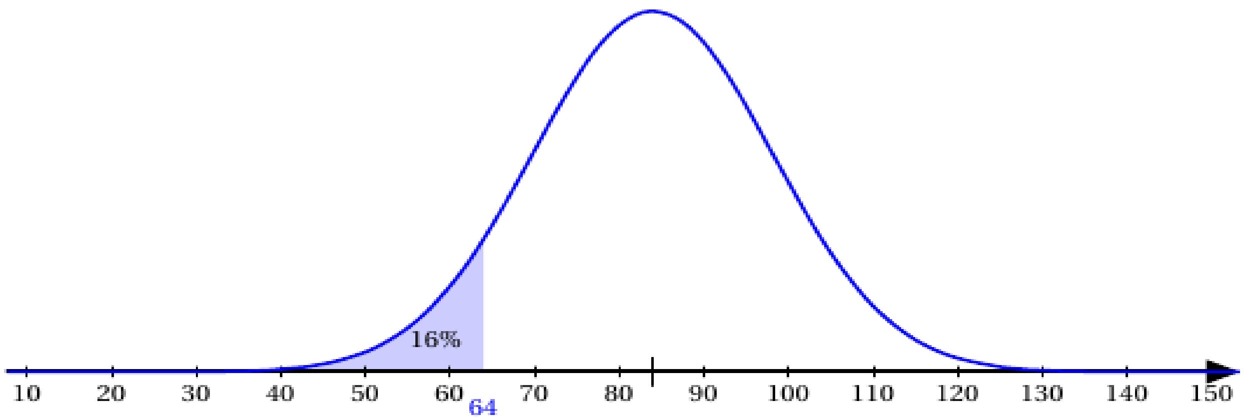
exercice1

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle

par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. **a.** En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

   b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

   b. Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

   c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

solution

Symétrie de la courbe de la loi normale par rapport à μ

1. **a.** On a $P(X \leq \mu - 20) = 0,16$ donc $P(X \geq \mu + 20) = P(X \geq 104) = 0,16$.
   Or $P(X \leq 64) + P(64 \leq X \leq 104) + P(X \geq 104) = 1$
   Par conséquent $P(64 \leq X \leq 104) = 1 - 2 \times 0,16 = 0,68$

   b. On a ainsi $P(\mu - 20 \leq X \leq \mu + 20) = 0,68$.
   D'après le résultat du cours, cela signifie que $\sigma \approx 20$.

Dans le graphe de loi normale :
$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)=0.68$
$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma)=0.95$
$P(\mu- 3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma)=0.997$

2. **a.** La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.

   b.
$$P(X \leq 64) = P(X - 84 \leq -20)$$
$$= P\left(\frac{X-84}{\sigma} \leq \frac{-20}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(Z \leq \frac{-20}{\sigma}\right)$$

   c. On a donc $P\left(Z \leq \frac{-20}{\sigma}\right) = 0,16$.

   Par conséquent, à l'aide de la calculatrice, $\frac{-20}{\sigma} \approx -0,9945$

   donc $\sigma \approx 20,11$.

Exercice 2

- soit X le nombre d'imperfections que présente la peinture de voitures neuves. On suppose que $X \sim Poi(\lambda)$.On a constitué le tableau suivant à l'aide d'un échantillon aléatoire de 100 voitures :

Nombre de défauts	**0**	**1**	**2**	**3**
Nombre de voitures	40	36	20	4

- a)Calculer l'estimateur à vraisemblance maximale de λ.
- b) Tester l'ajustement des données au modèle $X \sim Poi(\lambda=1)$,avec $\alpha=0,05$ .Pour cette question considérer que la dernière case est pour le nombre de défauts >=3

- -l’estimateur de maximum de vraissemblance de λ est $=(0*40+1*36+2*20+3*4)/100=0.88$

La moyenne arithmétique

- H0 : $X \sim Poi(\lambda=1)$, $\alpha=0,05$
- $P(k)=e^{-\lambda}(\lambda^k/k\,!)$

Nombre de défauts	0	1	2	3
Nombre de voitures	40	36	20	4
Probabilités théoriques	$e^{-1}=0.3678$	$e^{-1}(1/1\,!)=0.3678$	$e^{-1}(\ 1/\ 2!)$ $=0.1839$	$1-(2*0.36789+0.1839)$ $=0.0802$
Effectifs théoriques	36.78	36.78	18.39	8.02

- **-Condition d’applications du test** :les effectifs théoriques>=5
- **-D**$=(36.78-40)^2/\ 36.78+(36.78-36)^2/36.78+(18.39-20)^2/18.39+(8.02-4)^2/8.02=2.45$
- **-DDL**=k-r-1=4-0-1=3;r: nombre de paramètres estimés
- $-\chi 2_{(1-0.05)}(3)=\chi 2_{(0.95)}(3)=7.81>D$ =>H0 acceptée au seuil 0.05=>on accepte le modèle proposé $X \sim Poi(\lambda=1)$

Exercice3(Indépendance)

- On s’interroge sur l’indépendance de deux variables : la CSP catégorie socioprofessionnelle et le SEF style d’éducation familiale.

	CSP1	CSP2	CSP3
FAIBLE	9	8	6
SOUPLE	40	21	8
RIGIDE	10	22	31

	CSP1	CSP2	CSP3	TOTAL
FAIBLE	9	8	6	23
SOUPLE	40	21	8	69
RIGIDE	10	22	31	63
TOTAL	59	51	45	---

n=155,

-H0:La variable CSP(var1) est indépendante de la variable SEF(var2)

- sous l'hypothèse d'indépendance pij=pi. *p.j la probabilité d'avoir la i-iéme modalité de la var1 et la j-iéme modalité de la 2nd variable =>

Les effectifs théoriques $n*pij=n*\ p_{FAIBLE\ CSP1}=(59*23)/155=8.75$

Le tableau ci-dessous contient les effectifs théoriques.

	CSP1	CSP2	CSP3	TOTAL
FAIBLE	8.75	7.56	6.67	23
SOUPLE	26.26	21	20.03	69
RIGIDE	23.98	22.7	18.29	63
TOTAL	59	51	45	---

•**Les conditions d'application** du test sont vérifiées: tout les effectifs théoriques>5.

•**Ddl**==(l-1)(c-1)=(3-1) (3-1), α=0.001;l et c:nombre de modalités respectivement de var1 et var2

•$D=\chi 2_{(observé)}=31.70$, $\chi 2_{1-\ \alpha}(4)=18.47=h$

•D>h=> on rejette H0 au seuil de risque 0.001=>

On peut donc considérer que les 2 distributions sont liées significativement.

Exercice 4(Homogénéité)

- Une variable qualitative mesurée sur plusieurs populations.
- - **Contexte** :   2 populations ,
- P1 : élèves du collège A
- P2 : élèves du collège B.
- Variable X : « Participation à un club sportif », qualitative à l = 2 modalités « oui » et « non ».
- -α = 1%
- - **Observations :**
- On dispose de 2 échantillons indépendants prélevés dans P1 et P2, de tailles respectives n1=50 et n2 = 60.
- Au total, on a tiré au sort n = 110 individus.
- - Effectifs observés nij :

Participation \ Echantillon	collège A	collège B	total ligne L_i
oui	12	26	38
non	38	34	72
total colonne C_j	50	60	$n = 110$

- Hypothèses :
H0 : les deux populations sont homogènes (même taux de participation)
H1 : les deux populations ne sont pas homogènes (taux de participation différents)
- sous l'hypothèse H0(même distribution dans les deux échantillon des modalités de la variable étudiée)=> n*pij=(ni. *n.j)/n l'effectifs théorique d'avoir la j-iéme modalité de la var pour le iéme échantillon => n*p11= $n*p_{11}=p_{\text{collège A, oui}}$=(50*38)/110

Participation \ Echantillon	collège A	collège B
oui	17, 27	20, 73
non	32, 73	39, 27

- D=$\chi2_{(\text{observé})}=(17.27-12)^2/17.27+(20.73-26)^2/20.73+(32.73-38)^2/32.73+(39.27-34)^2/39.27$=1.6081+1.3397+0.8485+0.7072=4.5035
- On vérifie les conditions d'application du test :
- n >=30 et tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5.
- Donc D~ $\chi2$ à ddl=(k-1)(r-1)=1./k=2: nombre d'échantillons, r=2:nombre de modalités
- $\chi2_{1-\alpha}(1)=\chi2_{0.99}(1)$=6.63>D=4.50 => on accepte H0, au niveau 1% les résultats ne sont pas significativement différents dans les deux collègues.