LES TESTS

Bensalem.H

TEST d'hypothèse

- On étudie une population dont les éléments possèdent un caractère (mesurable ou qualitatif).
- Une hypothèse est formulée (issue de: considérations théoriques, pratiques ou un simple pressentiment) sur la valeur du paramètre ou propriété de ce caractère .
- On veut porter un jugement sur la base des résultats d'un échantillon prélevé de cette population.

TEST d'hypothèse

- L'hypothèse selon laquelle on fixe à priori un paramètre de la population à une valeur particulière s'appelle **l'hypothèse nulle** et est notée **Ho**.

- N'importe quelle autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse Ho s'appelle **l'hypothèse alternative** (ou contre-hypothèse) et est notée **H1**.

- Le test s'effectue en considérant **Ho** comme vraie.

Procédure du test

Identifier Ho

- Ho(l' hypothèse nulle), exemple : $\mu_1 = \mu_2$ .hypothèse de prudence, on choisi la plus facile à formuler et dont les conséquences aident à faire les calcules pour décider.

Identifier H1

- Ho et H1(l'hypothèse alternative) sont exclusives, exemple:H1($\mu_1 \neq \mu_2$)

Définir Z

- une variable aléatoire Z (ou paramètre),dite la statistique
- dont on connait la distribution pour construire une fonction des données à venir dont on connait la distribution si Ho est **vraie**.

α

- Construire un intervalle de pari de niveau $1-\alpha$(α fixé),
- $P(Z \in IP_{1-\alpha}) = 1-\alpha$.
- On définit l'extérieur de l'intervalle de pari comme étant la région critique du test au seuil α.

règle de décision.

- calcule de la valeur de Z, que l'on note z.
- si z appartient à la région critique, remettre en cause Ho, la rejeter, et conclure H1 est vraie, ou dire : « au risque α, Ho est rejetée ».
- sinon z appartient à l'intervalle de pari $IP_{1-\alpha}$, dire que l'on ne conclut pas, ou dire que l'on ne rejette pas l'hypothèse nulle Ho.

TEST d'hypothèse:
risque

- Le fait de conclure sur les deux hypothèses, présente deux risques :
- – le risque de 1ère espèce ou risque α, qui correspond au risque de rejeter Ho si celle-ci est réellement vraie
- – le risque de 2ème espèce ou risque β, qui correspond au risque de ne pas rejeter Ho si celle-ci est réellement fausse.

TEST d'hypothèse:
risque

- La probabilité associée au fait de rejeter Ho si celle-ci est fausse (soit 1 – β) est appelée **puissance du test**.

Avec probabilité 1-α

Avec probabilité 1-β

	Réalité (inconnue le plus souvent)	
Décision	H_0 vraie	H_0 fausse
H_0 non rejetée	Bonne décision	Erreur β
H_0 rejetée	Erreur α	Bonne décision

Les tests paramétriques

définition

- Ce sont des test relatifs à un ou plusieurs paramètres d'une loi spécifiée

Domaine de définition

catégories

- On distingue:
- Les hypothèses simples de type :$\theta=\theta 1$
- Les hypothèses composites de type: $\theta \in Df$, ou Df est un intervalle de $\Re$=> soit $\theta>\theta 1$ ou $\theta<\theta 1$ ou $\theta\neq\theta 1$

Les tests **robuste** sont souvent des tests paramétriques

caractéristique

- Ces tests supposent l'existence de X qui suit une loi normale
- Si les résultats obtenues sont valable même si X n'est pas normale => est un test **robuste**

Principaux test paramétriques

- Test sur le paramètre μ d'une loi normale
- Test sur le paramètre σd'une loi normale
- Test sur le paramètre p d'une proportion

Test non paramétrique

définition

- Un test non paramétrique est un test dont le modèle ne précise pas les conditions que doivent remplir les paramètres de la population dont a été extrait l'échantillon.

conditions

- Pour des échantillons de taille très faible jusqu'à n = 6, la seule possibilité est l'utilisation d'un test non paramétrique, sauf si la nature exacte de la distribution de la population est précisément connue.

les tests paramétriques, sont plus puissants si leurs conditions sont remplies,

avantages

- test **non-paramétrique** permet une diminution du coût ou du temps nécessaire à la collecte des informations.
- Seuls des tests non paramétriques permettent le traitement de données qualitatives.

Test d'ajustement

objectifs

- Les tests d'ajustement permettent de juger l'adéquation entre une situation réelle et un modèle théorique
- L'usage des **méthodes empiriques** (forme d'histogramme, ajustement graphique…)permettra de s'orienter vers une loi de distribution adaptées aux données

Test d'ajustement

- 1-ajuster une loi de probabilité (inconnue)à un échantillon, ses **propriétés** sont obtenues à partir de l'échantillon.
- 2-ajuster un échantillon à une loi de probabilité connue

selon: Nature du caractère(discret/continu), Forme de la distribution(histogramme),Interprétation des paramètres (moyenne, médiane,…)et leur nombre ,etc

Tests utilisés

- Test de chi-deux (test de Pearson)
- Test de komogorov-Smirnov
- Test de cramer-Von-Mises
- Test de normalité et d'exponentialité…

Les tests de comparaison

objectifs

- Les tests de comparaison d'échantillon sont utiliser pour comparer deux ou plusieurs échantillons
- Soit deux échantillons de taille n1,n2=> sont ils issue de la même population?

Tests de comparaison

- Comparaison des moyennes de deux échantillons gaussiens indépendants:
  - avec variances connues
  - avec variances inconnues et égales
- Comparaison des moyennes de deux échantillons non gaussiens indépendants ,
- Comparaison des pourcentages,
- Comparer plusieurs échantillons: analyse de la variance

Tests utilisés

- test de Fishert-Snedecor pour tester l'égalité des variances
- test de Student
- Test non paramétrique de comparaison: Test de Smirnov, test de wilcoxon
- …

Les tests d'indépendance

objectifs

- teste l'indépendance entre deux variables X et Y

Tests d'indépendance

- Indépendance entre variables quantitatives:
  - Échantillons gaussiens
  - Échantillons non gaussiens
- Indépendance entre variables ordinales
- Indépendance entre une variable quantitative et une variable qualitative
- Indépendance entre variables qualitatives

Tests utilisés

- Test de Spearmen
- Test de Kendall
- Test de chideux

Test de χ^2

Loi de χ^2

- Rappel:
- $\forall$ i,Xi~N(0,1) ,la distribution de $S = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ (somme des carrés des Xi) est appelée loi de χ^2 à n degrés de liberté

Définir Z

- une variable aléatoire Z (ou paramètre),dite la statistique
- $Z \sim \chi^2$ (ddl) / ddl est le degrés de liberté
- Il s'agit de calculer une **distance quadratique d_{obs}**
- Les tests chi2 ne sont valable que pour des données qualitatives ou discrètes à support fini. c'est un test paramétrique pour le cas discret et non paramétrique pour le cas continue.

α

- Construire un intervalle de pari de niveau $1-\alpha$(α fixé),
- $P(Z < \mathbf{d_{th}}) = 1-\alpha$. /$\mathbf{d_{th}}$ est le fractile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de χ^2 avec degré de liberté ddl (calculé)
- On définit l'extérieur de l'intervalle de pari comme étant la région critique du test au seuil α.

règle de décision.

- calcule de la valeur de Z, que l'on note $\mathbf{d_{obs}}$.
- si $\mathbf{d_{obs}} > \mathbf{d_{th}}$, remettre en cause Ho, la rejeter, et conclure H1 est vraie, ou dire : « au risque α, Ho est rejetée », le test est significatif.
- sinon $\mathbf{d_{obs}} < \mathbf{d_{th}}$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse Ho. donc on garde cette hypothèse, le test n'est pas significatif.

Test d'adéquation

Les Tests de χ^2 (test d'ajustement)

Données	• après avoir découpé l'intervalle d'observation en k classes, on construit un indice d mesurant l'écart constaté entre les effectifs réels et les effectifs théoriques.
Hypothèses	• Ho = {la distribution observée n'est pas significativement différente de la distribution théorique} • H1 = {la distribution observée est significativement différente de la distribution théorique}
la statistique du test	• $d = \sum_{i=1}^{k} \frac{(ni - npi)^2}{npi}$, **d~ χ^2(ddl), si Ho est vraie** • pi = probabilité théorique d'obtenir une observation de la loi de probabilité dans la classe i • n*pi = effectif théorique dans la classe i • ni: effectif observé dans la classe i
le seuil critique	• $\mathbf{d_{th}} = \chi 2_{\ 1-\alpha}$ (k-r-1) / ddl= k-r-1 , k : le nombre de classes , r: le nombre de paramètres qui ont été estimés pour la loi théorique.
Règle de décision:	• Si $\mathbf{d_{obs}} > \mathbf{d_{th}}$ on rejette Ho si $\mathbf{d_{obs}} < \mathbf{d_{th}}$ on "accepte" Ho

Les Tests de χ^2
test d'ajustement

- Le choix et le nombre de classes est arbitraire.
- les effectifs théoriques dans chacune des classes doivent être supérieur ou égale à 5. Sinon il faut regrouper les classes contigües afin d'avoir un effectif suffisant.
- Le test du $\chi 2$ est seulement un test asymptotique =>il vaut mieux éviter d'utiliser le test du $\chi 2$,si la taille de l'échantillon est inférieure à 50.

Exemple

On cherche à vérifier si la fréquence d'une maladie est liée au groupe sanguin.

Sur 200 malades observés, on a dénombré :

- 104 du groupe [O]
- 76 du groupe [A]
- 18 du groupe [B]
- 2 du groupe [AB]

On sait que dans la population générale la répartition entre les groupes est :

- groupe [O] 47 %
- groupe [A] 43 %
- groupe[B] 7 %
- groupe [AB] 3 %

- avec α=5% ?

- **il s'agit d'ajuster une répartition observée à une répartition théorique(test d'ajustement)).**
- C'est un test de $\chi 2$ de conformité.
- La répartition théorique (répartition des groupes de la population générale).
- La répartition observée (répartition des groupes de la population malade).
- **Hypothèses**: Ho: La répartition des groupes sanguins est la même dans les deux populations. H1: La répartition des groupes sanguins n'est pas la même dans les deux populations

Groupe sanguin	[O]	[A]	[B]	[AB]	Total
Oi	104	76	18	2	200=n
Pi	0.4 7	0.43	0.07	0.03	1
Ci=n*Pi	94	86	14	6	200

ddl : k=nombre de modalités=4 =>ddl=(4-1)=3

$\mathbf{d_{th} = \chi^2_{1-\alpha}(ddl)} = \chi^2_{0.95}(3)$

$\mathbf{d_{th} = 7.81}$

TABLE 6		FRACTILES de la LOI χ^2 (v)											
α n	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59

$$\chi^2 \text{calculé} = \frac{(104-94)^2}{94} + \frac{(76-86)^2}{86} + \frac{(18-14)^2}{14} + \frac{(2-6)^2}{6} = 6.036$$

- **Règle de décision:**
- **d_{obs} =0.64< 7.81 = d_{th} => l'hypothése Ho ne peut être rejetée au risque α=0.05**
- Donc sur l'étude de cet échantillon, on n'a pas d'argument statistique pour dire que la présence de la maladie n'est pas liée au groupe sanguin, car dans l'échantillon de malade, on a les mêmes répartitions du groupe sanguin que dans la population générale saine.

Les Tests de χ^{2}(test d'indépendance)

Données

- Cas de deux variables qualitatives(var1,var2): comparer les effectifs réels des croisements des modalités des deux variables avec les effectifs théoriques (obtenus dans le cas de variables indépendantes)

Hypothèses

- Ho = {les deux variables qualitatives sont indépendantes}
  contre H1 = {les deux variables qualitatives sont dépendantes}

la statistique du test

- $d=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{c}\frac{(nij-npij)^2}{npij}$, d~ **χ^2(ddl), si Ho est vraie**
- **nij** = effectif observé des individus possédant la modalité i de la var1 et la modalité j de la var2. **n** = effectif total observé, **pij** = probabilité d'obtenir une observation possédant la modalité i de la var1 et la modalité j de la var2 lorsqu'elles sont indépendantes => **n*pij**= effectif théorique

$n*pij=\frac{ni.*n.j}{n}$

le seuil critique

- $\mathbf{d_{th}}=\chi 2_{\,1-\alpha}$ (l-1)*(c-1) / ddl= (l-1)*(c-1) , l: le nombre de modalités de la 1iere modalité , c: le nombre de modalités de la 2ieme variable.

Règle de décision:

- Si $\mathbf{d_{obs}} > \mathbf{d_{th}}$ on rejette Ho
  si $\mathbf{d_{obs}} < \mathbf{d_{th}}$ on "accepte" Ho

Les Tests de χ^{2}(test d'homogénéité)

Données

- Les observations d'une variable qualitative sur k échantillons permettent-elles de conclure que les échantillons proviennent de la même population?

Hypothèses

- Ho = {les k échantillons sont issus d'une seule population} contre H1 = {les k échantillons sont issus de deux populations différentes}

la statistique du test

- $d = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{c} \frac{(nij - npj)^2}{npj}$, d~ **χ^2(ddl), si Ho est vraie**

- **nij**: effectif observé des individus de l'échantillon i, possédant la modalité j de la variable, **pj** = probabilité d'obtenir une observation possédant la modalité j de la variable lorsqu'on est en présence d'une seule population -> **n*pj** = effectif théorique

$n*pj = \frac{ni.*n.j}{n}$

le seuil critique

- $\mathbf{d_{th}}=\chi 2_{\ 1-\alpha}$ (k-1)*(r-1) / ddl= (k-1)*(r-1) , kl: le nombre d'échantillons, r: le nombre de modalités de la variable.

Règle de décision:

- Si $\mathbf{d_{obs}} > \mathbf{d_{th}}$ on rejette Ho
  si $\mathbf{d_{obs}} < \mathbf{d_{th}}$ on "accepte" Ho

Les Tests de χ^2

test d'homogénéité et d'indépendance

Pour que l'approximation par la loi du χ^2 soit valable, il est nécessaire que les effectifs théoriques dans chacune des cellules ≥ 5. Si ce n'est pas le cas, il faut au préalable regrouper les modalités d'une variable (ceci n'est pas forcément évident vu que les variables sont qualitatives) afin d'avoir un effectif suffisant.