dfrac{\vec{i} - 11\vec{j} - 7\vec{k}}{\sqrt{171}}$ (0,5) (0,5)

4 - $\text{Proj}\ \vec{AB}/_{\vec{AC}} = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ (0,5) $= \dfrac{-2+6+15}{\sqrt{38}} = \dfrac{19}{\sqrt{38}} = \sqrt{\dfrac{19}{2}}$ (0,5) $\quad \vec{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\3\\-5\end{pmatrix}$

5 - si A, B, C, D ∈ au m̂ plan ⇒ $(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}) = 0$ (0,5) $\quad \vec{CD}\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -3 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 4\end{vmatrix} = 1(0) - 2(-14) - 3(7) = 28 - 21 = 7$$

donc A, B, C, D ∉ au m̂ plan (0,5)

l'equation du plan (P) contenant A, B et C :

$(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CM}) = 0 \quad M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in$ plan (P) $\quad \vec{CM}\begin{pmatrix}x\\y-5\\z+4\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}x & y-5 & z+4\\ 1 & 2 & -3\\ -3 & 1 & -2\end{vmatrix} = 0 \quad (0,5)$$

Bon (1)

Suite EXO 1

$$x(-1) - (y-5)(-11) + (z+4)(7) = 0$$

$$-x + 11y - 55 + 7z + 28 = 0$$

$$\boxed{-x + 11y + 7z - 27 = 0} \quad (1)$$

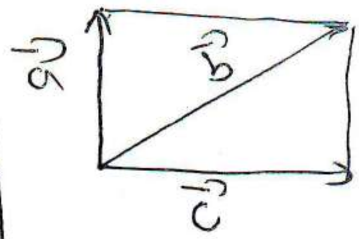
6- $$\underbrace{\vec{u} \wedge (\vec{AB} \wedge \vec{u})}_{\vec{a}} = \underbrace{\vec{AB}\,(\vec{u}\cdot\vec{u})}_{\vec{b}} - \underbrace{(\vec{AB}\cdot\vec{u})\,\vec{u}}_{\vec{c}}$$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = 1 \Rightarrow \vec{b} = \vec{AB}$ (0,5)

$\vec{c} = (\vec{AB}\cdot\vec{u})\,\vec{u} = \text{Proj}\ \vec{AB}/\vec{u}$ (0,5)

$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ (0,5)

ou bien (1,5) sur le schéma



EXO 2

$$M \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$$

1) $y = x - 2\sqrt{x}$ équation de la trajectoire. (1)

2)- (1) $\vec{v} \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2t \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2t - 2 \end{cases}$ $\quad |\vec{v}| = 2\sqrt{t^2 + (t-1)^2}$

$|\vec{v}| = 2\sqrt{2t^2 - 2t + 1}$ (0,5)

$\vec{a} \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 2 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 2 \end{cases}$ (1) $\quad |\vec{a}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ (0,5)

1- $$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{2(4t-2)}{2\sqrt{2t^2-2t+1}} = \frac{4t-2}{\sqrt{2t^2-2t+1}} \quad (0,5)$$

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 8 - \frac{(4t-2)^2}{2t^2-2t+1} = \frac{16t^2 - 16t + 8 - 16t^2 + 16t - 4}{2t^2-2t+1}$$

$$a_N^2 = \frac{4}{2t^2-2t+1} \Rightarrow a_N = \frac{2}{\sqrt{2t^2-2t+1}} \quad (0,5)$$

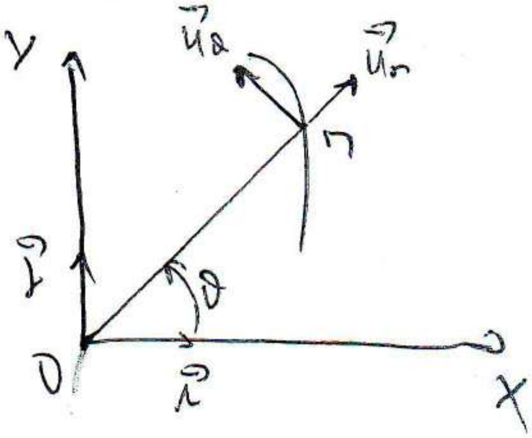
Rayon de Courbure : $\rho = \frac{|\vec V|^2}{a_N} = (2t^2-2t+1)^{\frac{3}{2}}$ (0,5)

5- soit $\varphi = (\vec{OM}, \vec V)$ $\quad \cos\varphi = \frac{\vec{OM}\cdot\vec V}{|\vec{OM}|\,|\vec V|}$

$$\cos\varphi = \frac{t^2 \cdot 2t + (t^2-2t)(2t-2)}{\sqrt{4t^2+(2t-2)^2}\,\sqrt{t^4+(t^2-2t)^2}} \quad (1)$$

à $t = 1\,s$: $\cos\varphi = \frac{2 + (-1)\cdot(0)}{\sqrt{4+0}\,\sqrt{1+1}} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}}$ (0,5)

Exo.3



Coordonnées polaires sont
$r = |\vec{OM}|$ $\quad \theta = (\vec{OM}, \vec{Ox})$

. Vecteur position : $\vec{OM} = r\cdot\vec u_r$ (1)

. Vitesse : $\vec V = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cdot\vec u_r) = \dot r\vec u_r + r\dot{\vec u}_r$ (0,5)

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec u}_r &= \dot\theta\,\vec u_\theta \\ \dot{\vec u}_\theta &= -\dot\theta\,\vec u_r\end{aligned}\right| \quad (1,0)$$

$$\vec V = \dot r\vec u_r + r\dot\theta\,\vec u_\theta \quad (1)$$

* Accélération : $\vec a = \frac{d}{dt}\vec V = \frac{d}{dt}(\dot r\vec u_r + r\dot\theta\,\vec u_\theta)$

$$\vec a = \ddot r\,\vec u_r + \dot r\underbrace{\dot{\vec u}_r}_{\dot\theta\vec u_\theta} + \dot r\dot\theta\,\vec u_\theta + r\ddot\theta\,\vec u_\theta + r\dot\theta\underbrace{\dot{\vec u}_\theta}_{-\dot\theta\vec u_r} \quad (0,5)$$

$$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\vec u_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\vec u_\theta \quad (1)$$