Université Badji Mokhtar Annaba Année 2018-2019

Faculté des Sciences

Tronc commun de Mathématiques et Informatique

Examen Analyse1

Problème 1. (08 points)

I- Soit A la partie non vide de IR donnée par : $A = \{\alpha x + 3\ , \alpha \in IR^*, x \in]1,2]\ \}$

Montrer que A est bornée ? Déterminer : supA , inf A, maxA et infA.

II- Soit $u = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ - i$\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1- Calculer u^4.

2- Ecrire u^4 sous la forme polaire puis déduire le module et l'argument de u

III- Montrer que les deux suites données par : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)!} \\ V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \end{cases}$ sont adjacentes. Que peut-on conclure ?

Problème 2. (12 points)

I- On considère la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 5 & x \in]-\infty, -2] \\ ax + b & x \in]-2\ , 1[\\ lnx & x \in [1, +\infty[\end{cases}$

Déterminer $a\ et\ b$ pour que f Soit continue sur IR.

II- En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que :

$$\forall x > 0 \colon \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - lnx < \frac{1}{x}$$

Déduire $\lim_{x\to+\infty} x[\ln(1+x) - lnx]$

III- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|sinx|}$, $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^3-1})$, $\lim_{x\to 0} \frac{cosx - cos2x}{1-cosx}$.

IV- Calculer la formule de Mac Laurin Young (n=3) de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$.

V- Soit la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $f(x) = arcsinx + arccosx$

Calculer $f'(x),\ calculer\ f(0)$. Que peut-on conclure ?

Corrigé de l'examen 2018 - 2019
Analyse 1

Problème 1.

I) $A = \{\alpha x + 3,\ x \in]1, 2],\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

on distingue deux cas;

* Si $\alpha > 0$: $1 < x \leq 2 \Rightarrow \alpha + 3 < \alpha x + 3 \leq 2\alpha + 3$ (0,5)

ce qui montre que A est bornée et (0,25)

$\sup A = \max A = 2\alpha + 3$; $\inf A = \alpha + 3$; $\nexists \min A$. (0,75)

* Si $\alpha < 0$: $1 < x \leq 2 \Rightarrow 2\alpha + 3 \leq \alpha x + 3 < \alpha + 3$ (0,5)

A est ainsi bornée et, (0,25)

$\inf A = \min A = 2\alpha + 3$; $\sup A = \alpha + 3$, $\nexists \max A$. (0,75)

II, Soit $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

1_ Calculons u^4.

. $u^2 = \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^2 = -2\sqrt{2}(1 + i)$. (0,5)

. $u^4 = \left[-2\sqrt{2}(1 + i)\right]^2 = 8(1 + 2i - 1) = 16i$ (0,5)

2) $u^4 = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ (0,5). ce qui donne, $u = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ (0,5)

III. $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{(n+1)!} \\ V_{n+1} = U_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} \end{cases}$

1) on a; $\forall n: V_n \geq U_n$. (0,5)

2) on a; $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, (U_n) est donc strictement croissante (0,5)

et $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - U_n - \dfrac{1}{n.n!}$

$= \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{n.n!} = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ (0,5)

(V_n) est donc strictement décroissante

3) $V_n - U_n = \frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. (0,5)

Les suites (U_n) et (V_n) sont donc adjacentes (0,5) et par conséquent, elles sont convergentes et convergent (0,5) vers la même limite ℓ.

Problème II

I. $f(x) = \begin{cases} 5 & x \in]-\infty, -2] \\ ax+b & x \in]-2, 1[\\ \ln x & x \in [1, +\infty[\end{cases}$

on remarque que f est continue sur $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$. (0,5)

- pour que f soit continue au point $x_0 = -2$, il faut que:

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = f(-2) = 5$ (0,5)

c'est à dire il faut que: $-2a+b=5$ (0,5)

- Pour que f soit continue au point $x_0 = 1$, il faut que: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = f(1) = \ln 1 = 0$ (0,5), c'est à dire

il faut que: $a+b=0$. (0,5)

ainsi on a: $\begin{cases} -2a+b=5 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ -2a-a=5 \end{cases}$ (0,5) $\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases}$

II. montrons que: $\forall x > 0$, $\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$.

on pose: $f(x) = \ln x$, $[a,b] = [x, x+1]$, $x > 0$

f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ d'où d'après le théorème des accroissements finis:

$\exists\, c \in]x, x+1[$ tel que: $f(x+1) - f(x) = f'(c)[(x+1)-x]$ (2)

c'est à dire: $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$.

on a: $x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$.

ce qui donne: $\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$.

on a: $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1} < x\left[\ln(x+1) - \ln x\right] < x\,\frac{1}{x}$ 1

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+1) - \ln x\right] \leq 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\ln(x+1) - \ln x\right] = 1$

III. •) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{|\sin x|} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x}{|\sin x|} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x}{-\sin x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{\frac{\sin x}{x}} = -1$ 1

d'où $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{|\sin x|}$ n'existe pas

•) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^3-1}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{x^2+x+1}\right)\right]$

on a: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$ et 1

$\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \frac{1}{3}$, d'où $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x^3-1}\right)$ n'existe pas

•) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$ F.I. on a: $\cos x \overset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$

$\cos 2x \overset{0}{\sim} 1 - \frac{(2x)^2}{2}$, d'où

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - 2x^2\right)}{\frac{x^2}{2}} = 3$ 1

IV. $f(x) = \ln(1+x)$

$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

- on a $f(0)=0$
- $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, d'où $f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, d'où $f''(0) = -1$ (2)

$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, d'où $f^{(3)}(0) = 2$

Ainsi: $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \mathcal{E}(x)$.

V- $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. définie sur $[-1,1]$

•) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, $\forall x \in]-1,1[$

•) $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

•) comme $f'(x) = 0$, $\forall x \in]-1,1[$, la fonction f est donc constante et comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$ (1)

on a alors: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.